数理解析研究所講究録 第2104巻 2019年 20-23

ある微分方程式系のグレブナー基底について
Gröbner Bases for Systems of Differential Equations

中山洋将

Hiromasa Nakayama

東海大学理学部数学科

Dapartment of Mathematics, Tokai University *

Abstract

Takayama defined the systems of differential equations $(k,l)_A, (k,l)_B$. These systems are generalizations of Appell hypergeometric differential equations. We find Gröbner bases for these systems with respect to a monomial order. About the system $(k,l)_B$, using the Gröbner basis, we can obtain the characteristic variety and the singular locus.

1 Introduction

多変数の微分方程式系について，理論的にグレブナー基底がわかっているものとして，Lauricella 多変数超幾何微分方程式系 (F_A, F_B, F_C) [2] や Kampé de Fériet 2 変数超幾何微分方程式系の特殊なパラメータの場合 [3] などがある．この論文では，[7] で与えられた Appell 2 変数超幾何微分方程式系の一般化の 1 つである $(k,l)_A, (k,l)_B$ 型微分方程式系のグレブナー基底を考える．これらのグレブナー基底を得るために [2] と同様の方法を使うことができる．得られたグレブナー基底を使って，微分方程式系の特性多様体や特異点集合を得ることができる場合がある．

2 $(k,l)_A$ 型微分方程式系のグレブナー基底

定義 1 ([7])
$(k,l)_A$ 型の階数 d の微分方程式系は $P\cdot f=0,\ Q\cdot f=0$ で, 微分作用素 P,Q が

$$\begin{aligned}
P =\ & \theta_x(\theta_x+\beta_{0,2})(\theta_x+\beta_{0,3})\cdots(\theta_x+\beta_{0,d}) \\
& - x(\theta_x+\theta_y+\alpha)(\theta_x+\beta_{1,2})(\theta_x+\beta_{1,3})\cdots(\theta_x+\beta_{1,d}) \\
& - p_2x^2(\theta_x+\theta_y+\alpha)(\theta_x+\theta_y+\alpha+1)(\theta_x+\beta_{2,3})\cdots(\theta_x+\beta_{2,d})+\cdots \\
& - p_kx^k(\theta_x+\theta_y+\alpha)(\theta_x+\theta_y+\alpha+1)\cdots(\theta_x+\theta_y+\alpha+k-1)(\theta_x+\beta_{k,k+1})\cdots(\theta_x+\beta_{k,d}) \\
Q =\ & \theta_y(\theta_y+\beta'_{0,2})(\theta_y+\beta'_{0,3})\cdots(\theta_y+\beta'_{0,d}) \\
& - y(\theta_x+\theta_y+\alpha)(\theta_y+\beta'_{1,2})(\theta_y+\beta'_{1,3})\cdots(\theta_y+\beta'_{1,d}) \\
& - q_2y^2(\theta_x+\theta_y+\alpha)(\theta_x+\theta_y+\alpha+1)(\theta_y+\beta'_{2,3})\cdots(\theta_y+\beta'_{2,d})+\cdots \\
& - q_ly^l(\theta_x+\theta_y+\alpha)(\theta_x+\theta_y+\alpha+1)\cdots(\theta_x+\theta_y+\alpha+l-1)(\theta_y+\beta'_{l,l+1})\cdots(\theta_y+\beta'_{k,d})
\end{aligned}$$

*nakayama@tokai-u.jp

と与えられるものである．ここで，$k,l \in \mathbb{N}$ は項の数を表し，$\alpha,\beta_{i,j},\beta'_{i,j},p_i,q_j \in \mathbb{C}$ はパラメータとする．$\theta_x = x\partial_x$, $\theta_y = y\partial_y$ で *Euler* 作用素を表すものとする．$(1,1)_A$ 型の階数 2 の微分方程式系が *Appell* F_2 の微分方程式系に対応する．

形式べき級数係数の微分作用素環 $\widehat{\mathcal{D}} = \mathbb{C}[[x,y]]\langle\partial_x,\partial_y\rangle$ において考える．$(k,l)_A$ 型微分方程式系に対応する左 $\widehat{\mathcal{D}}$ イデアル $\mathcal{I} = \langle P,Q\rangle$ のグレブナー基底を求める．$\widehat{\mathcal{D}}$ 上の単項式順序 $<'_{(\mathbf{0},\mathbf{1})}$ を次のように定義する．

$$x^\alpha y^\beta \xi_x^\gamma \xi_y^\delta <'_{(\mathbf{0},\mathbf{1})} x^{\alpha'} y^{\beta'} \xi_x^{\gamma'} \xi_y^{\delta'} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma+\delta < \gamma'+\delta' \text{ または} \\ (\gamma+\delta = \gamma'+\delta' \text{ かつ } \alpha+\beta > \alpha'+\beta') \text{ または} \\ (\gamma+\delta = \gamma'+\delta' \text{ かつ } \alpha+\beta = \alpha'+\beta' \text{ かつ 適当な tie-breaker で比較 })\end{cases}$$

ここで ξ_x,ξ_y は ∂_x,∂_y に対応する可換な変数である．

[2] において Lauricella 超幾何微分方程式系 (F_A) のグレブナー基底を計算するために用いた方法で以下のことを証明できる．

定理 2

$(k,l)_A$ 型に対応する $\widehat{\mathcal{D}}$ イデアル $\mathcal{I}$ の単項式順序 $<'_{(\mathbf{0},\mathbf{1})}$ についてのグレブナー基底は $\{P,Q\}$ である．すなわち，生成系そのものがグレブナー基底となる．

3 $(k,l)_B$ 型微分方程式系のグレブナー基底

定義 3 ([7])

$(k,l)_B$ 型の階数 d の微分方程式系は $P\cdot f=0$, $Q\cdot f=0$ で，微分作用素 P,Q が

$$\begin{aligned} P &= x^k(\theta_x+\beta_{0,1})(\theta_x+\beta_{0,2})(\theta_x+\beta_{0,3})\cdots(\theta_x+\beta_{0,d}) \\ &\quad - x^{k-1}(\theta_x+\theta_y+\alpha)(\theta_x+\beta_{1,2})(\theta_x+\beta_{1,3})\cdots(\theta_x+\beta_{1,d}) \\ &\quad - p_2x^{k-2}(\theta_x+\theta_y+\alpha)(\theta_x+\theta_y+\alpha-1)(\theta_x+\beta_{2,3})\cdots(\theta_x+\beta_{2,d}) + \cdots \\ &\quad - p_k(\theta_x+\theta_y+\alpha)(\theta_x+\theta_y+\alpha-1)\cdots(\theta_x+\theta_y+\alpha-k+1)(\theta_x+\beta_{k,k+1})\cdots(\theta_x+\beta_{k,d}) \\ Q &= y^l(\theta_y+\beta'_{0,1})(\theta_y+\beta'_{0,2})(\theta_y+\beta'_{0,3})\cdots(\theta_y+\beta'_{0,d}) \\ &\quad - y^{l-1}(\theta_x+\theta_y+\alpha)(\theta_y+\beta'_{1,2})(\theta_y+\beta'_{1,3})\cdots(\theta_y+\beta'_{1,d}) \\ &\quad - q_2y^{l-2}(\theta_x+\theta_y+\alpha)(\theta_x+\theta_y+\alpha-1)(\theta_y+\beta'_{2,3})\cdots(\theta_y+\beta'_{2,d}) + \cdots \\ &\quad - q_l(\theta_x+\theta_y+\alpha)(\theta_x+\theta_y+\alpha-1)\cdots(\theta_x+\theta_y+\alpha-l+1)(\theta_y+\beta'_{l,l+1})\cdots(\theta_y+\beta'_{l,d}) \end{aligned}$$

と与えられるものである．ここで，$k,l \in \mathbb{N}$ は項の数を表し，$\alpha,\beta_{i,j},\beta'_{i,j},p_i,q_i \in \mathbb{C}$ はパラメータとする．$(1,1)_B$ 型の階数 2 の微分方程式系が *Appell* F_3 の微分方程式系に対応する．

多項式係数の微分作用素環 $D = \mathbb{C}[x,y]\langle\partial_x,\partial_y\rangle$ において考える．$(k,l)_B$ 型微分方程式系に対応する左 D イデアル $I = \langle P,Q\rangle$ のグレブナー基底を求める．D 上の項順序 $<_{(\mathbf{0},\mathbf{1})}$ を次のように定義する．

$$x^\alpha y^\beta \xi_x^\gamma \xi_y^\delta <_{(\mathbf{0},\mathbf{1})} x^{\alpha'} y^{\beta'} \xi_x^{\gamma'} \xi_y^{\delta'} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma+\delta < \gamma'+\delta' \text{ または} \\ (\gamma+\delta = \gamma'+\delta' \text{ かつ } \alpha+\beta < \alpha'+\beta') \text{ または} \\ (\gamma+\delta = \gamma'+\delta' \text{ かつ } \alpha+\beta = \alpha'+\beta' \text{ かつ 適当な tie-breaker で比較})\end{cases}$$

$(1,1)_B$ 型階数 d の微分方程式系を考える．これは Appell F_3 の微分方程式系の階数を d に一般化したものである．

定理 4
$(1,1)_B$ 型階数 d に対応する D イデアル I の $<_{(\mathbf{0},\mathbf{1})}$ についてのグレブナー基底は $\{P,Q\}$ である. すなわち, 生成系そのものがグレブナー基底となる.

証明　この時, 微分作用素は

$$P = x(\theta_x+\beta_{0,1})(\theta_x+\beta_{0,2})(\theta_x+\beta_{0,3})\cdots(\theta_x+\beta_{0,d}) - (\theta_x+\theta_y+\alpha)(\theta_x+\beta_{1,2})(\theta_x+\beta_{1,3})\cdots(\theta_x+\beta_{1,d})$$
$$Q = y(\theta_y+\beta'_{0,1})(\theta_y+\beta'_{0,2})(\theta_y+\beta'_{0,3})\cdots(\theta_y+\beta'_{0,d}) - (\theta_x+\theta_y+\alpha)(\theta_y+\beta'_{1,2})(\theta_y+\beta'_{1,3})\cdots(\theta_y+\beta'_{1,d})$$

であり, 設定した項順序についての先頭項は

$$\mathrm{in}_{<_{(\mathbf{0},\mathbf{1})}}(P) = x^{1+d}\xi_x^d,\quad \mathrm{in}_{<_{(\mathbf{0},\mathbf{1})}}(Q) = y^{1+d}\xi_y^d$$

である. 先頭項は互いに素であるから, S 式は P,Q により交換子積 $[P,Q]$ まで簡約できる. さらに交換子積 $[P,Q]$ は P,Q により 0 まで簡約できる. すなわち S 式は P,Q で 0 に簡約できるので, $\{P,Q\}$ はグレブナー基底となる. ∎

$<_{(0,1)}$ についてのグレブナー基底から, それらの重みベクトル $(0,1)$ についてのイニシャルフォームをとることで特性多様体がわかる.

系 5
$(1,1)_B$ 型階数 d に対応する D イデアル I についての特性多様体は,

$$x^{d-1}\xi_x^{d-1}(x(x-1)\xi_x - y\xi_y),\ y^{d-1}\xi_y^{d-1}(-x\xi_x + y(y-1)\xi_y)$$

の零点集合である. ここで, ξ_x,ξ_y は ∂_x,∂_y に対応する可換な変数である. 特に特性多様体の次元は 2 より, この微分方程式系はホロノミックである. さらに特異点集合を計算すれば, $x(x-1)y(y-1)((x-1)(y-1)-1)$ の零点集合となる.

まだ証明は与えられていないが, 計算機による実験によれば, 以下のことが予想できる.

(予想) [$(k,l)_B$ 型に対応する D イデアル I のグレブナー基底] $(k,l)_B$ 型に対応する D イデアル I の $<_{(\mathbf{0},\mathbf{1})}$ についてのグレブナー基底は $\{P,Q\}$ である. すなわち, 生成系そのものがグレブナー基底となる.

参 考 文 献

[1] R. Hattori, N. Takayama, The singular locus of Lauricella's F_C, Journal of Mathematical Society of Japan, 66 (2014), 981–995

[2] H. Nakayama, Gröbner basis and singular locus of Lauricella's hypergeometric equations, Kyushu Journal of Mathematics, Vol.68 (2014) No.2, 287–296

[3] 中山洋将, Kampé de Fériet の微分方程式系のグレブナー基底,　大会報告, 数式処理, 第 21 巻, 第 2 号, (2015)

[4] T. Oaku, T. Shimoyama, A Gröbner Basis Method for Modules over Rings of Differential Operators, Journal of Symbolic Computation 18 (1994), 223–248.

[5] T. Oaku, Computation of the characteristic variety and the singular locus of a system of differential equations with polynomial coefficients, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics 11 (1994), no. 3, 485–497.

[6] M. Saito, B. Sturmfels, N. Takayama, *Gröbner Deformations of Hypergeometric Differential Equations*, Springer, 2000

[7] N. Takayama, Completely Integrable Systems of Partial Differential Equations with Rational Coefficients, 東京大学大学院修士論文, 1984