数理解析研究所講究録 第2104巻 2019年 86-94

SubdirectProduct群の作る coherent configurationの計算

Computation of coherent configurations formed by SubdirectProduct groups

宮本泉 *

IZUMI MIYAMOTO

Abstract

Let G be a transitive group and let σ be an automorphism of G. We compute the coherent configuration formed by the SubdirectProduct group $\{(g, g^{\sigma})|g \in G\}$. There exist some interesting examples among such coherent configurations, while those formed by G are trivial. We computed such SubdirectProduct groups for many transitive groups of small degree. We are interested in such cases that the automorphism groups of the coherent configuration and of the group G itself are coincident with each other.

1 はじめに

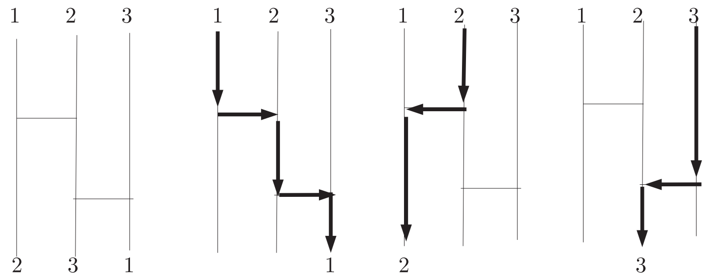
G は集合 $\Omega=\{1,2,\cdots,n\}$ 上の置換群, $\Omega^2=\{(i,j)\mid i,j\in\Omega\ \}$ とする。G の Ω^2 への成分ごとの作用の orbit 全体が coherent configuration [2] となる。

Ω 上可移な群 G とその自己同型 σ を使って、G と同型な SubdirectProduct 群 $\{(g, g^{\sigma})|g \in G\}$ を構成する。この群は、$\Omega\cup\Omega$のコピー 上の orbit 2個の置換群となる。

G の作る coherent configuration が自明なものであっても、前述のように構成した G の SubdirectProduct 群が興味深い coherent configuration となる例がある。そこで、多くの次数の小さい可移な群に対して SubdirectProduct 群を計算し、その coherent configuration を調査する実験を行った。実験結果において、とくに、その自己同型群がもとの群 G と同型となる場合の考察を行った。

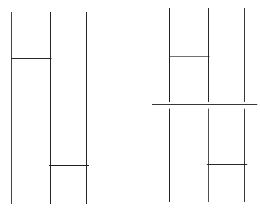
*imiyamoto1@gmail.com

2 置換群



番号の移し方： $1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 2$ 　　巡回置換表示： $(1,3,2)$

アミダくじをつなげて作られる群 (置換群)



$(1,3,2) \ = \ (1,2)(2,3)$ ：群の計算

アミだくじ "全体"(置換全体) でできる群とその元の個数

$$\mathsf{Sym}(n) = \langle\, (1,2), (2,3), \cdots, (n-1,n) \,\rangle \text{ (対称群)}$$

$$(i, i+1) \text{ たち：生成元}$$

$$|\mathsf{Sym}(n)| = n! \quad \text{(“注”：おなじくじでも横線の入れ方はいろいろある)}$$

いろいろな置換群 (特定のアミダくじたちで生成される群)

$$G = \langle\, g_1, g_2, \cdots, g_r \mid g_i \in \mathsf{Sym}(n) \,\rangle$$

【定義】置換群の orbit ：群の作用によって番号の移る範囲。

【例】 $\mathsf{Sym}(3) = \langle\, (1,2), (2,3) \,\rangle$

$$1 \xrightarrow{(1,2)} 2 \xrightarrow{(2,3)} 3 \qquad \text{orbit は } \{\Omega\} \text{（個数 1 個）}$$

【例】 $C_3 = \langle\, (1,3,2) \,\rangle$

$$1 \xrightarrow{(1,3,2)} 3 \xrightarrow{(1,3,2)} 2 \qquad \text{orbit は } \{\Omega\} \text{（個数 1 個）}$$

【定義】 置換群の orbit が 1 個となるとき、可移という。

3 coherent configuration

置換群の考察において、可移でないときは、通常、orbit ごとの可移群を調べることをする。本発表では、可移でない群の orbit 間の関係に注目している。そのために、Ω 上の置換群の Ω^2 への作用を見る。

Ω^2 上の orbit ：$\Omega^2 = \{[i,j] \mid i,j \in \Omega\}$ へは各成分ごとに作用させる。

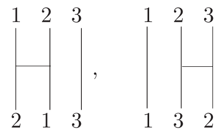
【例】 Sym(3) $= \langle (1,2),(2,3) \rangle$

$[1,1] \xrightarrow{(1,2)} [2,2] \xrightarrow{(2,3)} [3.3]$, (1 番目の orbit)

$[1,2] \longrightarrow [2,1] \longrightarrow [3,1]$

$(2,3)\downarrow$

$[1,3] \longrightarrow [2,3] \longrightarrow [3,2]$ (2 番目の orbit)



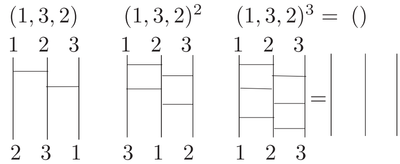
orbit は $\{\{[1,1],[2,2],[3,3]\}$ と $\{[1,2],\cdots,[3,2]\}\}$ になり、個数 2 個となる。

【例】 $C_3 = \langle (1,3,2) \rangle$

$[1,1] \longrightarrow [3,3] \longrightarrow [2,2]$, (1 番目の orbit)

$[1,2] \longrightarrow [3,1] \longrightarrow [2,3]$, (2 番目の orbit)

$[2,1] \longrightarrow [1,3] \longrightarrow [3,2]$ (3 番目の orbit)



orbit は

$\{\{[1,1],[2,2],[3,3]\}, \{[1,2],[2,3],[3,1]\}$ および $\{[2,1],[3,2],[1,3]\}\}$ になり、個数 3 個となる。

orbit の行列表示：

orbit に、適当に、 1 番目の orbit、 2 番目の orbit$\cdots$ と番号付けをして、$[i,j] \in \Omega^2$ が k 番目の orbit に入るとき、$[i,j]$ 成分の値を k とするように行列を定義する。上に挙げた例の行列は下のようになる。

$$【例】\mathrm{Sym}(3): \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad 【例】C_3: \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

【定義】Ω 上の置換群の Ω^2 上の orbit の行列表示をもって、置換群の作る coherent configuration とする。とくに、置換群の Ω 上の orbit の個数が 1 個、すなわち、Ω 上で可移のときの置換群が作る coherent configuration を association scheme[3] という。

前述の例は association scheme となっている。

本研究では、置換群の orbit 間の関係を考察することを目的としている。そのときに、orbit が 2 個で、各 orbit 上 faithful な場合が基本となると考えて、そのような群を SubdirectProduct によって構成して実験を行う。

2 つの自明な例：$\Omega = \{1,2,3,1',2',3'\}$

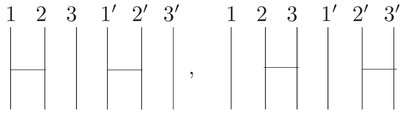
【例】 $G = \langle (1,2)(1',2'),(2,3)(2',3') \rangle \cong$ Sym(3)

Ω 上の orbit： 2 個

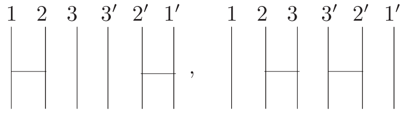
$\{\{1,2,3\},\{1',2',3'\}\}$

Ω^2 上の orbit： 8 個

($\{1,2,3\}$ と $\{1',2',3'\}$ で同じ作用なので)



【例】 $\Omega = \{1,2,3,3',2',1'\}$
$G = \langle\, (1,2)(1',2'),$
$(2,3)(2',3')\,\rangle$
$\cong \mathsf{Sym}(3)$



２つの例の行列表示は番号の並べ方が違うだけ (共役) となっている。

$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\1'\\2'\\3' \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc}1&2&3&1'&2'&3'\end{array}\\ \begin{pmatrix}1&2&2&5&7&7\\2&1&2&7&5&7\\2&2&1&7&7&5\\6&8&8&3&4&4\\8&6&8&4&3&4\\8&8&6&4&4&3\end{pmatrix}\end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\3'\\2'\\1' \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc}1&2&3&3'&2'&1'\end{array}\\ \begin{pmatrix}1&2&2&7&7&5\\2&1&2&7&5&7\\2&2&1&5&7&7\\8&8&6&3&4&4\\8&6&8&4&3&4\\6&8&8&4&4&3\end{pmatrix}\end{array}$$

【注】これらの例では、それぞれの置換の $\{1,2,3\}$ 上の作用から、$\{1',2',3'\}$ 上の作用が 1 つだけ定まり、また、逆も同様となっている。このようなとき、各 orbit 上 faithful という。

【例】$G = \langle (1,2,3,4,5,6,7)(1',2',3',4',5',6',7'), (1,2)(3,6)(1',2')(4',7')\rangle$

$$\begin{array}{c|cccccccccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1' & 2' & 3' & 4' & 5' & 6' & 7' \\ \hline
1 & 1&3&3&3&3&3&3&4&6&6&4&4&4&6\\
2 & 3&1&3&3&3&3&3&6&4&6&6&4&4&4\\
3 & 3&3&1&3&3&3&3&4&6&4&6&6&4&4\\
4 & 3&3&3&1&3&3&3&4&4&6&4&6&6&4\\
5 & 3&3&3&3&1&3&3&4&4&4&6&4&6&6\\
6 & 3&3&3&3&3&1&3&6&4&4&4&6&4&6\\
7 & 3&3&3&3&3&3&1&6&6&4&4&4&6&4\\
1' & 5&7&5&5&5&7&7&2&8&8&8&8&8&8\\
2' & 7&5&7&5&5&5&7&8&2&8&8&8&8&8\\
3' & 7&7&5&7&5&5&5&8&8&2&8&8&8&8\\
4' & 5&7&7&5&7&5&5&8&8&8&2&8&8&8\\
5' & 5&5&7&7&5&7&5&8&8&8&8&2&8&8\\
6' & 5&5&5&7&7&5&7&8&8&8&8&8&2&8\\
7' & 7&5&5&5&7&7&5&8&8&8&8&8&8&2
\end{array}$$

この例の作り方：GAP-システム [1] を使う。
GAP-システムの可移置換群のデータのうちの TransitiveGroup(7, 5) ２個に SubdirectProducts を使ってできる群の 1 つ。$\Omega = \{1,2,\cdots,7,1',2',\cdots,7'\}$ として、見やすい番号付けをした。

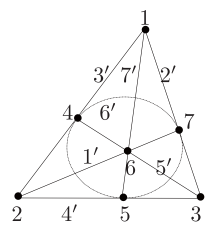
$$\begin{aligned}\mathsf{TransitiveGroup}(7,5) &= \langle (1,2,3,4,5,6,7),(1,2)(3,6)\rangle \\ &\cong \langle (1,2,3,4,5,6,7),(1,2)(4,7)\rangle \cong G\end{aligned}$$

G の Ω 上の orbit は２個、$\{1,2,\cdots,7\}$, $\{1',2',\cdots,7'\}$ となり、G の各 orbit 上の作用は TransitiveGroup(7, 5) と同じになる。したがって、G は各 orbit 上で、TransitiveGroup(7, 5) と同じ association scheme を作る。それらは下のようになる。このような Ω^2 上の orbit の行列表示を、単位行列になぞらえて I と示すことにする。

$$
\begin{array}{c}
 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\
3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\
3 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \\
3 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 \\
3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 \\
3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 3 \\
3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
 \\ 1' \\ 2' \\ 3' \\ 4' \\ 5' \\ 6' \\ 7'
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} 1' & 2' & 3' & 4' & 5' & 6' & 7' \end{array} \\
\begin{pmatrix}
2 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\
8 & 2 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\
8 & 8 & 2 & 8 & 8 & 8 & 8 \\
8 & 8 & 8 & 2 & 8 & 8 & 8 \\
8 & 8 & 8 & 8 & 2 & 8 & 8 \\
8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 2 & 8 \\
8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 2
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

これらは 7 次対称群 Sym(7) の作る association scheme と同じになる。したがって、association scheme からは TransitiveGroup$(7,5)$ は得られない。しかし、TransitiveGroup$(7,5)$ を orbit 2 個の SubdirectProduct 群として表すことによって、それが作る coherent configuration として TransitiveGroup$(7,5)$ が得られる。その説明を次に示す。

$$
\begin{array}{c}
 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} 1' & 2' & 3' & 4' & 5' & 6' & 7' \end{array} \\
\begin{pmatrix}
4 & 6 & 6 & 4 & 4 & 4 & 6 \\
6 & 4 & 6 & 6 & 4 & 4 & 4 \\
4 & 6 & 4 & 6 & 6 & 4 & 4 \\
4 & 4 & 6 & 4 & 6 & 6 & 4 \\
4 & 4 & 4 & 6 & 4 & 6 & 6 \\
6 & 4 & 4 & 4 & 6 & 4 & 6 \\
6 & 6 & 4 & 4 & 4 & 6 & 4
\end{pmatrix}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} 1' & 2' & 3' & 4' & 5' & 6' & 7' \end{array} \\
\begin{pmatrix}
 & 6 & 6 & & & & 6 \\
6 & & 6 & 6 & & & \\
 & 6 & & 6 & 6 & & \\
 & & 6 & & 6 & 6 & \\
 & & & 6 & & 6 & 6 \\
6 & & & & 6 & & 6 \\
6 & 6 & & & & 6 &
\end{pmatrix}
\end{array}
$$



$\{1,2,\cdots,n\}\times\{1',2',\cdots,n'\}$ 上の orbit の作る行列は、7 点上の射影平面のつくる対称 2 デザインとなっていることが分かる。実際、TransitiveGroup$(7,5)\cong \mathrm{PSL}(3,2)$ である。

orbit の個数の少ない coherent configuration について、$\{1,2,\cdots,n\}^2$ と $\{1',2',\cdots,n'\}^2$ の上での orbit 2 個、$\{1,2,\cdots,n\}\times\{1',2',\cdots,n'\}$ の上での orbit 2 個、したがって、$\{1',2',\cdots,n'\}\times\{1,2,\cdots,n\}$ 上での orbit も 2 個となるときは、一般に、すなわち、置換群から作られるものではないときでも、容易に、対称 2 デザインが得られると知られている。この coherent configuration を対称 2 デザイン型ということにする。

4 実験方法

GAP-システムの置換群のデータ

TransitiveGroup$(|\Omega|, num)$ ($|\Omega|\le 30$ の可移な群すべてのデータ)

PrimitiveGroup$(|\Omega|, num)$ ($|\Omega| < 2500$)

そのなかで、Ω のサイズが小さいとき、本実験では、TransitiveGroup に対して、Ω のサイズが小さい方から順に調べることにした。

実験方法として、群の直積も含む、すべての SubdirectProduct 群を構成する SubdirectProducts では、条件が広すぎて計算が終わらない。そこで次の手順で、データの群 H と同型な orbit 2 個の置換群 G (のすべて) を構成する。

AutomorphismGroup(H) :H の自己同型群

InnerAutomorphismsAutomorphismGroup :

AutomorphismGroup のなかで、自明な coherent configuration を与えることが分かっている部分群

RightTransversal ：

AutomorphismGroup のなかで、自明でない coherent configuration を与える可能性のあるものの代表なを、IsConjugatorIsomorphism で、自明なものかどうかを判別できる。

SubdirectProduct(H, H, id, aut) ：

id は恒等写像、$aut \in$RightTransversal で orbit 2 個の群 G を構成

$\Longrightarrow$ G の orbit から coherent configuration の行列、それらの同型類、および、「自己同型群」を計算

このとき、自明なものかどうかは、行列を見ればすぐ分かる。

SubdirectProduct 群たちの同型類も考えられるが、その計算はいくつかの場合について実験するにとどめた。

自己同型群の計算には、association scheme の構成実験を行ったときに作った GAP-言語によるプログラムを応用した。

5 実験結果

次数 $|\Omega| \leq 16$ まで実験済 (計算結果は未整理)

TransitiveGroup の個数

$\|\Omega\|$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	$\cdots$
個数	5	16	7	50	34	45	8	301	9	63	104	1954	10	983	$\cdots$

自己同型群として得られる群の個数

AS	3	8	4	21	12	13	4	59	6	16	24	206	$\cdots$
(as)	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	25	222	$\cdots$
CC	0	0	1	6	3	1	1	15	1	4	3	171	

AS：可移な群の作る assocation scheme の個数

(as)：association scheme の個数

CC：本実験の方法で作られる coherent configuration の自己同型群として得られる群の個数

計算結果の整理について

coherent configuration の自己同型群は、coherent configuration の示す Ω^2 上の orbit をもつ最大の群として与えられる。多くの場合で $G \subsetneq$ 自己同型群が成立するので、ここから元の群 H(の 1 つ) が復元可能かどうかという疑問が残っている。したがって、coherent configuration の同型類の分類だけで十分かどうかが不明である。

計算が困難だった場合

H	$\|H\|$	|RightTransversal|	(Normalizer)
TransitiveGroup$(16, 3)$	16	20160	1
TransitiveGroup$(16, 197)$	128	40230	30
TransitiveGroup$(16, 325)$	128	43008	256
TransitiveGroup$(16, 1125)$	1024	36864	1024

対処方法

Normalizer(Sym$(\Omega), H)$ は ConjugatorIsomorphism を与える AutomorphismGroup の部分群となる (逆も真)。この部分群を利用すると、多くの場合で、RightTransversal の個数を減らすことができる。

サイズの大きいときの実験例： $|\Omega| = 64$

PrimitiveGroup$(64, i)$　NrPrimitiveGroups$(64) = 74$ なので、$i = 1, 2, \cdots, 74$。

association scheme の自己同型群になる群　16 個

coherent configuration の自己同型群として得られる群 1 個 (対称 2 デザインを与える)

(自明でない coherent configuration としては　3 個)

本実験に関連する GAP のコマンドについて

SubdirectProductsは、群 H と群 K との準同型写像の “class” の代表による SubdirectProduct の全体を構成する。つまり、本実験より一般的な条件の群が構成される。しかし、“class” でまとめた結果であるにもかかわらず、可移群すべてを対象にしたとき、計算が終わらないことが多かった。出力される群の個数が多くなりすぎるようである。そこで、条件を本実験のように設定することとした。ただし、元の群が単純群のときには、上の一般的な設定の計算で十分である。本実験のあと、perfect な群のときで一般的な設定では計算できて、本実験の方法では計算が終わらない例が見つかっている。

以下に、関連する GAP のコマンドを挙げる。

AllHomomorphismClasses : 群 H から K への準同型写像の K-共役 “class” の代表全体の構成。(Automorphism より一般的な設定になっている。)

AllAutomorphisms : 群 H から H への同型写像の全体の構成。(“class” にまとめられていない。) その個数は |AutomorphismGroup| になる。

6　計算例

coherent configuration の行列表示について右上部分と左上部分のみを示すことにする。

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 1 & \cdots & n & 1' & \cdots & n' \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ n \\ 1' \\ \vdots \\ n' \end{array} & \left(\begin{array}{cc} \text{左上} & \text{右上} \\ \text{左下} & \text{右下} \end{array} \right) \end{array}$$

G のΩ^2上の orbit

右上と左下では $[i, j']$ と $[j', i]$ で一致

(転置行列の関係)

(本発表の場合)

左上と右下では、元の群 H と同じ

$[i, j]$ と $[i', j']$ で一致 $\Longrightarrow$

H の作る association scheme になる

G の orbit が 2 個のとき、その coherent configuration の行列の型の例を示す。

一般の場合	自明な場合	対称 2 デザイン型
$\begin{pmatrix} A & B \\ {}^tB & C \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A & I \\ I & A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & J \\ {}^tJ & C \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} I & B \\ {}^tB & I \end{pmatrix}$

I : 単位行列型、　J : all 1 行列型 (Ω^2 のこの部分の orbit が 1 個)　(本実験では、$A = C$)

【例】 t8n22=TransitiveGroup$(8,22)$、SubdirectProduct 群２個

$$
\text{左上}\ (\text{２個同じ}) = \begin{pmatrix} 1&3&4&4&5&5&6&6\\ 3&1&4&4&5&5&6&6\\ 4&4&1&3&6&6&5&5\\ 4&4&3&1&6&6&5&5\\ 5&5&6&6&1&3&4&4\\ 5&5&6&6&3&1&4&4\\ 6&6&5&5&4&4&1&3\\ 6&6&5&5&4&4&3&1 \end{pmatrix}
$$

左上部分の association scheme
の自己同型群 Aut(AS) は
t8n31、その order は $|\text{t8n31}| = 64$
全体の coherent configuration
の自己同型群 Aut(CC) は、
両方とも t8n22, $|\text{t8n22}| = 32$

$$
\text{右上} = \begin{pmatrix} 7&9&7&9&8&8&8&8\\ 9&7&9&7&8&8&8&8\\ 7&9&9&7&8&8&8&8\\ 9&7&7&9&8&8&8&8\\ 8&8&8&8&7&9&7&9\\ 8&8&8&8&9&7&9&7\\ 8&8&8&8&7&9&9&7\\ 8&8&8&8&9&7&7&9 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 7&9&7&9&9&7&7&9\\ 9&7&9&7&7&9&9&7\\ 9&7&7&9&7&9&7&9\\ 7&9&9&7&9&7&9&7\\ 7&9&9&7&7&9&7&9\\ 9&7&7&9&9&7&9&7\\ 9&7&9&7&9&7&7&9\\ 7&9&7&9&7&9&9&7 \end{pmatrix}
$$

【例】 t8n15 : $|\text{t8n15}| = 32$, Aut(AS)=t8n35, $|\text{t8n35}| = 128$, Aut(CC)=t8n15

$$
\text{左上} = \begin{pmatrix} 1&3&4&4&5&5&5&5\\ 3&1&4&4&5&5&5&5\\ 4&4&1&3&5&5&5&5\\ 4&4&3&1&5&5&5&5\\ 5&5&5&5&1&3&4&4\\ 5&5&5&5&3&1&4&4\\ 5&5&5&5&4&4&1&3\\ 5&5&5&5&4&4&3&1 \end{pmatrix},\quad \text{右上} = \begin{pmatrix} 6&8&8&6&10&10&12&12\\ 8&6&6&8&10&10&12&12\\ 6&8&6&8&12&12&10&10\\ 8&6&8&6&12&12&10&10\\ 12&12&10&10&6&8&8&6\\ 12&12&10&10&8&6&6&8\\ 10&10&12&12&6&8&6&8\\ 10&10&12&12&8&6&8&6 \end{pmatrix}
$$

【例】 t8n23 : $|\text{t8n23}| = 48$, Aut(AS)=t8n44, $|\text{t8n44}| = 384$, Aut(CC)=t8n23

$$
\text{左上} = \begin{pmatrix} 1&3&4&4&4&4&4&4\\ 3&1&4&4&4&4&4&4\\ 4&4&1&3&4&4&4&4\\ 4&4&3&1&4&4&4&4\\ 4&4&4&4&1&3&4&4\\ 4&4&4&4&3&1&4&4\\ 4&4&4&4&4&4&1&3\\ 4&4&4&4&4&4&3&1 \end{pmatrix},\quad \text{右上} = \begin{pmatrix} 5&7&9&9&5&7&7&5\\ 7&5&9&9&7&5&5&7\\ 9&9&5&7&5&7&5&7\\ 9&9&7&5&7&5&7&5\\ 5&7&5&7&7&5&9&9\\ 7&5&7&5&5&7&9&9\\ 7&5&5&7&9&9&7&5\\ 5&7&7&5&9&9&5&7 \end{pmatrix}
$$

【例】 t8n39 : $|\text{t8n39}| = 192$, Aut(AS)=t8n44 (左上は直前の例と同じ), Aut(CC)=t8n39

$$
右上 = \left(\begin{array}{cccc|cccc}
5 & 7 & 7 & 5 & 5 & 7 & 5 & 7 \\
7 & 5 & 5 & 7 & 7 & 5 & 7 & 5 \\
5 & 7 & 5 & 7 & 7 & 5 & 5 & 7 \\
7 & 5 & 7 & 5 & 5 & 7 & 7 & 5 \\
\hline
7 & 5 & 5 & 7 & 5 & 7 & 5 & 7 \\
5 & 7 & 7 & 5 & 7 & 5 & 7 & 5 \\
7 & 5 & 7 & 5 & 7 & 5 & 5 & 7 \\
5 & 7 & 5 & 7 & 5 & 7 & 7 & 5
\end{array}\right)
$$

【例】 t8n29 : $|\text{t8n29}| = 64$, $|\text{Aut(CC)}| = 64$, Aut(AS)=t8n35, $|\text{t8n35}| = 128$

（注） t8n19, $|\text{t8n19}| = 32$ からでも同型な coherent configuration が得られる。

$$
左上 \left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 \\
3 & 1 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 \\
4 & 4 & 1 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 \\
4 & 4 & 3 & 1 & 5 & 5 & 5 & 5 \\
\hline
5 & 5 & 5 & 5 & 1 & 3 & 4 & 4 \\
5 & 5 & 5 & 5 & 3 & 1 & 4 & 4 \\
5 & 5 & 5 & 5 & 4 & 4 & 1 & 3 \\
5 & 5 & 5 & 5 & 4 & 4 & 3 & 1
\end{array}\right)
\quad
右上 \left(\begin{array}{cccc|cccc}
6 & 8 & 6 & 8 & 6 & 8 & 8 & 6 \\
8 & 6 & 8 & 6 & 8 & 6 & 6 & 8 \\
8 & 6 & 8 & 6 & 6 & 8 & 8 & 6 \\
6 & 8 & 6 & 8 & 8 & 6 & 6 & 8 \\
\hline
6 & 8 & 8 & 6 & 6 & 8 & 6 & 8 \\
8 & 6 & 6 & 8 & 8 & 6 & 8 & 6 \\
8 & 6 & 6 & 8 & 6 & 8 & 6 & 8 \\
6 & 8 & 8 & 6 & 8 & 6 & 8 & 6
\end{array}\right)
$$

実例について、Ω 内の番号の並べ方を整理して、見易いと思える形になるようにしている。見易い形にするとき、行列個々に対して、番号の並べ替えをいろいろと試して見易いかどうかを調べているので、多くの場合について一括して見ることは困難になっている。現状では、この状況のに改善の見通しがない。

ここに挙げることができた少数の例では、左上部分から、もとの群は $\{1, 2\}$ および $\{1, 2, 3, 4\}$ をブロックとすることが分かる。右上部分には共通のパターンが表れている。いづれも、パターンのサイズが 2 の倍数で行列全体のサイズも小さい 2 の倍数となっている。今後、3 の倍数の場合なども見る必要があると考えている。

参　　献

[1] The GAP Group, GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.8.10; 2018. (`https://www.gap-system.org`)

[2] D. G. Higman, Coherent Algebras, Linear Algebra and its Applications **93** (1987) 209-239.

[3] A. Hanaki and I. Miyamoto, Classification of association schemes with small vertices, published at WWW (1999∼): `http://math.shinshu-u.ac.jp/~hanaki/as/`.