

## 複数 OD 経路選択ゲームの均衡解探索の高速化

電気通信大学大学院 情報理工学研究科, 情報・ネットワーク工学専攻  
小藤田遇, 高橋里司

Guu Kofujita, Satoshi Takahashi  
Graduate School of Informatics and Engineering  
The University of Electro-Communications

**概要** 交通割当問題は広く研究されてきたテーマである。この問題は都市工学とゲーム理論の2つの側面から成り立つものである。本研究ではゲーム理論の視点から交通割当問題をネットワーク上の混雑ゲームとして扱った。交通割当問題は混雑ゲームの文脈においては利己的経路選択ゲームと呼ばれることがある。利己的経路選択ゲームにおいて、我々はプレイヤーの意思決定による均衡点の探索手法を提案する。各プレイヤーは出発地から目的地までの各経路に流す流量を決定する。よく知られた探索手法としては辺流量を利用して探索する Frank-Wolfe 法があり、この手法では高速に求解可能であるものの、辺流量を利用していることから表現力が弱いという問題が存在する。そのため、本研究ではさらに複雑な現象をモデリングするための手法として経路流量を考慮する手法を採用する。この手法ではネットワーク上の経路を全て考慮する必要があるため、均衡解探索に莫大な時間がかかってしまうことが知られている。本稿では、複数 OD 利己的経路選択ゲームにおける求解手法と、一般的な利己的経路選択ゲームに対する求解手法及びその高速化手法について扱う。我々のアルゴリズムではレプリケータダイナミクスを反復求解手法として用いる。レプリケータダイナミクスによる求解手法では、扱うネットワーク上で各反復ですべての経路について計算を行うため計算時間が非常に大きいものとなる。そこで、提案手法では均衡解において利用されない経路を求解前に削除することで計算時間を短縮する。本稿では計算機実験により提案するアルゴリズムを評価する。  
キーワード：複数 OD 経路選択ゲーム; 枝刈り法; レプリケータダイナミクス

### 1 はじめに

交通ネットワークや社会ネットワークなどの現実の事象はネットワークを使った数理モデルによって設計、分析できる。特にその中でも交通割当は多くの研究者によって取り組まれてきた問題である。この問題は都市工学とゲーム理論の2つの側面から成り立っている。我々はゲーム理論の視点から、交通割当問題をネットワーク上の混雑ゲームとして扱う。交通割当問題は混雑ゲームにおいては経路選択ゲームと呼ばれるものである。混雑ゲームは割当問題の一つとして見なすことができる。混雑ゲームにおいて、プレイヤーは資源を選択する。それぞれの資源にはコスト関数が存在し、選ぶプレイヤーの人数によって値が変化する。本研究の目的はプレイヤーの選択における均衡点を求めることである。経路選択ゲームにおいて選択された資源は出発地から到着地への経路集合である。経路選択ゲームは計算機ネットワークにおけるデータ伝送や車の交通量制御にも利用され、ロンドンやシンガポールにお

けるロードプライシングがその一例としてあげられる [1][2]. この例において, 政府や自治体は都市中心部の渋滞を解消するために特定の区間に通行料を課している. 経路選択ゲームはこういったケースにおいて課金区間とその課金額を決定する際に有用な理論である. 経路選択ゲームはポテンシャルゲームの一つとして定式化できる [3]. ポテンシャルゲームの性質から, 利己的経路選択ゲームにおける均衡解が求められることが知られている. 利己的経路選択ゲームの標準的な定式化は Roughgarden[4] により与えられている. 利己的経路選択ゲームにおける均衡解探索手法については, 今日多くの研究が行われている [5][6]. 経路選択ゲームにおいては2つのモデルが存在する. 一つは単一 OD モデルであり, もう一つは複数 OD モデルである. 単一 OD モデルでは各プレイヤーが同じ経路集合を利用候補として持つが, 複数 OD モデルでは, 各プレイヤーの OD は異なり, 同じ経路集合を利用候補として持つことはない. 戦略空間の非対称性から, モデルは複雑なものとなる. 本研究では以下について取り組んだ.

- レプリケータダイナミクスを利用した求解手法を単一 OD 経路選択ゲームから複数 OD 経路選択ゲームへと拡張した. この拡張によって駅構内の経路網における歩行者流動制御等への利用が可能になる.
- 複数 OD 経路選択ゲームにおけるレプリケータダイナミクスを用いた求解手法の, 枝刈りによる2つの高速化手法を提案した.

本論文では, 2章で利己的経路選択ゲームと, 無秩序の代償, それについての2つの例について紹介する. 3章では本研究で利用する利己的経路選択ゲームの求解手法であるレプリケータダイナミクスと, その高速化手法について扱う. 5章ではいくつかの計算機実験結果とそれに対する考察を与える.

## 2 経路選択ゲーム

経路選択ゲーム [4] はネットワーク上においてある頂点間の経路を選択する非協力ゲームの一種である. 経路選択ゲームは, 1プレイヤーが流量を複数経路に分割してフローを形成することを許すか否かによって Nonatomic と Atomic に大別される. Nonatomic な利己的経路選択ゲームと Atomic な利己的経路選択ゲームのうち, 本稿では Nonatomic な利己的経路選択ゲームのみ取り扱う. これ以降, 本稿において経路選択ゲームと記述する場合, 特別な記述がなければ Nonatomic な利己的経路選択ゲームを指すものとする.

頂点集合  $V$ , 辺集合  $E$  からなる有向グラフ  $G = (V, E)$  上の利己的経路選択ゲーム  $\Gamma$  を定義する. プレイヤーの集合を  $N = \{1, \dots, n\}$ , グラフ  $G$  上の OD ペアの集合  $OD = \{(s_i, t_i) \in V \times V \mid i \in N, s_i \neq t_i\}$  とする. 各 OD ペア  $(s_i, t_i)$  に対して,  $s_i - t_i$  パスの集合を  $P_i \subseteq 2^E$  とする. 任意のプレイヤー  $i \in N$  は OD ペア  $(s_i, t_i)$  に対して流量  $X_i \in \mathbb{R}_+$  を流そうとする. プレイヤー  $i$  の戦略集合を  $S_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{|P_i|} \mid \sum_{p \in P_i} x_p = X_i\}$  とし, 戦略空間を  $\mathcal{S} = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ , 戦略ベクトルを  $\mathbf{s} \in \mathcal{S}$  と表す. 戦略  $\mathbf{s}$  は各経路にどのくらいの流

量を流すかを要素として持つ。また、辺  $e \in E$  のコスト関数を  $c_e: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  とする。利己的経路選択ゲームは  $\Gamma = (G, N, OD, \mathcal{S}, \mathbf{c})$  と表される。ただし  $\mathbf{c} = (c_e)_{e \in E}^T$  である。

次に、ネットワーク上のフローについて考える。プレイヤー  $i \in N$  において、パス  $p \in P_i$  の流量を  $x_p^i$  と表す。したがって、戦略  $\mathbf{s} = (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathcal{S}$  である。さらにこれを用いて、辺  $e$  の流量を

$$f_e(\mathbf{s}) = \sum_{i \in N} \sum_{p \in P_i: e \in p} x_p^i$$

と表す。以上から、パス  $p$  のフローに対して発生する単位流量あたりのコストを

$$\tilde{c}_p(\mathbf{s}) = \sum_{e \in p} c_e(f_e(\mathbf{s}))$$

と表すことができる。また、プレイヤー  $i$  の平均コストを

$$C_i(\mathbf{s}) = \frac{1}{X_i} \sum_{p \in P_i} x_p^i \tilde{c}_p(\mathbf{s})$$

とする。

均衡流とは、各プレイヤーの任意の経路  $p \in P_i$  の経路コスト  $c_p$  が等しくなる実行可能流  $\mathbf{s}$  のことである。定義は以下の通りである。

**定義 1.**  $\mathbf{s}$  が実行可能流であり、任意の  $i \in N$  に対して、 $f_p > 0$  となる任意の経路  $p, \tilde{p} \in P_i$  が以下を満たすとき、 $\mathbf{s}$  がインスタンス  $(G, N, OD, \mathcal{S}, \mathbf{c})$  の均衡流であるという。

$$c_p(\mathbf{s}) \leq c_{\tilde{p}}(\mathbf{s}).$$

ウォードロップの原理 [7] より、均衡流はプレイヤーごとにすべての経路コストが等しくなっている。また、全体で発生するコストが最も小さくなるようなフローを社会的最適解 (システム最適化配分) という [8]。また、経路選択ゲームの均衡については以下の性質が知られている。

- インスタンス  $(G, N, OD, \mathcal{S}, \mathbf{c})$  は最低でも 1 つの均衡流を持つ。
- $\mathbf{s}, \tilde{\mathbf{s}}$  をそれぞれ  $(G, N, OD, \mathcal{S}, \mathbf{c})$  の異なる均衡流であるとすると、任意の辺  $e \in E$  について  $c_e(f_e) = c_e(\tilde{f}_e)$  が成立する。

経路選択ゲーム  $\Gamma = (G, N, OD, \mathcal{S}, \mathbf{c})$  はポテンシャルゲームの性質から、ポテンシャル関数 [3] を持つ。ポテンシャル関数  $\Phi$  は以下のように表される。

$$\Phi(\mathbf{s}) = \sum_{e \in E} \int_0^{f_e(\mathbf{s})} c_e(y) dy. \quad (1)$$

以下の最適化問題を解くことで均衡解を得ることができる。

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \min_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}} \Phi(\mathbf{s}) \\ \text{s.t.} \quad \sum_{p \in P_i} x_p^i = X_i, \quad \forall i \in N \\ x_p^i \geq 0, \quad \forall i \in N, \forall p \in P_i. \end{array} \right. \quad (2)$$

最適化問題 (2) をラグランジュ緩和すると以下のように表せる。

$$(LRP) \left\{ \begin{array}{l} \min_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}} \Phi(\mathbf{s}) - \sum_{i \in N} \phi_i \left( \sum_{p \in P_i} x_p^i - X_i \right) \\ \text{s.t.} \quad x_p^i \geq 0, \quad \forall i \in N, \forall p \in P_i. \end{array} \right. \quad (3)$$

さらに、式 (3) を  $x_p^i$  について偏微分したものを考える。

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{s})}{\partial x_p^i} - \phi_i, \quad \forall i \in N. \quad (4)$$

また、各プレイヤー  $i \in N$  について以下が言える。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(\mathbf{s})}{\partial x_p^i} &= \sum_{e \in p} c_e(f_e(\mathbf{s})) \\ &= \tilde{c}_p(\mathbf{s}). \end{aligned} \quad (5)$$

式 (3) の相補性条件から、以下を得る。

$$\left( \frac{\partial \Phi(\mathbf{s})}{\partial x_p^i} - \phi_i \right) = 0, \quad \forall i \in N. \quad (6)$$

ここで、式 (3) の双対問題を考える。

$$(LRD) \left\{ \begin{array}{l} \max \quad \phi_i \\ \text{s.t.} \quad \frac{\partial \Phi(\mathbf{s})}{\partial x_p^i} - \phi_i \geq 0, \quad \forall i \in N, \forall p \in P_i. \end{array} \right. \quad (7)$$

以上から、以下の式は各プレイヤー  $i \in N$  についての均衡解において成立することが言える。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Phi(\mathbf{s}^*)}{\partial x_p^i} = \phi_i \quad (x_p^i > 0), \\ \frac{\partial \Phi(\mathbf{s}^*)}{\partial x_p^i} \geq \phi_i \quad (x_p^i = 0). \end{array} \right. \quad (8)$$

次に、均衡解  $\mathbf{s}^*$  において、各プレイヤーの平均コストを考える。  $x_p^i = 0$  のとき、  $x_p^i \tilde{c}_p(\mathbf{s}^*) = 0$  となることから平均コストは

$$\begin{aligned} C_i(\mathbf{s}^*) &= \frac{1}{X_i} \sum_{p \in P_i; x_p^i > 0} x_p^i \phi_i \\ &= \phi_i, \end{aligned} \quad (9)$$

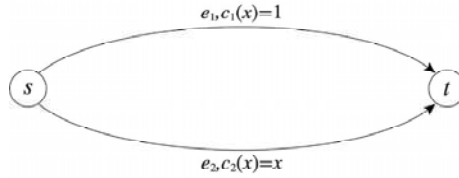


図 1: ピグーの例

となる。そのため、均衡解  $\mathbf{s}^*$  において  $x_p^i > 0$  となるような経路においては  $\tilde{c}_p(\mathbf{s}^*) = C_i(\mathbf{s}^*)$  が成立する。また、 $x_p^i = 0$  となる経路においては  $\tilde{c}_p(\mathbf{s}^*) \geq \phi_i$  が成立する。このとき、均衡解  $\mathbf{s}^*$  は定義 1 を満たす。

## 2.1 無秩序の代償

経路選択ゲームにおいて、全体コスト最小化を実現する社会的最適流と、プレイヤー  $i$  の単位流量あたりのコスト  $c_P(\forall P \in \mathcal{P}_i)$  が等しくなるような個人的最適流がそれぞれ存在する。社会的最適流は経路選択ゲームにおける最小費用多品種流と同等のものである。これ以降、本稿において最適流と記述する場合、特別な記述がなければ社会的最適流を指すものとする。

あるインスタンス  $(G, N, OD, S, c)$  において、均衡流  $\mathbf{s}^* \in S$  と最適流  $\tilde{\mathbf{s}} \in S$  を考える。インスタンス全体において発生するコストを比較すると、 $C(\mathbf{s}^*) \geq C(\tilde{\mathbf{s}})$  が常に成立する。これらのコストについて、無秩序の代償を以下のように定義する。

$$\frac{C(\mathbf{s}^*)}{C(\tilde{\mathbf{s}})}$$

経路選択ゲームにおける無秩序の代償について知られている事実として、あるインスタンスに含まれる辺コストが線形もしくは定数である時、つまり  $c_e(x) = ax + b, (a, b \geq 0)$  である時、無秩序の代償が  $\frac{5}{2}$  より大きくならないという性質が存在する [9]。

### 2.1.1 経路選択ゲームの例

経路選択ゲームにおいて均衡流と最適流を比較することが容易な例が存在する。以下ではピグーの例と、ブレーズの逆説の二つの例を紹介する。

図 1 に示したネットワークはピグーの例と呼ばれるものである。上辺は流量がいくら増えてもコストが 1 であるのに対し、下辺は流量に応じて線形に増加する。このコストで流量  $X = 1$  を  $s$  から  $t$  へ流すことを考える。

表 1: 均衡流と最適流における流量とコストの比較

	上辺 (A)	上辺コスト (B)	下辺 (C)	下辺コスト (D)	総コスト
均衡流	0	1	1	1	1
最適流	0.5	1	0.5	0.5	0.75

表 1 から、均衡流においては各辺のコストが一致していることがわかり、均衡流の定義通りであることがわかる。また、均衡流における総コスト ( $A \times B + C \times D$ ) は 1 となる。一方、最適流は各辺のコストは一致しないものの、総コストは 0.75 となる。

この例におけるポテンシャル関数を考える。  $x_1, c_1$  をそれぞれ上辺の流量とコスト、  $x_2, c_2$  をそれぞれ下辺の流量とコストとする。

$$\begin{aligned}
 \Phi(\mathbf{s}) &= \sum_{e \in E} \int_0^{x_e} c_e(y) dy \\
 &= \int_0^{x_1} c_1(y) dy + \int_0^{x_2} c_2(y) dy \\
 &= \int_0^{x_1} dy + \int_0^{x_2} y dy \\
 &= x_1 + \frac{1}{2} x_2^2.
 \end{aligned}$$

得られたポテンシャル関数を元に、この例におけるポテンシャル関数が最小となるフローを求めたい。  $x_1 + x_2 = 1$  より、  $x_1 = 1 - x_2$  であるから、これを代入し、変形すると、

$$\begin{aligned}
 x_1 + \frac{1}{2} x_2^2 &= (1 - x_2) + \frac{1}{2} x_2^2 \\
 &= \frac{1}{2} (x_2 - 1)^2 + \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

以上より、この例においてポテンシャル関数が最小となるフローは  $x_1 = 0, x_2 = 1$  の時であり、これは均衡流と一致する。したがって、この例においてポテンシャル関数の性質が成立することがわかった。

次にこの例における無秩序の代償を考える。  $C(\mathbf{s}^*) = 1, C(\bar{\mathbf{s}}) = 0.75$  であるから、以下のようになる。

$$\frac{C(\mathbf{s}^*)}{C(\bar{\mathbf{s}})} = \frac{1}{0.75} = \frac{4}{3}.$$

均衡流と最適流が一致せず、それに伴って無秩序の代償も 1 より大きくなっていることが実際の例においても確認できた。また、辺コストが線形もしくは定数であるから無秩序の代償が  $\frac{5}{2}$  より大きくなっていないことも確認できた。

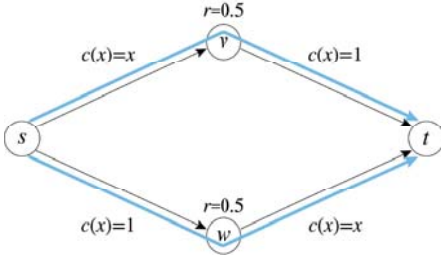


図 2: 初期ネットワーク

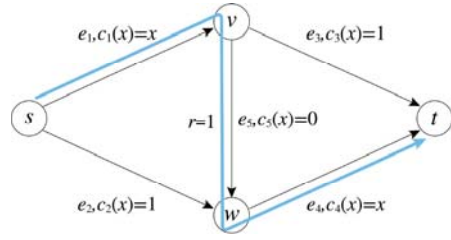


図 3: パス増加後

図 4: プレーズの逆説におけるネットワークと均衡流

表 2: 各コストの比較

	経路コスト	総コスト	最適流での総コスト
図 2 初期ネットワーク	1.5	1.5	1.5
図 3 パス増加後	2	2	1.5

次に、プレーズの逆説について紹介する。初期ネットワークと、コスト 0 の有向辺  $v \rightarrow w$  を追加したパス増加後のネットワークについて、これらのネットワークにおける均衡流と最適流を考える。各ネットワークとそれぞれの均衡流を図 4 に示す。

表 2 より、初期ネットワークにおいては均衡流と最適流が一致していることがわかる。一方、パス増加後のフローについて  $s \rightarrow v \rightarrow t, s \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow t, s \rightarrow w \rightarrow t$  の 3 つの経路全てで経路ごとのコストが 2 になり、均衡流であることがわかる。しかし、均衡流における総コストは初期ネットワークにおける総コストに比べ増加しており、パスの追加によって悪化していると言える。

この例におけるポテンシャル関数を考える。均衡流を  $s^*$ 、最適流を  $\bar{s}$  とする。

$$\begin{aligned} \Phi(s^*) &= 1.3 \\ \Phi(\bar{s}) &= 1 \end{aligned}$$

以上より、ポテンシャル関数は均衡流の場合で最適流より小さくなることがわかった。

また、無秩序の代償は初期ネットワークにおいては 1 であり、パス増加後では  $\frac{C(s^*)}{C(\bar{s})} = \frac{2}{1.5} = \frac{4}{3}$  となっている。辺コストが線形もしくは定数であるから無秩序の代償が  $\frac{5}{2}$  より大きくなっていないことも確認できた。

プレーズの逆説は、パスを増やすことで必ずしも均衡流における総コストが改善するわけではないというケースの代表的な例として用いられている。

### 3 レプリケータダイナミクス

本研究では均衡解探索にレプリケータダイナミクス [6] を利用する。レプリケータダイナミクスは微分方程式の解を求めるための進化計算手法の1つである [10][11]。

単一 OD モデルに対しては既にレプリケータダイナミクスを用いた高速化手法も与えられている [12]。レプリケータダイナミクスとは、考えられる全ての経路における流量を、定められた式によって均衡解の条件を満たすまで更新するような反復解法である。

$k+1$  回目の反復におけるプレイヤー  $i$  の経路  $p$  の流量を

$$x_p^i(k+1) = x_p^i(k) - \alpha x_p^i(k)(\tilde{c}_p(\mathbf{s}(k)) - C(\mathbf{s}(k))).$$

で更新し、全ての経路が終了条件

$$\begin{aligned} x_p^i &= 0 \\ \tilde{c}_p(\mathbf{s}^*) &= C(\mathbf{s}^*). \end{aligned}$$

のいずれかを満たすまで反復計算を行う。

#### 3.1 高速化手法 1

均衡解においては流量が0になるような経路が多く存在する。レプリケータダイナミクスによる求解では、流量0の経路についても毎回計算を行うため、計算時間が非常に大きくなる。そこで、レプリケータダイナミクスによる求解の前処理として、利用しない経路を削除することで計算時間を高速にするというのが提案手法の方針である。

この手法では各プレイヤー  $i \in N$  について、経路集合  $P_i$  のうち定数コストが削除基準コスト  $C_{cut}^i$  を上回るものを削除することで、レプリケータダイナミクスによる均衡解探索を高速化する。

このようにして求めた削除基準コストによって経路の削除を行うことが、解の完全性を損なわないことを示す。

**命題 1.** 削除基準コスト  $C_{cut}^i$  による経路削除は解の完全性を損なわない。

**証明 1.** 各辺  $e \in E$  のコスト関数は増加関数であるから、戦略ベクトル  $\hat{\mathbf{s}}^p$  により、経路  $p$  における最大コストが得られる。つまり、

$$\tilde{c}_p(\mathbf{s}) \leq \tilde{c}_p(\hat{\mathbf{s}}^p) \forall i \in N, p \in P_i, \forall \mathbf{s} \in S \quad (10)$$

が成立する。したがって、均衡解  $\mathbf{s}^*$  の性質から

$$C_{cut}^i = \tilde{c}_p(\hat{\mathbf{s}}^p) \geq \tilde{c}_p(\mathbf{s}^*) \forall i \in N, p \in P_i, \forall \mathbf{s} \in S \quad (11)$$

が成立し、削除基準コスト  $C_{cut}^i$  は必ず均衡解において利用される経路のコスト以上になり、 $C_{cut}^i$  を用いて削除される経路が均衡解において利用されることはない。

以上から、削除基準コスト  $C_{cut}^i$  を用いて経路の削除を行う手法は解の完全性を損なわないことがわかる。



### 3.2 高速化手法 2

この手法では、手法 1 に加えて、各辺の最大流量を考えることで更に経路を削除する。

このようにして求めた削除基準コストによって経路の削除を行うことが、解の完全性を損なわないことを示す。

**命題 2.** 削除基準コスト  $C_{cut}^i$  による経路削除が解の完全性を損なわない。

**証明 2.** 1 回目の経路削除によって得られた、各プレイヤー  $i \in N$  の  $P_i^{use}$  に含まれる経路にのみ流量を流す場合の戦略空間を  $S_{cut}$  とする。

$c_p^{emax}$  は、各辺  $e \in E$  を使うプレイヤーが既に決定しているため、 $\sum_{i \in N_e} X_i$  以上の流量が流れることはない。つまり、 $c_p^{emax}$  は 1 回目の経路削除後における各経路において考えられる最大コストであり、

$$c_p^{emax} \geq \tilde{c}_p(\mathbf{s}) \quad \forall i \in N, p \in P_i, \mathbf{s} \in S_{cut} \quad (12)$$

が成立する。したがって、均衡解  $\mathbf{s}^*$  においては、

$$C_{cut}^i = \min_{p \in P_i^{use}} c_p^{emax} \geq \tilde{c}_p(\mathbf{s}^*) \quad \forall i \in N, p \in P_i \quad (13)$$

が成立する。

以上から、削除基準コスト  $C_{cut}^i$  を用いて削除される経路が均衡解において利用されることはない。

したがって、この手法で経路の削除を行うことによって均衡解の完全性を損なうことはないことがわかる。

## 4 数値実験

上述のアルゴリズムを用いた複数 OD ペアを持つ経路選択ゲームにおける均衡解探索手法について検証する。本実験では、グリッドネットワーク  $G$  における均衡解探索結果に対して解析を行う。各辺  $e \in E$  のコスト関数は

$$\begin{aligned} c_e(\mathbf{s}) &= c_e^{cs} + c_e^{cgt}(\mathbf{s}), e \in E \\ c_e^{cs} &= a, 0.5 \leq a \leq 1.0 \\ c_e^{cgt} &= b \times f_e(\mathbf{s}), 0.5 \leq b \leq 1.0 \end{aligned}$$

とし、各辺の  $a, b$  は一様分布に従ってランダムに設定する。また、 $P$  を削除前の経路本数、 $P^*$  を削除後の経路本数、 $P^{use}$  を均衡解において流量が存在する経路の本数とする。

実験環境は以下の通りである; (1)CPU: 3.2 GHz Intel Core i5, (2)Memory: 16 GB 1867 MHz DDR3, and (3)OS: macOS 10.12.6. 言語は python 3.6.3 を用いた。

表 3: グリッドグラフ・平行 OD における実験結果

手法	経路削除なし	手法 1	手法 1+2
$C_{cut}$	-	12.199	12.199
$C(\mathbf{s}^*)$	-	6.634	6.634
$P$	736	734.600	734.600
$C_{cut2}$	-	-	10.380
$P^2$	-	-	695
$P_{use}$	-	31.300	31.300
Comp. time(msec)	-	615.357	545.271

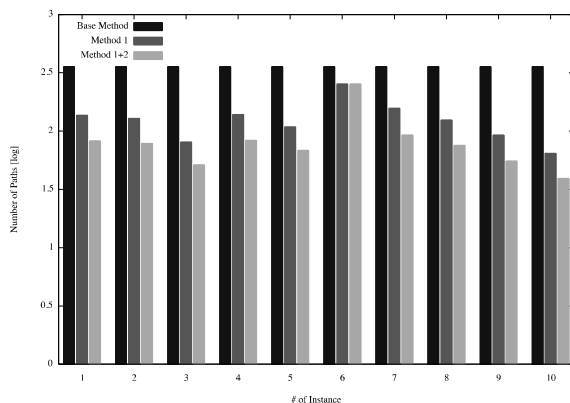


図 5: 各インスタンスにおける経路本数の変化

#### 4.1 実験 1

小規模なグリッドネットワークにおける解の検証を行う。提案手法 1 と提案手法 2 による均衡解探索の計算コスト及び得られる解を検証する。ここでは  $4 \times 4$  サイズのグリッドネットワークを用いて検証する。OD ペアの数及び OD ペアの始終点の組み合わせを変更しそれぞれ実験を行った。始終点の組み合わせは、コストを考えずにネットワーク上で最短経路が交わるもの、交わらないものの 2 種類とした OD ペアの数 2 とし、コストを考えない場合の OD 間最短経路が並行になるものと、交差するものそれぞれについて実験を行った。実験については、OD ペアが並行、交差のパターンそれぞれにおいて、手法 1 と手法 2 について同一ネットワーク上で実験した。コストを変更して 10 回の結果の平均を求め、得られた値とした。得られた結果を表 3,5 に示す。また、各インスタンスにおける経路数を図 5,6 に示す。

経路の削除本数について比較すると、OD が交差しているかどうかに関わらず削減されて

表 4: グリッドグラフ・交差 OD における実験結果

手法	経路削除なし	手法 1	手法 1+2
$C_{cut}$	-	12.199	12.199
$C(s^*)$	-	6.634	6.634
$P$	736	734.600	734.600
$C_{cut2}$	-	-	10.380
$P^2$	-	-	695
$P_{use}$	-	31.300	31.300
Comp. time(msec)	-	615.357	545.271

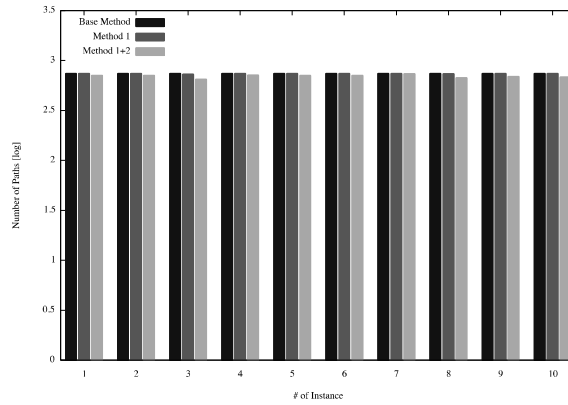


図 6: 各インスタンスにおける経路本数の変化

いる。しかし、削減された割合は並行している場合のほうが大きいことがわかる。一方で、計算時間について比較すると、大きい割合で削減できた並行している場合の方では手法 2 が手法 1 を上回ったのに対し、交差している方では経路の削除割合が比較的小さかったにも関わらず、計算時間は短くなっていることがわかる。これは、経路削除にかかる時間とレプリケータダイナミクスによる解探索時間の比によって変化するものと考えられる。つまり、経路本数が少ない場合には経路削除にかかる時間がレプリケータダイナミクスによる探索時間を上回り、結果として手法 1 の総計算時間を上回るといことが発生するということである。初期探索において得られた候補経路本数に応じて手法 1, 2 を適切に使い分ける必要があると考えられる。

均衡解から得られた結果については、利用経路本数および平均コストのどちらもほぼ等しい答えが得られた上で発生した誤差の範囲に収まっていると考えられる。

表 5: 候補経路削除結果

種類	並行		交差		
	OD数	2	4	2	4
$P$	534.650	45957.125	70893.835	290805.510	
$P^*$	390.380	45957.125	68982.980	289377.693	
$P - P^*$	144.27	0	1910.855	1427.817	
$\frac{P^*}{P}$	0.730	1	0.973	0.995	

## 4.2 実験 2

以下では、手法 2 における高速化の要である候補経路の削除本数について検証する。5×5 サイズのグリッドネットワークを用いて、上記の実験で行った設定に加えて OD ペア数が 2, 4 の場合それぞれについて実験を行った。手法 2 における差異は候補経路の削除のみであるため、この実験では均衡解そのものの探索は行わない。同一ネットワーク上でコストを変更して 100 回の結果の平均を得られた値とした。得られた結果を表 5 に示す。

5×5 グリッドネットワークにおいては平均的に見ると全く削除できない、もしくは削除割合が少ないということがわかった。削除ができていた OD が交差する方の結果を見ると、与えるコストにより削除本数が大きく変化していることがわかった。また、グラフの形状が同じであっても、コストの違いにより経路の削除結果が大きく異なることもわかった。以下では、異なる形状のグラフであった場合はこういった性質が存在するかを考える。

## 4.3 実験 3

この実験では、多くの形状のグラフをもつようにインスタンスを生成した。頂点数 40、辺密度 0.5 でランダムに生成した 10 個のグラフを用いた。コストは実験 1 と同様のものとしている。これまでの実験とは異なる特徴を持ったグラフを用いた実験となっている。この実験において各インスタンスのグラフのトポロジーは異なっている。結果を表 6 に、各インスタンスにおける経路数の変化を図 7 に示す。

表 6 から、全体として本数は減少している事がわかる。しかし、図 8 からはインスタンス間で非常に大きな差が生じている事がわかる。また、差の生じ方も手法 1 と手法 1+2 間でほぼ差のないものや経路削除なしの場合と手法 1 の間で差がないものなど複数のケースがあることがわかる。実験 1 で得られた結果と比べてインスタンスごとの差が非常に大きくなっていることから、本手法はインスタンスの性質によってその効果に大きな差があるものと考えられる。

表 6: ランダムグラフにおける実験結果

手法	経路削除なし	手法 1	手法 1+2
$C_{cut}$	-	10.815	10.815
$C(\mathbf{s}^*)$	-	6.739	6.739
$P$	3622.600	562.400	562.400
$C_{cut2}$	-	-	8.808
$P^2$	-	-	373.900
$P_{use}$	-	5.600	5.600
Comp. time(msec)	-	233.495	165.529

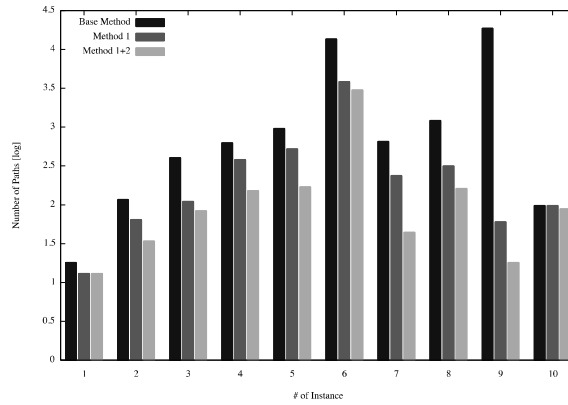


図 7: 各インスタンスにおける経路本数の変化

#### 4.4 実験 4

最後に, JPN25(Japan Photonic Network) モデル [13] を用いて実験を行った. JPN25 は日本のバックボーンネットワークを模した 25 個の頂点からなるグラフである. この実験でもこれまでの実験と同様に, 辺のコストを変えた 10 個のインスタンスを作成し実験を行った. この実験では実際のネットワークにおいて提案手法がどのように影響するかを確認した. 実験の結果を 7 に, 各インスタンスにおける経路数の変化を 8 に示す.

表 7 から, 他の実験に比べて各手法適用時の削減経路本数が非常に大きくなっていることがわかる. 今回取り扱った JPN25 はこれまでの実験で扱ったインスタンスに比べて辺密度が低く, 日本の都市をモデル化したものであるため手法適用時に頂点間の経路が絞られやすいということが原因であると考えられる.

表 7: JPN25 における実験結果

手法	経路削除なし	手法 1	手法 1+2
$C_{cut}$	-	7.050	7.050
$C(s^*)$	-	4.242	4.242
$P$	12076.400	6003.500	6003.500
$C_{cut2}$	-	-	5.607
$P^2$	-	-	1084.700
$P^{use}$	-	31.300	31.300
Comp. time(msec)	-	3672.217	382.704

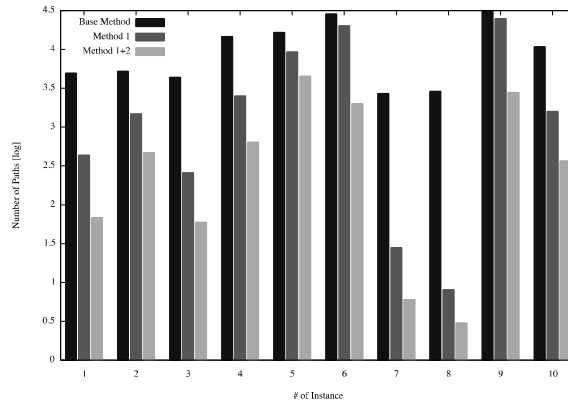


図 8: 各インスタンスにおける経路本数の変化

## 5 まとめ

この実験では一般的な利己的経路選択ゲームに対するレプリケータダイナミクスを用いた求解の高速化手法を提案した。高速化の効果は確認されたが、効果の大きさは問題によることがわかった。さらに、問題によって2つの手法のどちらが高速に求解可能であるかが異なることもわかった。こういった場合において効果が異なるのかはさらなる実験によって求められると考えられる。

また、既存手法によって均衡解を求めることが困難であったようなモデルについてもレプリケータダイナミクスを用いた手法によって求解可能であるかの検討も行いたい。

加えて、凸性が利己的経路選択ゲームや交通割当問題において重要であることが知られている [14][15]。交通割当問題において、均衡解の求解には一般的に Frank-Wolfe 法 [16] が利用される。本手法においても凸性は必要である。コスト関数においては単調増加であることが求められる。本稿ではコスト関数として線形関数を用いたが、本手法は一般的な凸関数に

おいても適用可能なものである。これは、今後の展望として最も興味のある点の一つである。

## 6 謝辞

本研究を遂行するにあたり、科研費 (B)15H02972 および (C)26330025 の補助を受けている。

## 参考文献

- [1] J. Leape: The London Congestion Charge. *Journal of Economic Perspectives*, **20**(4), (2006)157–176.
- [2] K.A. Small, E.T. Verhoef, and R. Lindsey: *The economics of ueban transportation*. Routledge in Tayler & Francis, (2007).
- [3] D. Monderer and L.S. Shapley: Potential Games. *GAMES AND ECONOMIC BEHAVIOR*, **14**, (1996)124-143.
- [4] T. Roughgarden: Routing Games, *Algorithmic Game Theory*, Noan Nisan, Tim Roughgarden, Eva Tardos, Cijay V. Vazirani,CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, (2007)461-484.
- [5] K. Yoshida, T. Okamoto and S. Koakutsu: Equilibrium Solution Search on a Selfish Routing Problem with Multiple Constraints using the Variable Metric Gradient Projection Method. *2015 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*, (2015)3023–3029.
- [6] S. Fischer and B. Vocking: On the Evolution of Selfish Routing. *Algorithms - ESA 2004*,(2004)323–334.
- [7] M.J. Smith: The existence, uniqueness and stability of traffic equilibria. *Transportation Research Part B: Methodological*, **13**(4), (1979)295–304.
- [8] A.K. Ziliaskopoulos: A Liner Programming Model for the Single Destination System Optimum Dynamic Traffic Assignment Problem. *Presentation preprint, Transportation Research Boarai, Washington, D. C.*, (1997).
- [9] S. Suri, C.D. Toth, and Y. Zhou: Selfish Load Balancing and Atomic Congestion Games. *Algorithmica*,**47**(1), (2007)79–96.
- [10] R. Cressman and Y. Tao: The replicator equation and other game dynamics. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **111**, (2014)10810–10817.

- [11] P. Schuster and K. Sigmund: Replicator dynamics. *Journal of Theoretical Biology*, **100**(3), (1983)533–538.
- [12] K. Yoshida, T. Okamoto and S. Koakutsu: An Efficiency Improvement of the Equilibrium Solution Search on the Selfish Routing Game by Removing Redundant Paths. *SICE Journal of Control, Measurement, and System Integration*, **9**, (2016)234–241.
- [13] JPN network. IEICE: PN Homepage,<https://www.ieice.org/cs/pn/jpn/jpnm.html>
- [14] A. Taguchi: TIME DEPENDENT TRAFFIC ASSIGNMENT MODEL FOR COMMUTER TRAFFIC IN TOKYO METROPOLITAN RAILWAY NETWORK. *Transactions of the Operations Research Society of Japan*, **48**, (2005)85–108.
- [15] T. Larsson and M. Patriksson: Simplicial Decomposition with Disaggregated Representation for the Traffic Assignment Problem. *Transportation Science*, **26**(1), (1992)4–17.
- [16] M. Jaggi: Revisiting Frank-Wolfe: Projection-Free Sparse Convex Optimization. *Proceedings of the 30th International Conference on Machine Learning, PMLR*, **28**(1), (2013)427–435.