Higson コンパクト化と Wallman 型コンパクト化 (Higson compactifications and Wallman-type compactifications)

Yasser F. Ortiz-Castillo
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo

Artur Hideyuki Tomita
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo

愛媛大学大学院理工学研究科 山内貴光
Takamitsu Yamauchi
Graduate School of Science and Engineering, Ehime University

Higson コンパクト化は, 非コンパクトな完備リーマン多様体に対する指数定理の研究において Higson によって導入されたコンパクト化であり ([10, Chapter 5]), 粗幾何学 (coarse geometry) における基本概念の 1 つである ([11, Section 2.3]). 一方, Wallman コンパクト化 (または, Wallman-Frink コンパクト化, Wallman-Shanin コンパクト化) は, Wallman 基と呼ばれる閉集合基を用いて定義されるコンパクト化である ([14], [12], [6]). この 2 つのコンパクト化に関して, Álvarez López and Candel [1, p.1692] は次の問題を提起した.

問題 1 (Álvarez López and Candel [1])**.** 任意の Higson コンパクト化は, Wallman 型コンパクト化であるか?

本稿では, 問題 1 について解説するとともに, 問題 1 が肯定的であるための十分条件を報告する.

以下, $\mathbb{N}$ は正の整数全体のなす集合を, $\mathbb{Z}$ は整数全体のなす集合を, $\mathbb{R}$ は通常の距離をもつ実数直線を表し, $a, b \in \mathbb{R}$ に対して

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}, \quad [a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$$

とする. 距離空間 (X, d) と $x \in X$ と $R > 0$ に対して x を中心とする R-開球を $B(x, R)$ で表し, $E \subset X$ と $R > 0$ に対して $B(E, R) = \bigcup_{x \in E} B(x, R)$ とする. 本稿を通じて, 空間は空でない完全正則かつ Hausdorff な位相空間を表す. また, 空間 X の位相濃度 (weight) は, X の開基の濃度の最小値を意味する.

1. Higson コンパクト化

論文 [7, Section 1] に従って Higson コンパクト化の定義を振り返る (Gelfand-Naimark の定理を用いた同値な定義については [10, Section 5.1], [11, Section 2.3] を参照). Higson コンパクト化は, 固有な距離空間に対して定義される. ここで, 距離空間 (X, d) が**固有** (**proper**) であるとは, X の任意の有界閉集合がコンパクトであるときをいう. 以降, 固有な距離空間はすべて非有界であるとする.

定義 2. 固有な距離空間 (X, d) 上の有界な連続関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が **Higson 関数**であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ と任意の $R > 0$ に対して有界集合 $B \subset X$ が存在し, $x_1, x_2 \in X \setminus B$ かつ $d(x_1, x_2) \leq R$ ならば $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon$ であるときをいう.

例 3. (1) 任意の定値関数は Higson 関数である.
(2) 固有な距離空間 X 上の任意の C_0 関数, すなわち, 次を満たす関数は Higson 関数である: 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, あるコンパクト集合 $K \subset X$ が存在して, 任意 $x \in X \setminus K$ に対して $|f(x)| \leq \varepsilon$ である.
(3) 関数 $f : [0, \infty) \to \mathbb{R};\ x \mapsto \sin x$ は Higson 関数でない.
(4) 関数 $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}; x \mapsto \sin \sqrt{x}$ は Higson 関数である.

定義 4. 固有な距離空間 X の Higson 関数全体のなす集合を $C_h(X)$ で表す. 各 $f \in C_h(X)$ に対して,

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}, \quad I_f = [-\|f\|, \|f\|]$$

と表す. 集合 $C_h(X)$ は X の点と閉集合を分離するので, 写像

$$e_X : X \to \prod_{f \in C_h(X)} I_f;\ x \mapsto (f(x))_{f \in C_h(X)}$$

は (位相的な) 埋め込み写像である. 従って, 値域 $e_X(X)$ の $\prod_{f \in C_h(X)} I_f$ における閉包は, X のコンパクト化を与える. このコンパクト化を X の **Higson コンパクト化**といい, hX で表す. 各点 $x \in X$ を $e_X(x) \in hX$ と同一視することにより, X を hX の部分集合とみなす.

注意 5. 固有な距離空間 X の Higson コンパクト化 hX は, 次を満たすコンパクト化として特徴づけられる: 任意の有界な連続関数 $f : X \to \mathbb{R}$ に対して, f が Higson 関数であるための必要十分条件は, f が hX 上の連続関数に拡張できることである ([7, Proposition 1] 参照).

注意 6. 固有な距離空間 X の Higson コンパクト化 hX の位相濃度は連続体濃度 $2^{\aleph_0}$ である. 実際, X は固有なので可分である. よって hX も可分なので, hX の位相濃度は $2^{\aleph_0}$ 以下である ([5, Theorem 1.5.7] 参照). 一方, hX は可算離散空間 $\mathbb{N}$ の Čech-Stone コンパクト化 $\beta\mathbb{N}$ と同相な部分空間をもつので, hX の位相濃度は $2^{\aleph_0}$ 以上である ([5, Corollary 3.6.12] 参照).

特に, hX は距離化可能でない.

注意 7. 固有な距離空間 X の Higson コンパクト化 hX の剰余 $hX \setminus X$ は, X の **Higson コロナ**と呼ばれる. X は局所コンパクトなので, X は hX の開集合である. 従って, X の Higson コロナはコンパクトである.

Higson コロナは粗同値で不変な位相空間である. ここで, 粗同値とは, 粗幾何学において 2 つの距離空間を同じとみなす概念で, 次で定義される.

定義 8 ([8, Definition 1.4.4] 参照)**.** 2 つの距離空間 (X, d_X) と (Y, d_Y) が**粗同値** (**coarsely equivalent**) であるとは, 次を満たす (連続とは限らない) 写像 $f : X \to Y$ が存在するときをいう:

(1) 次を満たす単調非減少な関数 $\rho_-, \rho_+ : [0,\infty) \to [0,\infty)$ が存在する:
  (i) $\lim_{t\to\infty} \rho_-(t) = \infty$,
  (ii) 任意の $x, x' \in X$ に対して

$$\rho_-(d_X(x,x')) \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq \rho_+(d_X(x,x')).$$

(2) $B(f(X), S) = Y$ を満たす $S > 0$ が存在する.

例 9. (1) 任意の有界な距離空間は, 1 点からなる距離空間と粗同値である.
(2) ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ は, 整数座標をもつ点全体のなす部分距離空間 $\mathbb{Z}^n$ と粗同値である.
(3) 実数直線 $\mathbb{R}$ における 2 つの部分距離空間 $\mathbb{Z}$ と $\{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ は, 粗同値でない.
(4) 有限生成群 G の 2 つの対称な生成系 Σ, Σ' に対して定義される語長距離 (word length metric) を d_Σ, $d_{\Sigma'}$ で表すとき, 2 つの距離空間 (G, d_Σ) と $(G, d_{\Sigma'})$ は粗同値である ([8, Theorem 1.3.12] 参照). より一般に, 任意の可算群は左不変で一様離散かつ固有な距離をもち, そのような距離は粗同値を除いて一意的である ([8, Proposition 1.2.2 and Example 1.4.7] 参照).

注意 10. 2 つの距離空間 X と Y が粗同値であれば, それらの Higson コロナ $hX \setminus X$ と $hY \setminus Y$ は同相である ([11, Corollary 2.42]). この意味で, Higson コロナは粗同値で不変な位相空間である.

2. Wallman 型コンパクト化

定義 11. 空間 X の部分集合族 $\mathcal{L}$ が次の 5 つの条件を満たすとき, $\mathcal{L}$ を X の **Wallman 基**という:

(i) $A, B \in \mathcal{L}$ ならば, $A \cup B \in \mathcal{L}$ かつ $A \cap B \in \mathcal{L}$ である.
(ii) $\varnothing, X \in \mathcal{L}$ である.
(iii) $\mathcal{L}$ は X の閉集合基である, すなわち, $\mathcal{L}$ は X の閉集合族であって, 任意の X の閉集合 F と任意の $x \in X \setminus F$ に対し, $F \subset A \not\ni x$ を満たす $A \in \mathcal{L}$ が存在する.

(iv) 任意の $A \in \mathcal{L}$ と任意の $x \in X \setminus A$ に対し, $x \in B$ かつ $A \cap B = \varnothing$ を満たす $B \in \mathcal{L}$ が存在する.

(v) $A, B \in \mathcal{L}$ かつ $A \cap B = \varnothing$ ならば, $C, D \in \mathcal{L}$ が存在して $A \cap C = \varnothing = B \cap D$ かつ $C \cup D = X$ を満たす.

$\mathcal{L}$ を空間 X の Wallman 基とする. X の部分集合族 p が **$\mathcal{L}$-フィルター**であるとは, 次の条件を満たすときをいう:

(1) $p \subset \mathcal{L}$.
(2) $A, B \in p$ ならば, $A \cap B \in p$.
(3) $A \in p$ かつ $A \subset B \in \mathcal{L}$ ならば, $B \in p$.

さらに, $\mathcal{L}$-フィルター p が包含関係で極大なとき, p を **$\mathcal{L}$-超フィルター**という. X の $\mathcal{L}$-超フィルター全体を $w_{\mathcal{L}}X$ で表す. また, $A \in \mathcal{L}$ と $x \in X$ に対して

$$S(A) = \{p \in w_{\mathcal{L}}X : A \in p\}, \quad p_x = \{B \in \mathcal{L} : x \in B\}$$

とおく. このとき, 次が成り立つ ([9, Section 4.4] 参照):

(1) 集合族 $\{S(A) : A \in \mathcal{L}\}$ は集合 $w_{\mathcal{L}}X$ の (ある位相の) 閉集合基である. 以下, $w_{\mathcal{L}}X$ はこの閉集合基で生成される位相をもつとする.
(2) 空間 $w_{\mathcal{L}}X$ はコンパクトである.
(3) 写像 $e_X : X \to w_{\mathcal{L}}X;\ x \mapsto p_x$ は (位相的な) 埋め込み写像で, 値域 $e_X(X)$ は $w_{\mathcal{L}}X$ で稠密である

この $w_{\mathcal{L}}X$ を, Wallman 基 $\mathcal{L}$ に関する X の **Wallman コンパクト化**という. 各点 $x \in X$ を $e_X(x) \in w_{\mathcal{L}}X$ と同一視することにより, X を $w_{\mathcal{L}}X$ の部分集合とみなす. 空間 X の 2 つのコンパクト化 c_1X と c_2X が**同値 (equivalent)** であるとは, 同相写像 $f : c_1X \to c_2X$ が存在して $f\restriction_X = \mathrm{id}_X$ を満たすときをいう. 空間 X のコンパクト化 γX が, X のある Wallman 基に関する Wallman コンパクト化と同値であるとき, そのコンパクト化 γX を **Wallman 型**コンパクト化という.

例 12. (1) 任意の空間 X の Čech-Stone コンパクト化は Wallman 型である. 実際, X の零集合全体のなす集合族が対応する Wallman 基である. ここで, $Z \subset X$ が X の**零集合 (zero-set)** であるとは, X 上のある実数値連続関数 $f : X \to \mathbb{R}$ を用いて $Z = f^{-1}(\{0\})$ と表されるときをいう.

(2) 任意の局所コンパクト空間 X の一点コンパクト化は Wallman 型である. 実際, 集合族 $\{K, \mathrm{cl}_X(X \setminus K) : K$ は X のコンパクト部分集合 $\}$ が対応する Wallman 基である. ここで, $\mathrm{cl}_X(X \setminus K)$ は $X \setminus K$ の X における閉包を表す.

最小の非可算基数を $\aleph_1$ で表し, $\aleph_1$ の次に大きい非可算基数を $\aleph_2$ で表す. 次が知られている:

定理 13 (Bandt [2])**.** 空間 X のコンパクト化 γX の位相濃度が $\aleph_1$ 以下であるとき, γX は Wallman 型である. 特に, 距離化可能なコンパクト化は Wallman 型で

ある．また, 連続体仮説の下では, 任意の可分空間のコンパクト化は Wallman 型である．

定理 14 (Ul'janov [13])**.** 基数 τ が $2^\tau \geq \aleph_2$ を満たすとする．このとき, 次を満たす空間 X とそのコンパクト化 γX が存在する．

(1) X の濃度は τ である．
(2) γX の位相濃度は 2^τ である．
(3) γX は Wallman 型でない．

固有な距離空間は可分である．よって, 定理 13 より, 連続体仮説の下で問題 1 は肯定的である．次節では, ZFC の下で Higson コンパクト化が Wallman 型であるための固有な距離空間に対する十分条件を報告する．

3. Higson コンパクト化が Wallman 型であるための十分条件

距離空間 (X, d) と $A, B \subset X$ に対して,

$$\operatorname{diam} A = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\},$$
$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

とおく．ここで, $\sup \varnothing = 0$, $\inf \varnothing = \infty$ とし, A が非有界のときは $\sup A = \infty$ と表す．X の部分集合族 $\mathcal{F}$ に対し

$$\operatorname{mesh} \mathcal{F} = \sup\{\operatorname{diam} F : F \in \mathcal{F}\}$$

とする．部分集合族 $\mathcal{F}$ の $\operatorname{mesh} \mathcal{F}$ が有限であるとき, $\mathcal{F}$ は**一様有界** (**uniformly bounded**) であるという．

距離空間 X の部分集合族 $\mathcal{F}$ が**有界有限** (**boundedly finite**) であることを, 任意の X の有界集合 B に対して $\{F \in \mathcal{F} : B \cap F \neq \varnothing\}$ が有限であるとして定める．距離空間における有界有限な部分集合族は局所有限である．また, 固有な距離空間における局所有限な部分集合族は有界有限である．

定義 15. 正数 R に対して, 距離空間 (X, d) の部分集合族 $\mathcal{F}$ が次を満たすとき, $\mathcal{F}$ は **HW(**R**)** を満たすという:

$$\forall \mathcal{F}' \subset \mathcal{F} \, (\bigcap \mathcal{F}' = \varnothing \Longrightarrow \exists F, F' \in \mathcal{F}' \, (d(F, F') \geq R)).$$

距離空間 X が **(HW)** を満たすとは, 任意の $R > 0$ に対して, HW(R) を満たし有界有限で一様有界な X の被覆が存在するときをいう．

条件 (HW) は粗同値に関して不変である．すなわち, 次が成り立つ．

命題 16. 2 つの距離空間 X と Y が粗同値であり, X が (HW) を満たすとする．このとき Y も (HW) を満たす．

証明. 定義 8 の条件を満たす写像 $f : X \to Y$, $\rho_-, \rho_+ : [0,\infty) \to [0,\infty)$ と定数 $S > 0$ をとる. Y が (HW) を満たすことを示すため, $R > 0$ を任意にとる. $\rho_-(r) > R + 2S$ を満たす $r > 0$ をとり, $\mathrm{HW}(r)$ を満たし有界有限で一様有界な X の被覆 $\mathcal{F}_X$ をとって $\mathcal{F}_Y = \{B(f(F), S) : F \in \mathcal{F}_X\}$ とおく. このとき $\mathcal{F}_Y$ は $\mathrm{HW}(R)$ を満たし有界有限で一様有界な Y の被覆である. □

次が本稿の主結果である.

定理 17. (HW) を満たす任意の固有な距離空間の Higson コンパクト化は, Wallman 型である.

証明の概略. (X, d) を (HW) を満たす固有な距離空間とする. 非負整数全体のなす集合を ω で表す.

まず, X の部分集合族の列 $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in\omega}$ と狭義単調増加な関数 $s : \omega \to \omega$ を, 各 $i \in \omega$ に対して次の 4 条件を満たすようにとる:

(1) $\mathcal{F}_i$ は有界有限で一様有界な X の閉被覆である.
(2) $i \geq 1$ かつ $F \in \mathcal{F}_i$ ならば, $F = \bigcup\{F' \in \mathcal{F}_{i-1} : F' \subset F\}$ である.
(3) $\operatorname{mesh} \mathcal{F}_i < s(i)$ である
(4) $\mathcal{F}_i$ は $\mathrm{HW}(i)$ を満たす.

各 $i \in \omega$ に対し,

$$\mathcal{F}_i' = \{F_1 \cap \cdots \cap F_n : F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}_i,\ n \in \mathbb{N}\}$$

とおく. $K_0 \in \mathcal{F}_0' \setminus \{\varnothing\}$ をとり固定し, 帰納的に

$$K_{n+1} = \bigcup\{F \in \mathcal{F}_{n+1}' : B(K_n, s(n+1)) \cap F \neq \varnothing\}, \quad n \in \omega$$

で定める. 各 $n \in \omega$ と $i \leq n$ に対して

$$\mathcal{F}_i^n = \{F \in \mathcal{F}_i' : F \subset K_n\}$$

とおく. 関数 $f : \omega \to \omega$ で $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$ を満たすもの全体のなす集合を $\omega^{\uparrow\omega}$ で表し,

$$\Phi = \{f \in \omega^{\uparrow\omega} : \forall n \in \omega\, (f(n) \leq \min\{n, f(n+1)\})\}$$

とおく. 各 $f \in \Phi$ に対して

$$\mathcal{S}_f = \left\{ \bigcup_{n\in\omega} \bigcup \mathcal{J}_n : (\mathcal{J}_n) \in \prod_{n\in\omega} \mathcal{P}(\mathcal{F}_{f(n)}^n) \right\}$$

(ただし, $\mathcal{P}(\mathcal{F}_{f(n)}^n)$ は $\mathcal{F}_{f(n)}^n$ のべき集合を表す) と定め,

$$\mathcal{L} = \left\{ C \cup S : C \text{ は } X \text{ のコンパクト部分集合}, S \in \bigcup_{f\in\Phi} \mathcal{S}_f \right\}$$

とおく. このとき $\mathcal{L}$ が X の Wallman 基であり, $\mathcal{L}$ に関する X の Wallman コンパクト化が X の Higson コンパクト化と同値であることが確かめられる. □

4. Higson コンパクト化が Wallman 型である固有な距離空間の例

例 18. 実数直線 $\mathbb{R}$ は (HW) を満たす. 実際, 任意の $R>0$ に対して

$$\{[jR,(j+1)R] : j\in\mathbb{Z}\}$$

が HW(R) を満たし有界有限で一様有界な $\mathbb{R}$ の被覆である. よって, $h\mathbb{R}$ は Wallman 型である.

条件 (HW) は有限積をとる操作で閉じる. ただし, 2 つの距離空間 (X,d_X) と (Y,d_Y) の直積 $X\times Y$ は ℓ_2-距離をもつとする. すなわち, 各 $(x,y),(x',y')\in X\times Y$ に対して

$$d_2((x,y),(x',y'))=\sqrt{d_X(x,x')^2+d_Y(y,y')^2},$$

で定義される距離 d_2 をもつとする.

命題 19. 距離空間 X と Y が共に (HW) を満たすとする. このとき $X\times Y$ も (HW) を満たす.

証明. 正数 $R>0$ を任意にとり, X と Y のそれぞれに対して, HW(R) を満たし有界有限で一様有界な被覆 $\mathcal{F}_X$ と $\mathcal{F}_Y$ をとる. このとき, 集合族

$$\{F_X\times F_Y : F_X\in\mathcal{F}_X, F_Y\in\mathcal{F}_Y\}$$

は HW(R) を満たし有界有限で一様有界な $X\times Y$ の被覆である. □

例 18 と命題 19 より次を得る.

系 20. 任意のユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ は (HW) を満たす. 特に, $h\mathbb{R}^n$ は Wallman 型である.

粗幾何学における次元概念として, Gromov による漸近次元 (asymptotic dimension) がよく知られている ([3], [4], [8, Chapter 2], [11, Chapter 9] を参照). 距離空間 (X,d) の**漸近次元**が n 以下であるとは, 任意の $r>0$ に対して次の 3 条件を満たす $n+1$ 個の X の部分集合族 $\mathcal{U}_0,\dots,\mathcal{U}_n$ が存在するときをいう:

(1) $\bigcup_{i=0}^n \mathcal{U}_i$ は X を被覆する.
(2) 各 $\mathcal{U}_i$ は一様有界である.
(3) 各 $\mathcal{U}_i$ は r-disjoint である. すなわち, 各 $U,U'\in\mathcal{U}_i$ に対し, $U\neq U'$ ならば $d(U,U')\geq r$ である.

命題 21. 漸近次元 1 以下の固有な距離空間は (HW) を満たす.

証明の概略. X を漸近次元 1 以下の固有な距離空間とする. X が (HW) を満たすことを示すため, 任意に $R > 0$ をとる. このとき, 一様有界で $3R$-disjoint な X の部分集合族 $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1$ であって, $\mathcal{U}_0 \cup \mathcal{U}_1$ が X を被覆するものがとれる.

各 $U \in \mathcal{U}_0$ に対し, V_U を次で定める: $d(U', U) < R$ を満たす各 $U' \in \mathcal{U}_1$ について $d(x_{U'}, U) < R$ を満たす $x_{U'} \in U'$ をとり,

$$V_U = U \cup \{x_{U'} : U' \in \mathcal{U}_1,\ d(U', U) < R\}$$

とおく.

$\mathcal{V}_0 = \{V_U : U \in \mathcal{U}_0\}$ とおき, $\mathcal{F} = \mathcal{V}_0 \cup \mathcal{U}_1$ とする. このとき $\mathcal{F}$ は $\mathrm{HW}(R)$ を満たし有界有限で一様有界な X の被覆である. □

例 22. T を各頂点が有限次数 (finite degree) をもつ木 (tree) とする. すなわち, T はサイクルをもたない連結グラフであって, 各頂点からでる辺の本数は高々有限であるとする. また, T の各辺の長さは 1 であるとし, 2 点 $x, y \in T$ の距離 $d(x, y)$ は x と y を結ぶ最短の道 (path) の長さで定義されているとする. このとき T は固有な距離空間であり, T の漸近次元は 1 以下である ([11, Proposition 9.8] 参照). よって命題 21 より T は (HW) を満たす. 特に hT は Wallman 型である.

漸近次元がある整数以下である距離空間は**漸近次元が有限**であるといい, そうでない距離空間は**漸近次元が無限**であるという.

例 23. 整数のなす加法群 $\mathbb{Z}$ の可算直和 $\bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathbb{Z}$ は, $\mathbb{Z}$ の可算直積 $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ の部分集合

$$\left\{ (x_k) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} : \{k \in \mathbb{N} : x_k \neq 0\} \text{ は有限 } \right\}$$

として定義される. ここで, $\bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathbb{Z}$ は次で定まる固有な距離 d をもつとする.

$$d((x_k), (y_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} k|x_k - y_k|, \quad (x_k), (y_k) \in \bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathbb{Z}.$$

このとき $\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}$ の漸近次元は無限である ([8, Example 2.6.1] 参照). 一方, $\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}$ は (HW) を満たす. 実際, 任意の $R > 0$ に対して $\mathcal{I} = \{[jR, (j+1)R] \cap \mathbb{Z} : j \in \mathbb{Z}\}$ とおき, $i_R > R$ を満たす $i_R \in \mathbb{N}$ をとって

$$\mathcal{F} = \left\{ \prod_{k=1}^{i_R} I_k \times \prod_{k=i_R+1}^{\infty} \{n_k\} : I_1, \ldots, I_{i_R} \in \mathcal{I}, (n_k) \in \bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathbb{Z} \right\}$$

とおけば, $\mathcal{F}$ は $\mathrm{HW}(R)$ を満たし有界有限で一様有界な $\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}$ の被覆である.

5. 問題

次の問題が肯定的であれば, 定理 17 より問題 1 も肯定的である.

問題 24. 任意の固有な距離空間は (HW) を満たすか?

以下の問題についても分かっていない.

問題 25. 固有な距離空間 X の Higson コンパクト化が Wallman 型であるとき, X は (HW) を満たすか?

命題 19 と命題 21 に関連して, 以下の問題も考えられる.

問題 26. (HW) を満たす距離空間の部分距離空間は (HW) を満たすか?

問題 27. 距離空間 X の 2 つの部分距離空間 A, B が共に (HW) を満たし $A \cup B = X$ であるとき, X は (HW) を満たすか?

問題 28. 漸近次元が有限な距離空間は (HW) を満たすか?

References

[1] J. A. Álvarez López and A. Candel, *Algebraic characterization of quasi-isometric spaces via the Higson compactification*, Topology Appl. **158** (2011), 1679–1694.

[2] C. Bandt, *On Wallman-Shanin-compactifications*, Math. Nachr. **77** (1977), 333–351.

[3] G. Bell and A. Dranishnikov, *Asymptotic dimension*, Topology Appl. **155** (2008), 1265–1296.

[4] G. Bell and A. Dranishnikov, *Asymptotic dimension in Będlewo*, Topology Proc. **38** (2011), 209–236.

[5] R. Engelking, *General topology*, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[6] O. Frink, *Compactifications and semi-normal spaces*, Amer. J. Math. **86** (1964), 602–607.

[7] J. Keesling, *The one-dimensional Čech cohomology of the Higson compactification and its corona*, Topology Proc. **19** (1994), 129–148.

[8] P. Nowak and G. Yu, *Large scale geometry*, European Mathematical Society, Zürich, 2012.

[9] J. R. Porter and R. G. Woods, *Extensions and absolutes of Hausdorff spaces*, Springer-Verlag, New York, 1988.

[10] J. Roe, *Coarse cohomology and index theory on complete Riemannian manifolds*, Mem. Amer. Math. Soc. **104**, no. 497, 1993.

[11] J. Roe, *Lectures on Coarse Geometry*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[12] N. A. Shanin, *On the theory of bicompact extensions of topological spaces*, C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.) **38** (1943), 154–156.

[13] V. M. Ul'janov, *Solution of the fundamental problem of bicompact extensions of Wallman type*, (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR **233** (1977), 1056–1059; translation in: Soviet Math. Dokl. **18** (1977), 567–571.

[14] H. Wallman, *Lattices and topological spaces*, Ann. of Math. (2) **39** (1938), no. 1, 112–126.