数理解析研究所講究録 第2110巻 2019年 17-20

自然数の積空間におけるC^*-埋込された離散部分集合の濃度の決定不可能性

神奈川大学 工学部
平田 康史 (Yasushi Hirata)　矢島 幸信 (Yukinobu Yajima)
Faculty of Engineering, Kanagawa University

1 はじめに

ここでは，すべての位相空間はT_1であり，すべての濃度κやτは無限とする。

空間Xに対して，その部分集合AがXにおいてC^*-埋込される（C-埋込される）とは，Aから閉区間$[0,1]$(実数全体$\mathbb{R}$)への任意の連続関数が，連続的にX全体に拡張できるとき。

次の古典的な定理はよく知られている。

定理 1.1 (Tieze-Urysohn の拡張定理, 1925). 空間X対して，次は同値である。

(a) Xは正規である。

(b) Xの任意の閉集合は，XにおいてC^*-埋込できる。

(c) Xの任意の閉集合は，XにおいてC-埋込できる。

自然数全体の集合$\mathbb{N} = \{1, 2, \cdots\}$に離散位相を導入して，$\mathbb{N}$を無限可算離散空間とみなす。$\mathbb{N}^\kappa$は$\mathbb{N}$の$\kappa$個のコピーによる積空間を表す。

また古典的な結果として，次を思い出す。

定理 1.2 (Stone, 1948). $\mathbb{N}^{\omega_1}$は正規でない。

定理 1.1 と 1.2 により，次の問題が自然に生じる。

問題 1. $\mathbb{N}^{\omega_1}$においてC^*-埋込された閉集合は，$\mathbb{N}^{\omega_1}$においてC-埋込されるか？

この問題に対して，2014 年に次の否定的結果が得られていた。これは連続体仮説のもとで，問題 1 が否定されることを意味する。

定理 1.3 (E. Pol-R. Pol [3]). $\mathbb{N}^{\mathfrak{c}}$ において C^*-埋込されるが C-埋込されない可算離散閉集合が存在する。

ところがつい最近，我々[2] は次の結果を証明した。

定理 1.4. マーチンの公理と連続体仮説の否定のもとで，$\mathbb{N}^{\omega_1}$ における任意の C^*-埋込された部分集合は，$\mathbb{N}^{\omega_1}$ において C-埋込される。

これら 2 つの結果は，問題 1 の解答として次の全く予想外の結果を生じる。

系 1.5. $\mathbb{N}^{\omega_1}$ において C^*-埋込された（閉）集合が，$\mathbb{N}^{\omega_1}$ において C-埋込されるかどうかは，ZFC の公理系の中では決定できない。

そうすると上記の定理 1.3 のあたりに，もう一つ別の予想外の結果があるのではないかと考えたくなる。そこで思い出すのが，1990 年と比較的古い次の結果である。

定理 1.6 (Baturov [1]). 濃度 τ に対して，$2^{\tau} \leqq \mathfrak{c}$ が成り立つための必要十分条件は，$\mathbb{N}^{\mathfrak{c}}$ において濃度 τ の離散閉集合を含む稠密な正規部分空間が存在することである。

マーチンの公理と連続体仮説の否定のもとでは，$2^{\omega_1} = \mathfrak{c}$ が成り立つこと及び正規性が C^*-埋込で特性化できることに着目して，定理 1.3 と 1.6 から次の問題が自然に生じてくる。

問題 2. $\mathbb{N}^{\mathfrak{c}}$ において C^*-埋込された非可算な離散部分集合は存在するか？

2 問題 2 の解答

問題 2 に関して，我々は次の結果を主定理として証明した。

定理 2.3. 濃度 κ が $\kappa^{\omega} = \kappa$ であるとする。このとき，任意の（Ulam 非可測）濃度 τ に対して，次は同値である。

(a) 不等式 $2^{\tau} \leqq \kappa$ が成り立つ。

(b) $\mathbb{N}^{\kappa}$ において C^*-埋込された濃度 τ の離散部分集合が存在する。

(c) $\mathbb{N}^{\kappa}$ において C-埋込された濃度 τ の離散部分集合（閉集合）が存在する。

$\kappa = \mathfrak{c}$ とおくと $\mathfrak{c}^{\omega} = \mathfrak{c}$ を満たし，$\tau = \omega_1$ は Ulam 非可測だから，次は定理 2.1 の直接の結果である。

系 2.4. 次は同値である。

(a) 不等式 $2^{\omega_1} \leqq \mathfrak{c}$ が成り立つ。

(b) $\mathbb{N}^{\mathfrak{c}}$ において C^*-埋込された非可算離散部分集合が存在する。

(c) $\mathbb{N}^{\mathfrak{c}}$ において C-埋込された非可算離散閉集合が存在する。

連続体仮説を仮定すると，$\omega_1 = \mathfrak{c} < 2^{\mathfrak{c}} = 2^{\omega_1}$ となり，系 2.4(a) の不等式は満たされない。従って，次を得る。

系 2.5. 連続体仮説のもとで，$\mathbb{N}^{\mathfrak{c}}$ において任意の C^*-埋込された離散部分集合は可算である。

系 2.4 と 2.5 から，問題 2 の解答も系 1.5 と同様に，次の予想外の結果となった。

系 2.6. $\mathbb{N}^{\mathfrak{c}}$ における C^*-埋込された非可算な離散部分集合が存在するかどうかは，ZFC の公理系の中では決定できない。

3 $\mathbb{N}^{\kappa}$ における濃度 κ の C^*-埋込された離散部分集合

任意の濃度 κ に対して，$2^{\kappa} > \kappa$ であるから，$\tau = \kappa$ のとき定理 2.3 のおける不等式は成り立たない。従って，次の問題は否定的に解決されるように思える。

問題 3. κ を非可算濃度とするとき，$\mathbb{N}^{\kappa}$ において C^*-埋込された濃度 κ の離散部分集合は存在するか？

濃度 κ に対して，$\mathrm{cf}(\kappa)$ は κ の共終数を表すとして，予想通りに次を得る。

定理 3.1. 濃度 κ が $\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$ であるとする。このとき，$\mathbb{N}^{\kappa}$ において C^*-埋込された濃度 κ の離散部分集合は存在しない。

ところが一方では，そうでない濃度 κ に対しては，逆の結果が得られる。

命題 3.2. 一般連続体仮説のもとで，濃度 κ が $\mathrm{cf}(\kappa) = \omega$ であるとする。このとき，$\mathbb{N}^{\kappa}$ において C-埋込された濃度 κ の離散部分集合が存在する。

以上によって，問題 3 の解答は κ の取り方に依存することがわかる。

4 未解決問題

2 点からなる離散空間 $\{0,1\}$ の κ 個のコピーによる積空間を $\{0,1\}^\kappa$ で表す。$\mathbb{N}^\kappa$ の代わりに $\{0,1\}^\kappa$ を置き換えると，次を得ることができる。

命題 4.1. 任意の 2 つの濃度 κ と τ に対して，不等式 $2^\tau \leqq \kappa$ が成り立つための必要十分条件は，$\{0,1\}^\kappa$ における C^*-埋込された濃度 τ の離散部分集合が存在することである。

上記の命題からも上の定理 2.3 において，濃度 κ の条件「$\kappa^\omega = \kappa$」は極めて目障りである。実際，この条件は定理 2.3 の (b) $\to$ (a) の証明にのみ用いられている。従って，次の問題が自然に提起される。

問題 4. 濃度 κ は $\kappa^\omega > \kappa$ であるとする。もし $\mathbb{N}^\kappa$ において C^*-埋込された濃度 τ の離散部分集合（または C-埋込された濃度 τ の離散閉集合）が存在するならば，不等式 $2^\tau \leqq \kappa$ は成り立つか？

注意. 仮定 $2^\omega = 2^{\omega_1} = \omega_3$ のもとで，$\mathbb{N}^{\omega_2}$ において C^*-埋込された非可算な離散部分集合が存在することが証明できれば，問題 4 は否定的に解決される。

参考文献

[1] D. P. Baturov, *Normality in dense subspaces of products*, Topology and Appl. **36** (1990), 111–116.

[2] Y. Hirata and Y. Yajima, *Undecidability of the existence of C^*-embedded but not C-embedded subsets in a product of natural numbers*, preprint.

[3] E. Pol and R. Pol, *Note on countable closed discrete sets in products of natural numbers*, Topology and Appl. **175** (2014), 65–71.