

**On local behavior on monotonization
in basic self-organizing maps
with one-dimensional array**

秋田県立大学 システム科学技術学部 星野満博
Mitsuhiro Hoshino
Faculty of Systems Science and Technology,
Akita Prefectural University

1. 1次元配列1次元入力型自己組織化マップモデル

本報告は Kohonen 型アルゴリズム [5] として知られている自己組織化マップの学習プロセスとしての数理モデルを扱う。自己組織化マップは、アルゴリズムとして非常にシンプルであり、広範囲に応用されている。

自己組織化マップの学習プロセスにおいて、各ノードからノード値への写像としてのモデル関数とその学習による推移の過程について論ずる。

本報告では、1次元配列1次元入力型自己組織化マップを扱い、学習過程におけるモデル関数の単調化形成の局所的なふるまいについて、数値計算による検証も交えて考察する。

本報告で扱う1次元配列1次元入力型自己組織化マップモデルはノード、ノードの値、インプット、学習プロセスの4つの要素によって、以下の様に特徴付けできる。

$$(\{1, 2, \dots, N\}, V \subset \mathbb{R}, \{x_k\}_{k=0}^\infty, \{m_k(\cdot)\}_{k=0}^\infty)$$

- (i) I をすべてのノードから成る集合とする。 I は有限で距離付けされた要素から成るものと仮定する。

$$I = \{1, 2, \dots, N\} \subset \mathbb{N}$$

$$d(i, j) = |i - j|$$

とする。

- (ii) 各ノードは、それぞれ1つの値をもつ。ノードの値全体から成る集合を V とし、ここでは、 $V \subset \mathbb{R}$ の場合を扱う。すなわち、各ノードは1次元の実数値をもつものとする。その対応として定義される関数 $m : I \rightarrow V$ をモデル関数と呼ぶ。各ノード値の大きさとして絶対値を用いる。

- (iii) $X \subset V$ を入力集合とし、入力列 $\{x_k\}_{k=0}^\infty \subset X$ を考える。

- (iv) 学習プロセスは次のように定義される．与えられた初期モデル関数 m_0 と入力列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ に対して，モデル関数の列 $\{m_k(\cdot)\}_{k=0}^{\infty}$ は以下のように定義される．

$$m_{k+1}(i) = (1 - \alpha_{m_k, x_k})m_k(i) + \alpha_{m_k, x_k}x_k. \quad (1)$$

ここで， α_{m_k, x_k} は， $0 \leq \alpha_{m_k, x_k} \leq 1$ を満たす学習率を表す．

2. 状態クラスの保存性

1次元入力型自己組織化マップの学習プロセスにおけるモデル関数列に関して，以下の基本的な性質が成り立つ．

定理 1 1次元入力型自己組織化マップ

$$(\{1, 2, \dots, N\}, V \subset \mathbb{R}, \{x_k\}_{k=0}^{\infty}, \{m_k(\cdot)\}_{k=0}^{\infty})$$

において，次の学習プロセスを仮定する．

学習プロセス L_A (1次元配列， \mathbb{R} -値ノード)

- (a) 学習範囲: 各 m_k , x_k に対して

$$I(m_k, x_k) = \left\{ i^* \in I \mid i^* = \underset{i \in I}{\operatorname{argmin}} |m_k(i) - x_k| \right\},$$

$$N_1(i) = \{j \in I \mid |j - i| \leq 1\} \quad (i \in I)$$

とする．

- (b) 学習率: $0 < \alpha < 1$.

- (c) 更新後の値: 各 $k = 0, 1, 2, \dots$ に対して， m_{k+1} を次のように定義する．

$$m_{k+1}(i) = \begin{cases} (1 - \alpha)m_k(i) + \alpha x_k & (i \in \bigcup_{i^* \in I(m_k, x_k)} N_1(i^*) \text{ のとき}) \\ m_k(i) & (i \notin \bigcup_{i^* \in I(m_k, x_k)} N_1(i^*) \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき，更新前のモデル関数 m_k とその更新後のモデル関数 m_{k+1} に対して，以下の性質が成り立つ．

- (i) 任意の入力 x に対して，モデル関数 m_k が I 上で単調増加 ($m_k(i) \leq m_k(i+1), \forall i$) であるならば，モデル関数 m_{k+1} も I 上で単調増加である．
- (ii) 任意の入力 x に対して，モデル関数 m_k が I 上で単調減少 ($m_k(i) \geq m_k(i+1), \forall i$) であるならば，モデル関数 m_{k+1} も I 上で単調減少である．
- (iii) 任意の入力 x に対して，モデル関数 m_k が I 上で狭義単調増加 ($m_k(i) < m_k(i+1), \forall i$) であるならば，モデル関数 m_{k+1} も I 上で狭義単調増加である．

- (iv) 任意の入力 x に対して, モデル関数 m_k が I 上で狭義単調減少 ($m_k(i) > m_k(i+1), \forall i$) であるならば, モデル関数 m_{k+1} も I 上で狭義単調減少である.

上で述べたように, モデル関数の更新において単調性が保存されるが, 同様にモデル関数が一度その状態になると, その状態が保存されるという場合, このような状態のクラスを自己組織化マップの学習プロセスにおける閉じた状態クラスと呼ぶことにする.

3. モデル関数の単調化形成における局所的な挙動について

以下の結果は, 上述の1次元配列1次元入力型モデルの学習プロセスにおいて, 最小値をもつノードが学習により左右にシフトする為の十分条件を与える. これによりモデル関数の単調化形成の局所的な挙動に関するひとつの視点が得られる.

定理 2 1次元入力型自己組織化マップ

$$(\{1, 2, \dots, N\}, V \subset \mathbb{R}, \{x_k\}_{k=0}^{\infty}, \{m_k(\cdot)\}_{k=0}^{\infty})$$

において, 定理1と同じ次の学習プロセス L_A を仮定する. また, ある回数更新後のモデル関数 m とあるノード q ($3 \leq q \leq N-2$) に対して

$$m(1) > m(2) > \dots > m(q), m(q) < m(q+1) < \dots < m(N) \quad (2)$$

かつ $i \neq j$ に対して

$$m(i) \neq m(j)$$

が成り立つものとする. このとき, 入力 x からの学習による m の更新後のモデル関数 m' に対して, 以下が成り立つ.

(i) m, x が

$$s_- = \max\{s \geq 0 \mid m(q-s) < m(q+1)\} \geq 1, \quad (3)$$

$$\max \left\{ \frac{m(q-s_-) + m(q+1)}{2}, \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)m(q) + \frac{1}{\alpha}m(q-1) \right\} < x < \frac{m(q+1) + \min\{m(q-s_- - 1), m(q+2)\}}{2} \quad (4)$$

を満たすならば,

$$m'(1) > m'(2) > \dots > m'(q-1), m'(q-1) < m'(q) < \dots < m'(N) \quad (5)$$

が成り立つ.

(ii) m と x が

$$s_+ = \max\{s \geq 0 \mid m(q+s) < m(q-1)\} \geq 1, \quad (6)$$

$$\max\left\{\frac{m(q+s_+)+m(q-1)}{2}, \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)m(q)+\frac{1}{\alpha}m(q+1)\right\} < x < \frac{m(q-1)+\min\{m(q+s_++1), m(q-2)\}}{2} \quad (7)$$

を満たすならば,

$$m'(1) > m'(2) > \dots > m'(q+1), \quad m'(q+1) < m'(q+2) < \dots < m'(N) \quad (8)$$

が成り立つ.

不等式 (4) および (7) の中の項において, その値が定義されない場合は, これを取り除いたもので置き換えることとする. 証明については [4] を参照されたい.

ここで, 定理 2 における条件と最小値をもつノードが学習により左右にシフトする頻度との関係を数値計算によって考察する.

数値計算 1 以下は, モデル関数の状態が (2) から (5) の状態にする頻度を調べたものである. 定理 1 と同じ学習プロセス L_A をもつ 50 ノードモデル

$$(\{1, 2, \dots, 50\}, V \subset \mathbb{R}, \{x_k\}_{k=0}^\infty, \{m_k(\cdot)\}_{k=0}^\infty)$$

において, 以下の計算を行った.

各ノードの値を一様分布に従いランダムに生成させ, このような条件の下で生成させたモデル関数 m に対して, 100 個の異なる入力 x について状態 (2) から状態 (5) へ推移する頻度を調べた. ここで, $q = 25$ を仮定した. また, 学習率 $\alpha = 0.2, 0.5, 0.8$ と上記の条件の下で変えたモデル関数に対して 10,000 回の試行を実施した. 以下はこれらの頻度をまとめたものである.

最小ノードがシフトする頻度

	$\alpha=0.2$	$\alpha=0.5$	$\alpha=0.8$
最小ノードが左に1つシフトする入力の割合	0.37%	0.78%	0.95%
最小ノードが左に1つシフトしたという条件の下で, 定理の十分条件を満たさない入力の割合	2.60%	2.40%	2.60%

試行10000回における平均頻度

状態 (2) から状態 (5) への推移は低頻度で起こっていると観測されるが、どの学習率においても、その内の殆どが条件 (3), (4) を満たしていると云える。□

参考文献

- [1] M. Cottrell and J.-C. Fort, *Étude d'un processus d'auto-organisation*, Annales de l'Institut Henri Poincaré, 23(1) (1987), pp.1–20 (in French).
- [2] M. Hoshino and Y. Kimura, *Ordered states and probabilistic behavior of self-organizing maps*, proceedings of Asian conferece on nonlinear analysis and optimization 2008, pp. 31–44.
- [3] M. Hoshino, *On state preserving property and nonexpansivity in self-organizing maps*, J. Nonlinear Convex Anal. Vol. 16 Num. 11 (2015) 2255-2261.
- [4] M. Hoshino, *On some conditions for ordering in learning process of basic self-organizing Maps*, proceedings of the 10th international conference on nonlinear analysis and convex analysis (in press).
- [5] T. Kohonen, *Self-Organizing Maps, Third Edition*, Springer, 2001.