拡張実数値凸最適化問題のラグランジュ双対性に対する制約想定の考察

島根大学大学院自然科学研究科 大谷浩之（Hiroyuki Ohtani ）
Graduate School of Natural Science and Technology, Shimane University
島根大学大学院自然科学研究科 岡野倖治（Koji Okano）
Graduate School of Natural Science and Technology, Shimane University
島根大学総合理工学部 黒岩大史（Daishi Kuroiwa）
Major in Interdisciplinary Science and Engineering, Shimane University

1　はじめに

本講究録では次のような拡張実数値凸最適化問題に対する [6] における結果を紹介する:

$$\begin{array}{lll}(\mathrm{P}) & \text{minimize} & f(x) \\ & \text{subject to} & g_i(x) \leqq 0, \forall i \in I,\end{array}$$

ただし，I は任意の空でない添字集合とし，$f, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ は凸関数とする。このとき凸最適化問題のラグランジュ双対性

$$\inf_{x \in S} f(x) = \max_{\lambda_i \geq 0} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) \right\}$$

について観察する。ラグランジュ双対性に対する制約想定としては Slater 条件が最も有名であり，I が有限集合のときに用いられ，[2] では $0 \cdot (+\infty)$ の値を形式的に $+\infty$ として取り扱っている。また FM(Farkas Minkowski Property) と呼ばれる条件は，どのような目的関数（ただし実数値凸関数）に対してもラグランジュ双対性が成立する必要十分制約想定として知られている。この場合は I が任意の集合で用いることが出来るが，$0 \cdot (+\infty)$ の値は形式的に 0 として取り扱っている（[4]）。FM は，ラグランジュ双対性が成立するための必要十分制約想定であるものの，実際には，Slater 条件をみたしているものの FM が成立していないような場合がある。つまり，$0 \cdot (+\infty)$ の値を形式的に $+\infty$ とした場合にラグランジュ双対性が成立するものの 0 とした場合にはラグランジュ双対性が成立しない例がある。本講究録では，$0 \cdot (+\infty)$ の値を形式的に $+\infty$ とした場合に，Slater 条件を含んだラグランジュ双対性に対する必要十分制約想定について紹介する。

2　準備

まずは準備として，関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ に対して必要な概念を定義する。

$$\mathrm{epi} f = \{(x, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid x \in \mathrm{dom} f, f(x) \leq r\},$$

$$\mathrm{dom} f = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < +\infty\}$$

を f のエピグラフ，f の実行定義域といい，f のエピグラフ epi$f$ が凸集合，閉集合，非空のとき，関数 f はそれぞれ凸，閉，真であるという。関数 f の共役関数を

$$f^*(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\{\langle x, y\rangle - f(x)\}$$

と定義する。

以降では，I は任意の空でない添字集合とし，$g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ は凸関数とする。また制約集合

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leqq 0, \forall i \in I\}$$

は空でないと仮定する。ここで本研究に関連する先行研究を二つ紹介する。

定理 2.1 (J.E. Martínez-Legaz, Michel Volle, [2]) I を有限集合とする。$g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ $(i \in I)$ を凸関数とし，Slater 条件

$$\exists x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ such that } g_i(x_0) < 0 \text{ for all } i \in I$$

が成り立つとする。このとき，任意の凸関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に対してラグランジュ双対性が成り立つ。すなわち

$$\inf_{x\in S} f(x) = \max_{\lambda_i\in\mathbb{R}_+}\inf_{x\in\mathbb{R}^n}\left\{f(x) + \sum_{i\in I}\lambda_i g_i(x)\right\}.$$

ただし，$0\cdot(+\infty) = +\infty$ とする。

Slater 条件はあくまでもラグランジュ双対性に対する十分条件である。すなわち，任意の凸関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に対してラグランジュ双対性が成立しても，Slater 条件が成立していない場合がある。一方で，次の定理ではラグランジュ双対性に対する必要十分制約想定が述べられている。

定理 2.2 (M.A. Goberna, V. Jeyakumar, M.A. López, [4]) I を任意の集合，$g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ $(i \in I)$ を閉真凸関数とし，任意の $i \in I$ に対して g_i が連続となる S の元が存在すると仮定する。このとき次の二つは同値である:

(1) FM(Farkas Minkowski Property) が成立。すなわち，次の集合が閉集合

$$\operatorname{cone}\operatorname{co}\bigcup_{i\in I}\operatorname{epi}g_i^* + \{0\}\times[0,+\infty)$$

(2) 任意の凸関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に対してラグランジュ双対性が成り立つ。すなわち，

$$\inf_{x\in S} f(x) = \max_{\lambda\in\mathbb{R}_+^{(I)}}\inf_{x\in\mathbb{R}^n}\left\{f(x) + \sum_{i\in I}\lambda_i g_i(x)\right\}.$$

ただし，$0\cdot(+\infty) = 0$ とする。

注意 2.1 $\mathbb{R}_+^{(I)}$ の定義より，(2) の式は，空でない有限集合 $I_0 \subset I$ と $\lambda_i \geq 0 (i \in I_0)$ が存在して，

$$\inf_{x \in S} f(x) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) + \sum_{i \in I_0} \lambda_i g_i(x) \right\},$$

となることと同値である。

しかしながら，Slater 条件が成り立つものの，FM が成立しないような場合がある。

例 2.1 $I = \{1\}, g_1 = \delta_{[-1,1]}(x) - 1$ とおく。このとき，$g_1(0) = -1 < 0$ であるから明らかに Slater 条件が成立する。しかし，

$$g_1^*(y) = \sup_{x \in [-1,1]} \{xy + 1\} = |y| + 1,$$

より

$$\operatorname{cone} \operatorname{co} \operatorname{epi} g_1^* + \{0\} \times [0, \infty) = \{(y, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| < \beta\} \cup \{(0, 0)\}$$

は閉集合ではないため，FM は成立しない。すなわち，ある目的関数に対してラグランジュ双対性が成立しない。実際，次のような凸最適化問題に対するラグランジュ双対性は成立していない。

$$\begin{array}{lll} \text{(P)} & \text{minimize} & x \\ & \text{subject to} & \delta_{[-1,1]}(x) - 1 \leqq 0 \end{array}$$

なぜなら，ラグランジュ双対性が成り立つと仮定すると

$$\inf_{x \in S} f(x) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \{x + \lambda g_1(x)\}$$

をみたす $\lambda \geq 0$ が存在する。もし $\lambda > 0$ ならば，

$$\begin{aligned} \inf_{x \in \mathbb{R}} \{x + \lambda g_1(x)\} &= \min \left\{ \inf_{x \in [-1,1]} (x + \lambda g_1(x)), \inf_{x \notin [-1,1]} (x + \lambda g_1(x)) \right\} \\ &= \min \left\{ \inf_{x \in [-1,1]} (x - \lambda), +\infty \right\} \\ &= \inf_{x \in [-1,1]} (x - \lambda) = -1 - \lambda \end{aligned}$$

となり，またもし $\lambda = 0$ ならば

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} \{x + 0 \cdot g_1(x)\} = \inf_{x \in \mathbb{R}} x = -\infty$$

となるが，$\inf_{x \in S} f(x) = -1$ であるため，いずれの場合も値が一致しない。すなわちこの場合にはラグランジュ双対性は成立しない。

つまり，必要十分制約想定であったはずの FM が成り立たなくても，Slater 条件が成り立てば，$0 \cdot (+\infty)$ の便宜上の値によっては，任意の凸関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に対してラグランジュ双対性が成り立つのである。従って本研究では，$0 \cdot (+\infty)$ の便宜上の値を $+\infty$ としたときのラグランジュ双対性における必要十分制約想定を与えることを目的とする。

3　主結果

定理 3.1 (Kuroiwa, Ohtani, Okano, [6]) I を任意の集合，$g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ $(i \in I)$ を閉真凸関数とし，任意の $i \in I$ に対して g_i が連続となる S の元が存在すると仮定する。このとき次の二つは同値である:

(1) 次の集合が閉集合：

$$\operatorname{cone}\operatorname{co}\bigcup_{i\in I}\left(\operatorname{epi}g_i^* \cup \operatorname{epi}\delta^*_{\operatorname{dom}g_i}\right)$$

(2) 任意の凸関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に対して，ラグランジュ双対性が成り立つ。すなわち，空でない有限集合 $I_0 \subset I$ と $\lambda_i \geq 0 (i \in I_0)$ が存在して，

$$\inf_{x\in S} f(x) = \inf_{x\in\mathbb{R}^n}\left\{f(x) + \sum_{i\in I_0}\lambda_i g_i(x)\right\},$$

ただし，$0 \cdot (+\infty) = +\infty$ とする。

$0 \cdot (+\infty) = +\infty$ とする場合，(1) の条件は，任意の凸関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に対してラグランジュ双対性が成り立つための必要十分制約想定である。

例 3.1 再び例 2.1 を考える。このとき $f(x) = x$, $g_1(x) = \delta_{[-1,1]}(x) - 1$ であることから，定理 3.1 の条件 (1) が成立する。実際，

$$g_1^*(y) = |y| + 1, \delta^*_{\operatorname{dom}g_1}(y) = |y|,$$

となり，そして

$$\operatorname{cone}\operatorname{co}\left(\operatorname{epi}g_1^* \cup \operatorname{epi}\delta^*_{\operatorname{dom}g_1}\right) = \{(y,\beta) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leq \beta\}$$

は閉である。従ってどのような凸関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対してもラグランジュ双対性は成立する。例えば先ほどはうまくいかなかった

$$\begin{array}{lll}(\mathrm{P}) & \text{minimize} & x \\ & \text{subject to} & \delta_{[-1,1]}(x) - 1 \leqq 0\end{array}$$

を考えた場合，左辺は $\inf_{x\in S} x = -1$ である。右辺を以下で計算していく。

$$\begin{aligned} & \max_{\lambda\geq 0}\inf_{x\in\mathbb{R}}\{x + \lambda g_1(x)\} \\ = \ & \max_{\lambda\geq 0}\min\left\{\inf_{x\in[-1,1]}(x + \lambda g_1(x)), \inf_{x\notin[-1,1]}(x + \lambda g_1(x))\right\} \\ = \ & \max_{\lambda\geq 0}\min\left\{\inf_{x\in[-1,1]}(x + \lambda g_1(x)), +\infty\right\} \\ = \ & \max_{\lambda\geq 0}\inf_{x\in[-1,1]}(x + \lambda g_1(x)) \\ = \ & \max_{\lambda\geq 0}(-1 + \lambda(-1)) = -1 \end{aligned}$$

重要なことは，右辺の最大値を与える λ が存在していることである（$\lambda = 0$）。よってこの場合にはラグランジュ双対性

$$\inf_{x \in S} f(x) = \max_{\lambda \geq 0} \inf_{x \in \mathbb{R}} \{x + \lambda g_1(x)\}$$

は成立している。

参考文献

[1] V. Jeyakumar, A. M. Rubinov, B. M. Glover, Y. Ishizuka. Inequality Systems and Global Optimization.J. Math. Anal. Appl. 202 (1996), no. 3, 900919.

[2] J. E. Martínez-Legaz, Michel Volle. Duality in D.C. Programming: The Case of Several D.C. Constraints. J. Math. Anal. Appl. 237 657-671 (1999)

[3] V. Jeyakumar. Constraint Qualifications Characterizing Lagrangian Duality in Convex Optimization. J. Optim. Theory Appl. 136 (2008), no. 1, 3141.

[4] M. A.Goberna, V. Jeyakumar, M. A. López. Necessary and sufficient constraint qualifications for solvability of systems of infinite convex inequalities. Nonlinear Anal. 68 1184-1194 (2008)

[5] R. Harada, D. Kuroiwa. Lagrange-type duality in DC programming. J. Math. Anal. Appl. 418 (2014), no. 1, 415424.

[6] D. Kuroiwa, H. Ohtani, K. Okano. A necessary and sufficient constraint qualification for the Lagrange-duality including the Slater condition in extended real-valued convex optimization, preprint.