数理解析研究所講究録 第2112巻 2019年 189-194

集合の二項関係に基づくスカラー化関数の計算アルゴリズムとその改良について

新潟大学・大学院自然科学研究科　于　慧
Hui Yu
Graduate School of Science and Technology,
Niigata University
新潟大学・大学院自然科学研究科　田中　環
Tamaki Tanaka
Graduate School of Science and Technology,
Niigata University

1　はじめに

本稿では，6 種類の集合の二項関係に基づくスカラー化関数に焦点を当て，凸多面集合の間のそれらの計算アルゴリズムについて議論する．凸多面体の場合の計算アルゴリズムは既に [17] で提案された．凸多面集合と凸多面体の主な違いは有界性である．凸多面集合は必ずしも有界ではない集合である．本稿の目的は [17] の計算方法の適用範囲を凸多面体の場合から凸多面集合の場合まで広げることである．

2　準備

本稿では，特に断らない限り，X を実線形位相空間とする．X のすべての空ではない部分集合の集まりを $\mathcal{P}(X)$ と書く．$A \subset X$ に対して，その位相的内部，凸包，凸錐包をそれぞれ $\operatorname{int} A$，$\operatorname{co} A$，$\operatorname{cone} A$ と表す．

2.1　集合の二項関係に基づくスカラー化関数

空間 X において，C を X の空でない凸錐とすると，X に前順序 $\leq_C$（反射律と推移律を満たす二項関係）が定まる（$x, y \in X$ に対して $y - x \in C$ が成立するとき，$x \leq_C y$ と定義する）．さらに，X の空でない二つの集合 A と B の二項関係を以下のように定める．

定義 2.1 ([13]) $A, B \in \mathcal{P}(X)$ とする．

$$\text{(i)}\quad A \leq_C^{(1)} B \overset{\text{def}}{\iff} \forall a \in A,\ \forall b \in B,\ a \leq_C b \iff A \subset \textstyle\bigcap_{b \in B}(b - C);$$

$$\text{(ii)}\quad A \leq_C^{(2)} B \overset{\text{def}}{\iff} \exists a \in A \text{ s.t. } \forall b \in B,\ a \leq_C b \iff A \cap \left(\textstyle\bigcap_{b \in B}(b - C)\right) \neq \emptyset;$$

$$\text{(iii)}\quad A \leq_C^{(3)} B \overset{\text{def}}{\iff} \forall b \in B,\ \exists a \in A \text{ s.t. } a \leq_C b \iff B \subset A + C;$$

(iv) $A \leq_C^{(4)} B \overset{\text{def}}{\iff} \exists b \in B \text{ s.t. } \forall a \in A,\ a \leq_C b \iff \left(\bigcap_{a\in A}(a+C)\right) \cap B \neq \emptyset;$

(v) $A \leq_C^{(5)} B \overset{\text{def}}{\iff} \forall a \in A,\ \exists b \in B \text{ s.t. } a \leq_C b \iff A \subset B - C;$

(vi) $A \leq_C^{(6)} B \overset{\text{def}}{\iff} \exists a \in A,\ \exists b \in B \text{ s.t. } a \leq_C b \iff A \cap (B - C) \neq \emptyset.$

上の二項関係に基づくスカラー化関数を次のように定める．

定義 2.2 ([14]) $A,\ B \in \mathcal{P}(X)$ とし，$C \neq X$ で $k \in \operatorname{int} C$ とする．各 $i = 1, \dots, 6$ に対して，

$$E_{C,k}^{(i)}(A,B) := \inf \left\{ t \in \mathbb{R} \;\middle|\; A \leq_C^{(i)} (B + tk) \right\}.$$

これらのスカラー化関数は各二項関係に関して，2 つの与えられた集合間の差を測定するものである． 定義により，以下の不等式が成り立つことを容易に確認することができる．

$$E_{C,k}^{(1)}(A,B) \geq E_{C,k}^{(2)}(A,B) \geq E_{C,k}^{(3)}(A,B) \geq E_{C,k}^{(6)}(A,B);$$
$$E_{C,k}^{(1)}(A,B) \geq E_{C,k}^{(4)}(A,B) \geq E_{C,k}^{(5)}(A,B) \geq E_{C,k}^{(6)}(A,B).$$

2.2 凸多面集合と有限生成集合

ここでは, 凸多面集合と有限生成集合の概念を紹介する．X^* を X の位相的双対空間とし，A° を $A \subset X$ の極錐とする．$m \times n$ 実行列全体の集合を記号で $M^{m\times n}$ と表す．

定義 2.3 (凸多面集合) 有限個の非零ベクトル $p_1, \dots, p_m \in X^*$ と実数 $q_1, \dots, q_m \in \mathbb{R}$ に対して，$A = \{x \in X \mid \langle p_i, x\rangle \leq q_i \ (i = 1, \dots, m)\}$ と書かれる集合 $A \subset X$ を凸多面集合という．特に，もし $A \subset \mathbb{R}^n$ ならば，$P \in M^{m\times n}$ と $q \in \mathbb{R}^m$ を用いて $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Px \leq q\}$ と表現できる．

定義 2.4 (有限生成集合) 有限集合 $V,\ W \subset X$ に対して，$A = \operatorname{co} V + \operatorname{cone} W$ と表される集合 $A \subset X$ を有限生成集合という．

定義 2.3 と定義 2.4 の特別な場合としては，$C = \{x \in X \mid \langle p_i, x\rangle \leq 0 \ (i = 1, \dots, m)\}$ を凸多面錐と呼び，$C = \operatorname{cone} W$ を有限生成錐と呼ぶ．

実際，集合の凸多面性と有限生成性は有限次元空間で互いに一致する．即ち，それぞれ一方から他方を求めることが可能である．この同値性を示すには，次の Fourier–Motzkin 消去法が必要である．

命題 2.1 (Fourier–Motzkin 消去法，e.g.,[2] 参照) $\sum_{j=1}^n p_{ij}x_j \leq q_i \ (i = 1, \dots, m)$ を n 変数の不等式系とする．さらに，不等式は正定数で割って規格化できるので，x_1 の係数 p_{i1} $(i = 1, \dots, m)$ が 0, -1 または 1 の要素からなると仮定する．即ち，不等式系を

$$\begin{aligned} x_1 + p_{i2}x_2 + \cdots p_{in}x_n &\leq q_i \quad (i = 1, \dots, m_1) \\ -x_1 + p_{k2}x_2 + \cdots p_{kn}x_n &\leq q_k \quad (k = m_1 + 1, \dots, m_1 + m_2) \\ p_{l2}x_2 + \cdots p_{ln}x_n &\leq q_l \quad (l = m_1 + m_2 + 1, \dots, m) \end{aligned}$$

と書ける．このとき，$\sum_{j=1}^n p_{ij}x_j \leq q_i \ (i = 1, \dots, m)$ が解をもつための必要十分条件は系

$$\sum_{j=2}^n p_{kj}x_j - q_k \leq q_i - \sum_{j=2}^n p_{ij}x_j \quad (i = 1, \dots, m_1; k = m_1 + 1, \dots, m_1 + m_2),$$
$$\sum_{j=2}^n p_{lj}x_j \leq q_l \quad (l = m_1 + m_2 + 1, \dots, m)$$

が解をもつことである．

次に，2 つの命題を与える．それらの証明はここでは省略するが，実際には後述の定理 3.2 で使う凸多面集合から有限生成集合への変形の具体的な手順を示すものである．

命題 2.2 ([20] の Theorem 1.3 参照) 凸錐が多面的であるための必要十分条件は有限生成であることである．

命題 2.3 ([20] の Theorem 1.2 参照) 凸集合が多面的であるための必要十分条件は有限生成であることである．

3 スカラー化関数の計算手法

本節では，一定の仮定の下で 6 種類のスカラー化関数の値を計算する手法について説明する．ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ を考える．C を $C := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle p_l, x \rangle \leq 0 \{l = 1, \ldots, m)\}$（ただし，$p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}^n$）と定義される凸多面体錐とする．さらに，$k \in \operatorname{int} C$ とする．

3.1 先行研究

命題 3.1 ([17]) $A,\, B \subset \mathbb{R}^n$ とする．このとき，次が成り立つ．

$$\text{(i)}\ E^{(1)}_{C,k}(A,B) = \sup_{a\in A}\sup_{b\in B}\max_{l=1,\ldots,m}\left\langle \frac{p_l}{\langle p_l, k\rangle}, a-b \right\rangle;$$

$$\text{(ii)}\ E^{(2)}_{C,k}(A,B) = \inf_{a\in A}\sup_{b\in B}\max_{l=1,\ldots,m}\left\langle \frac{p_l}{\langle p_l, k\rangle}, a-b \right\rangle;$$

$$\text{(iii)}\ E^{(3)}_{C,k}(A,B) = \sup_{b\in B}\inf_{a\in A}\max_{l=1,\ldots,m}\left\langle \frac{p_l}{\langle p_l, k\rangle}, a-b \right\rangle;$$

$$\text{(iv)}\ E^{(4)}_{C,k}(A,B) = \inf_{b\in B}\sup_{a\in A}\max_{l=1,\ldots,m}\left\langle \frac{p_l}{\langle p_l, k\rangle}, a-b \right\rangle;$$

$$\text{(v)}\ E^{(5)}_{C,k}(A,B) = \sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\max_{l=1,\ldots,m}\left\langle \frac{p_l}{\langle p_l, k\rangle}, a-b \right\rangle;$$

$$\text{(vi)}\ E^{(6)}_{C,k}(A,B) = \inf_{a\in A}\inf_{b\in B}\max_{l=1,\ldots,m}\left\langle \frac{p_l}{\langle p_l, k\rangle}, a-b \right\rangle.$$

有限集合 $V \subset \mathbb{R}^n$ に対して，$A = \operatorname{co} V$ と表される集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ は凸多面体と呼ばれる．凸多面体は有界な有限生成集合であることは明らかである (命題 2.3 より，有界な凸多面集合であることも言える)．

命題 3.2 ([17]) 集合 $A,\, B \subset \mathbb{R}^n$ を $A := \operatorname{co}\{a_1, \ldots, a_\alpha\}$, $B := \operatorname{co}\{b_1, \ldots, b_\beta\}$ と定義される凸多面体とする．任意の $h \in \mathbb{N}$ に対して，$I(h) := \{1, \ldots, h\}$ *and* $\Delta^h := \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_h) \in \mathbb{R}^h \mid \sum_{i=1}^h \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0\ (i \in I(h))\}$ とおくと，次が成り立つ．

(i) $E^{(1)}_{C,k}(A,B) = \max_{i\in I(\alpha)} \max_{j\in I(\beta)} \max_{l\in I(m)} \left\langle \frac{p_l}{\langle p_l,k\rangle}, a_i - b_j \right\rangle$;

(ii) $E^{(2)}_{C,k}(A,B) = \inf\{t \in \mathbb{R} \mid \langle p_l, k\rangle\, t + \sum_{i=1}^{\alpha} \langle p_l, -a_i\rangle\, \lambda_i \geq \max_{j\in I(\beta)} \langle p_l, -b_j\rangle\ \ (l \in I(m))$ *for some* $\lambda \in \Delta^\alpha\}$;

(iii) $E^{(3)}_{C,k}(A,B) = \max_{j\in I(\beta)} \inf\{t \in \mathbb{R} \mid \langle p_l, k\rangle\, t + \sum_{i=1}^{\alpha} \langle p_l, -a_i\rangle\, \lambda_i \geq \langle p_l, -b_j\rangle \ \ (l \in I(m))$ *for some* $\lambda \in \Delta^{\alpha}\}$;

(iv) $E^{(4)}_{C,k}(A,B) = \inf\{t \in \mathbb{R} \mid \langle p_l, k\rangle\, t + \sum_{j=1}^{\beta} \langle p_l, b_j\rangle\, \mu_j \geq \max_{i\in I(\alpha)} \langle p_l, a_i\rangle \ \ (l \in I(m))$ *for some* $\mu \in \Delta^{\beta}\}$;

(v) $E^{(5)}_{C,k}(A,B) = \max_{i\in I(\alpha)} \inf\{t \in \mathbb{R} \mid \langle p_l, k\rangle\, t + \sum_{j=1}^{\beta} \langle p_l, b_j\rangle\, \mu_j \geq \langle p_l, a_i\rangle \ \ (l \in I(m))$ *for some* $\mu \in \Delta^{\beta}\}$;

(vi) $E^{(6)}_{C,k}(A,B) = \inf\{t \in \mathbb{R} \mid \langle p_l, k\rangle\, t + \sum_{i=1}^{\alpha} \langle p_l, -a_i\rangle\, \lambda_i + \sum_{j=1}^{\beta} \langle p_l, b_j\rangle\, \mu_j \geq 0 \ (l \in I(m))$ *for some* $\lambda \in \Delta^{\alpha},\ \mu \in \Delta^{\beta}\}$.

3.2　本稿の結果

この部分では，計算手法を凸多面体の場合からより一般的な凸多面集合（必ずしも有界ではない集合）の場合に適用の範囲を拡張する．今後，A, B を $A := \{x \in \mathbb{R}^n \mid P_A x \leq q_A\}$, $B := \{x \in \mathbb{R}^n \mid P_B x \leq q_B\}$ とする．ただし，$P_A \in M^{\alpha\times n}$, $P_B \in M^{\beta\times n}$, $q_A \in \mathbb{R}^{\alpha}$, $q_B \in \mathbb{R}^{\beta}$.

命題 3.1 を利用して，スカラー化関数のタイプ (1)，(2)，(4) と (6) の計算手法を次の定理で与える．

定理 3.1 次の $(x^{\mathrm{T}}, y^{\mathrm{T}}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ に関する線形計画問題 *LP(1-1), ..., LP(1-m)* を解いて，m 個の最適値の最大値として，$E^{(1)}_{C,k}(A,B)$ の値が求められる．

$$\text{LP(1-l):}\ \boxed{\textit{Maximize}\ \left\langle \frac{p_l}{\langle p_l, k\rangle}, x - y \right\rangle\ \textit{subject to}\ P_A x \leq q_A,\ P_B y \leq q_B.}$$

ただし，$l = 1, \ldots, m$ である．
次に，$E^{(2)}_{C,k}(A,B)$ の値の計算については，次の (t, x^{T}) に関する線形計画問題を解くことで，値が求められる．

$$\text{LP(2):}\ \boxed{\begin{array}{ll} \textit{Minimize} & t \in \mathbb{R} \\ \textit{subject to} & t \geq \left\langle \frac{p_l}{\langle p_l,k\rangle}, x \right\rangle + \sup_{y\in B} \left\langle \frac{p_l}{\langle p_l,k\rangle}, -y \right\rangle\ \textit{for}\ l = 1, \ldots, m, \\ & P_A x \leq q_A. \end{array}}$$

ここで，*LP(2)* の制約条件を求めるために以下の m 個の線形計画問題を解く必要がある．

$$\text{LP(2-l):}\ \boxed{\textit{Maximize}\ \left\langle \frac{p_l}{\langle p_l, k\rangle}, -y \right\rangle\ \textit{subject to}\ P_B y \leq q_B.}$$

LP(2-l) の最適値はある l に対して無限大であるとき，*LP(2-l)* の実行可能領域は空なので，$E^{(2)}_{C,k}(A,B)$ の値は有界ではないことに注意が必要である．同様にして，$E^{(4)}_{C,k}(A,B)$ と $E^{(6)}_{C,k}(A,B)$ の値も求められる．

最後に，凸多面集合を有限生成集合に変換することによって，タイプ（3）と（5）の計算を考察する．

定理 3.2 $E^{(3)}_{C,k}(A,B)$ の値を以下のアルゴリズムで計算できる．

Step 1: 命題 *2.2* と *2.3* を利用して，以下の条件を満たす有限集合 V_A, W_A, V_B, W_B と $W_C \subset \mathbb{R}^n$ を求める．

$$A = \operatorname{co} V_A + \operatorname{cone} W_A,\ B = \operatorname{co} V_B + \operatorname{cone} W_B,\ C = \operatorname{cone} W_C.$$

Step 2: 各 $w' \in W_B$ について，方程式 $\sum_{w \in W_A \cup W_C} x_w w = w'$ を考える．すべての方程式が解 $\{x_w\}_{w \in W_A \cup W_C} \subset \mathbb{R}_+$ をもつ場合，$\operatorname{cone} W_B \subset \operatorname{cone} W_A + \operatorname{cone} W_C$ が成り立つので，*Step 2* に進む．さもなければ，$\operatorname{cone} W_B \not\subset \operatorname{cone} W_A + \operatorname{cone} W_C$ が成り立つので，$E^{(3)}_{C,k}(A, B) = +\infty$ で終了する．

Step 3: 各 $v \in V_B$ に対して，次のいくつかの線形計画問題を解いて，それらの最適値の最大値として，$E^{(3)}_{C,k}(A, B)$ の値が求められる．

$$\text{LP(3-}v\text{):}\ \boxed{\begin{array}{ll} \textit{Minimize} & t \in \mathbb{R} \\ \textit{subject to} & t \geq \left\langle \frac{p_l}{\langle p_l, k\rangle}, x - v \right\rangle \ \textit{for}\ l = 1, \ldots, m, \\ & P_A x \leq q_A. \end{array}}$$

参考文献

[1] Y. Araya, *Four types of nonlinear scalarizations and some applications in set optimization*, Nonlinear Anal. **75** (2012), 3821–3835.

[2] G. B. Dantzig and B. C. Eaves, *Fourier–Motzkin elimination and its dual*, J. Combinatorial Theory Ser. A **14** (1973), 288–297.

[3] M. Dhingra and C. S. Lalitha, *Well-setness and scalarization in set optimization*, Optim. Lett. **10** (2015), 1657–1667.

[4] A. Göpfert, H. Riahi, C. Tammer and C. Zălinescu, *Variational Methods in Partially Ordered Spaces*, Springer, New York, 2003.

[5] C. Gutiérrez, B. Jiménez, E. Miglierina and E. Molho, *Scalarization in set optimization with solid and nonsolid ordering cones*, J. Global Optim. **61** (2015), 525–552.

[6] C. Gutiérrez, E. Miglierina, E. Molho and V. Novo, *Pointwise well-posedness in set optimization with cone proper sets*, Nonlinear Anal. **75** (2012), 1822–1833.

[7] A. H. Hamel and A. Löhne, *Minimal element theorems and Ekeland's principle with set relations*, J. Nonlinear Convex Anal. **7** (2006), 19–37.

[8] E. Hernández and L. Rodríguez-Marín, *Nonconvex scalarization in set optimization with set-valued maps*, J. Math. Anal. Appl. **325** (2007), 1–18.

[9] K. Ike and T. Tanaka, *Convex-cone-based comparisons of and difference evaluations for fuzzy sets*, Optimization **67** (2018), 1051–1066.

[10] J. Jahn and T. X. D. Ha, *New order relations in set optimization*, J. Optim. Theory Appl. **148** (2011), 209–236.

[11] S. Khoshkhabar-amiranloo, E. Khorram and M. Soleimani-damaneh, *Nonlinear scalarizaion functions and polar cone in set optimization*, Optim. Lett. **11** (2017), 521–535.

[12] E. Köbis and M. A. Köbis, *Treatment of set order relations by means of a nonlinear scalarization functional: a full characterization*, Optimization **65** (2016), 1805–1827.

[13] D. Kuroiwa, T. Tanaka and T. X. D. Ha, *On cone convexity of set-valued maps*, Nonlinear Anal. **30** (1997), 1487–1496.

[14] I. Kuwano, T. Tanaka and S. Yamada, *Unified scalarization for sets and set-valued Ky Fan minimax inequality*, J. Nonlinear Convex Anal. **11** (2010), 513–525.

[15] Y. Ogata, T. Tanaka, Y. Saito, G. M. Lee and J. H. Lee, *An alternative theorem for set-valued maps via set relations and its application to robustness of feasible sets*, Optimization **67** (2018), 1067–1075.

[16] Y. D. Xu and S. J. Li, *A new nonlinear scalarization function and applications*, Optimization **65** (2016), 207–231.

[17] H. Yu, K. Ike, Y. Ogata, Y. Saito and T. Tanaka, *Computational methods for set-relation-based scalarizing functions*, Nihonkai Math. J. **28** (2017), 139–149.

[18] W. Y. Zhang, S. J. Li and K. L. Teo, *Well-posedness for set optimization problems*, Nonlinear Anal. **71** (2009), 3769–3778.

[19] Z. A. Zhou and J. W. Peng, *Scalarization of set-valued optimization problems with generalized cone subconvexlikeness in real ordered linear spaces*, J. Optim. Theory Appl. **154** (2012), no. 3, 830–841.

[20] G. M. Ziegler, *Lectures on Polytopes*, Springer, New York, 1995.