数理解析研究所講究録 第2113巻 2019年 101-112

The n-th relative operator entropies and the n-th residual relative operator entropy

Hiroshi Isa*, Eizaburo Kamei,
Hiroaki Tohyama*and Masayuki Watanabe*
(*Maebashi Institute of Technology)

1. Introduction.

A と B はヒルベルト空間上のstrictly positive operator とする．path $A \natural_t B$ を次のように定義する ([2, 3, 10, etc.])．

$$A \natural_t B \equiv A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^t A^{\frac{1}{2}},\ t \in \mathbb{R}.$$

path $A \natural_t B$ は，2点 $A = A \natural_0 B$ と $B = A \natural_1 B$ を通る．t の範囲が $[0,1]$ のとき，path $A \natural_t B$ は weighted geometric operator mean $A \sharp_t B$ に一致する (cf. [11])．ここで，$A \natural_t B = B \natural_{1-t} A$ となることに注意する．

Fujii と Kamei [1] は Ulmann [14] による relative entropy の operator version として relative operator entropy を次のように与えた．

$$S(A|B) \ \equiv\ \lim_{t\to 0}\frac{A \sharp_t B - A}{t} \ =\ A^{\frac{1}{2}}(\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}}.$$

これは Nakamura と Umegaki [12] によって与えられたoperator entropy $-A\log A$ の relative version である．

Furuta [5] は generalized relative operator entropy を次のように定義した．

$$S_\alpha(A|B) \ \equiv\ A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^\alpha(\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}},\quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Yanagi, Kuriyama と Furuichi [15] は次に示す Tsallis relative operator entropy を導入した．

$$(*1) \qquad T_\alpha(A|B) \equiv \frac{A \sharp_\alpha B - A}{\alpha},\ \alpha \in (0,1].$$

ここで，$T_0(A|B) \equiv \lim_{\alpha\to 0} T_\alpha(A|B) = S(A|B)$ である．(*1) において，$A \sharp_\alpha B$ を $A \natural_\alpha B$ と置き換えることで Tsallis relative operator entropy における α の範囲を $[0,1]$ から $\mathbb{R}$ へと拡張する．本報告を通して，$T_\alpha(A|B)$ はこの拡張された範囲のものを指している．

これらの relative operator entropy $S(A|B)$，$S_\alpha(A|B)$，$T_\alpha(A|B)$ の間には次に示す不等式が成立することを示した [6]．

Proposition A. *For* $\alpha \in (0,1)$,

$$S(A|B) \le T_\alpha(A|B) \le S_\alpha(A|B) \le -T_{1-\alpha}(B|A) \le S_1(A|B).$$

$S(A|B)$ と $S_\alpha(A|B)$ は

$$\frac{d}{dt}\, A \natural_t B \Big|_{t=0} = S(A|B), \qquad \frac{d}{dt}\, A \natural_t B \Big|_{t=\alpha} = S_\alpha(A|B)$$

であるから，それぞれ path $A \natural_t B$ の $t=0$ と $t=\alpha$ での変化率を与えている．また，$T_\alpha(A|B)$ はpath $A \natural_t B$ の 区間 $[0,\alpha]$ での平均変化率と見なすことができる．Figure 1 に $S(A|B)$，$S_\alpha(A|B)$，$T_\alpha(A|B)$ のイメージを示す．

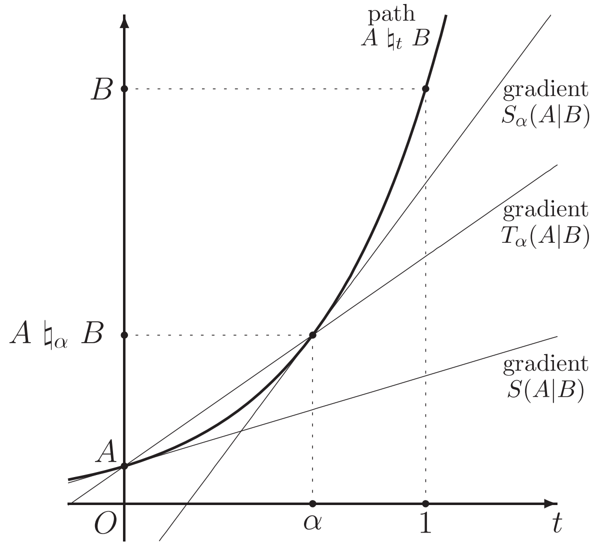

Figure 1. An image of $S(A|B)$, $S_\alpha(A|B)$ and $T_\alpha(A|B)$.

Section 2 では n 次 Tsallis relative operator entropy $T_\alpha^{[n]}(A|B)$ を帰納的に定義し，さらに $S^{[n]}(A|B) \equiv \lim_{\alpha\to 0} T_\alpha^{[n]}(A|B)$ として n 次 relative operator entropy を導入すると共にそれらの性質を調べる．その結果，$A \natural_t B$ について，Taylor 展開に相当する展開式が得られる．このとき，t^k の係数として $S^{[k]}(A|B)(k=1,2,\cdots,n-1)$ が現れ，剰余項に $T_\alpha^{[n]}(A|B)$ が現れる．このことに基づいて，$S^{[n]}(A|B)$ を一般化した n 次 generalized relative operator entropy $S_\alpha^{[n]}(A|B)$ と $T_\alpha^{[n]}(A|B)$ を一般化した n 次 residual relative operator entropy を導入する．さらに，$S^{[n]}(A|B)$，$T_\alpha^{[n]}(A|B)$，$S_\alpha^{[n]}(A|B)$ について，Proposition A に対応する不等式に関して考察する．

Proposition A の不等式に現れる2つの項の差を operator valued divergence として与えた [9]．ここでは，特に $\Delta_1 \equiv T_\alpha(A|B) - S(A|B)$ を扱う．Petz は operator valued divergence $D_{FK}(A|B) = B - A - S(A|B)$ を導入した [13]．これを Petz-Bregman divergence と呼ぶ [7]．これは，Δ_1 において，$\alpha = 1$ としたものとみることができる．$D_{FK}(A|B)$ のイメージを Figure 2 に示す．さらに，$D_{FK}(A|B)$ を用いて，Δ_1 は

$$(*2) \qquad \Delta_1 = \frac{1}{\alpha} D_{FK}(A|A \natural_\alpha B)$$

と表される [9]．

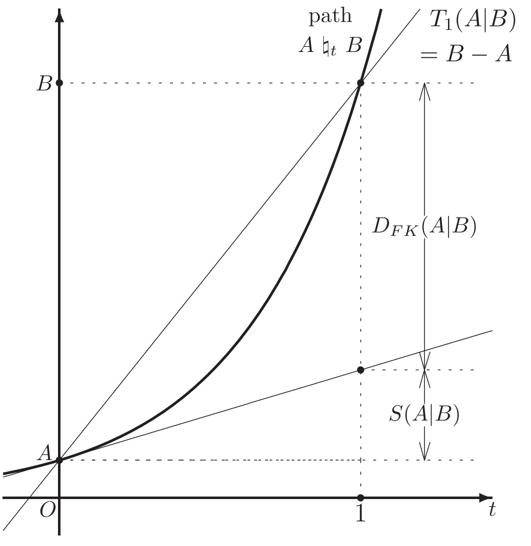

Figure 2. An interpretation of $D_{FK}(A|B)$.

これらに基づいて，Section 3 では n 次の relative operator entropy の差を n 次の operator valued divergence とする．ここでは，n 次 Petz-Bregman divergence を

$$D_{FK}^{[n]}(A|B) \equiv T_1^{[n]}(A|B) - S^{[n]}(A|B)$$

とし，Δ_1 に相当する n 次の operator valued divergence として

$$\mathscr{D}_\alpha^{[n]}(A|B) \equiv T_\alpha^{[n]}(A|B) - S^{[n]}(A|B)$$

を導入し，これらの性質を調べる．また，$\mathscr{D}_\alpha^{[n]}(A|B)$ と $D_{FK}^{[n]}(A|B)$ との関係を示す．

2. Properties of the n-th relative operator entropies.

Section 1 で述べたように，$T_t(A|B) = \dfrac{A \natural_t B - A}{t}$ は区間 $[0, t]$ での path の平均変化率である．この見方に基づいて，n 次 Tsallis relative operator entropy $T_t^{[n]}(A|B)$ を帰納的に定義する．

Definition 1. *Let $n \in \mathbb{N}$ and $t \in \mathbb{R}$. We define the n-th Tsallis relative operator entropy $T_t^{[n]}(A|B)$ as follows:*

$$T_t^{[1]}(A|B) \equiv T_t(A|B), \quad t \in \mathbb{R}$$

and for $n \geq 2$

$$T_t^{[n]}(A|B) \equiv \frac{T_t^{[n-1]}(A|B) - T_0^{[n-1]}(A|B)}{t} \quad \textit{if } t \neq 0,$$
$$T_0^{[n]}(A|B) \equiv \lim_{t \to 0} T_t^{[n]}(A|B).$$

$T_0^{[n]}(A|B)$ を n 次 relative operator entropy と呼び，$S^{[n]}(A|B)$ と表す．

path 上の任意の 2 点 $A \natural_r B$ と $A \natural_s B$ での Tsallis relative operator entropy と generalized relative operator entropy については次のことがわかっている [8]．

Theorem B. *Let* r,s *and* $t \in \mathbb{R}$. *Then*

(1) $$T_t(A \natural_r B|A \natural_s B) = (s-r)(A \natural_r B)A^{-1}T_{(s-r)t}(A|B),$$

(2) $$S_t(A \natural_r B|A \natural_s B) = (s-r)(A \natural_r B)A^{-1}S_{(s-r)t}(A|B).$$

In particular,

$$S(A \natural_r B|A \natural_s B) = (s-r)(A \natural_r B)A^{-1}S(A|B).$$

同様の結果が n 次 Tsallis relative operator entropy と n 次 relative operator entropy についてもいえる．

Theorem 2. *Let* r,s *and* $t \in \mathbb{R}$. *Then*

$$T_t^{[n]}(A \natural_r B|A \natural_s B) = (s-r)^n(A \natural_r B)A^{-1}T_{(s-r)t}^{[n]}(A|B) \quad \textit{for all } n \in \mathbb{N}.$$

In particular,

$$S^{[n]}(A \natural_r B|A \natural_s B) = (s-r)^n(A \natural_r B)A^{-1}S^{[n]}(A|B) \quad \textit{for all } n \in \mathbb{N}.$$

Proof. n に関する帰納法により証明する．

Theorem B より，$n=1$ のときに成立していることはわかっている．$n \geq 2$ として，$n-1$ のときには成立していると仮定すると，$t \neq 0$ ならば

$$\begin{aligned}
T_t^{[n]}(A \natural_r B|A \natural_s B) &= \frac{T_t^{[n-1]}(A \natural_r B|A \natural_s B) - T_0^{[n-1]}(A \natural_r B|A \natural_s B)}{t} \\
&= \frac{(s-r)^{n-1}(A \natural_r B)A^{-1}T_{(s-r)t}^{[n-1]}(A|B) - (s-r)^{n-1}(A \natural_r B)A^{-1}T_0^{[n-1]}(A|B)}{t} \\
&= (s-r)^n(A \natural_r B)A^{-1}\frac{T_{(s-r)t}^{[n-1]}(A|B) - T_0^{[n-1]}(A|B)}{(s-r)t} \\
&= (s-r)^n(A \natural_r B)A^{-1}T_{(s-r)t}^{[n]}(A|B)
\end{aligned}$$

であり，n についても成立する．また，

$$\begin{aligned}
T_0(A \natural_r B|A \natural_s B) &= \lim_{t\to 0} T_t^{[n]}(A \natural_r B|A \natural_s B) \\
&= \lim_{t\to 0}(s-r)^n(A \natural_r B)A^{-1}T_{(s-r)t}^{[n]}(A|B) = (s-r)^n(A \natural_r B)A^{-1}T_0(A|B)
\end{aligned}$$

であるから，$t=0$ でも成立する． □

n 次 Tallis relative operator entropy $T_t^{[n]}(A|B)$ と n 次 relative operator entropy $S^{[n]}(A|B)$ は，次のように表すことができる．

Proposition 3. *Let $n \in \mathbb{N}$. Then*

(1) $T_t^{[n]}(A|B) = \dfrac{1}{t^n}\left(A \natural_t B - A - \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} t^k S^{[k]}(A|B)\right)$ *for* $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$,

(2) $S^{[n]}(A|B) = \dfrac{1}{n!}A(A^{-1}S(A|B))^n$.

Proof. nに関する帰納法により証明する．

$n=1$のとき
$$T_t^{[1]}(A|B) = T_t(A|B) = \frac{A \natural_t B - A}{t}$$
であるから，(1) は成立する．また
$$S^{[1]}(A|B) = S(A|B)$$
であるから，(2) も成立している．

$n \geq 2$ として $n-1$ までは (1) と (2) が成立していると仮定する．$t \neq 0$ のときは
$$\begin{aligned}
T_t^{[n]}(A|B) &= \frac{T_t^{[n-1]}(A|B) - T_0^{[n-1]}(A|B)}{t} \\
&= \frac{1}{t}\left(\frac{1}{t^{n-1}}\left(A \natural_t B - A - \sum_{k=1}^{n-2} t^k S^{[k]}(A|B)\right) - S^{[n-1]}(A|B)\right) \\
&= \frac{1}{t^n}\left(A \natural_t B - A - \sum_{k=1}^{n-1} t^k S^{[k]}(A|B)\right)
\end{aligned}$$
であるから，(1) は成立する．さらに $S^{[k]}(A|B)$ $(k \leq n-1)$ に (2) を用いることにより
$$\begin{aligned}
T_t^{[n]}(A|B) &= \frac{1}{t^n}\left(A \natural_t B - A - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^k}{k!}A(A^{-1}S(A|B))^k\right) \\
&= \frac{1}{t^n}A^{\frac{1}{2}}\left((A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^t - I - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^k}{k!}(\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^k\right)A^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$
である．したがって，(2) を示すためには，$a > 0$ について
$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t^n}\left(a^t - 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^k}{k!}(\log a)^k\right) = \frac{1}{n!}(\log a)^n$$
であることを示せばよい．Taylor の定理より，ある $\theta \in (0,1)$ を用いて
$$a^t = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^k}{k!}(\log a)^k + \frac{t^n}{n!}a^{\theta t}(\log a)^n$$
と書ける．したがって
$$\frac{1}{t^n}\left(a^t - 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^k}{k!}(\log a)^k\right) = \frac{1}{n!}a^{\theta t}(\log a)^n$$

と書け，$0 \leq |\theta t| \leq |t|$ より

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{n!}a^{\theta t}(\log a)^n \;=\; \frac{1}{n!}(\log a)^n$$

である． $\square$

Proposition 3に基づいて，$T_t^{[n]}(A|B)$ と $S^{[n]}(A|B)$ について考察する．まず，$A \natural_t B$ の k 次導関数は次のようになることがわかる．

Lemma 4. *Let $k \in \mathbb{N}$. Then*

$$\frac{d^k}{dt^k}A \natural_t B = (A \natural_t B)(A^{-1}S(A|B))^k.$$

Proof. $a > 0$ に対して，$\frac{d^k}{dt^k}a^t = a^t(\log a)^k$ であるから

$$\begin{aligned}
\frac{d^k}{dt^k}A \natural_t B &= A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^t(\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^k A^{\frac{1}{2}}\\
&= A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^t A^{\frac{1}{2}}A^{-1}A^{\frac{1}{2}}(\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}}A^{-1}A^{\frac{1}{2}}(\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}}\\
&\quad \cdots A^{-1}A^{\frac{1}{2}}(\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}}\\
&= (A \natural_t B)(A^{-1}S(A|B))(A^{-1}S(A|B))\cdots(A^{-1}S(A|B))\\
&= (A \natural_t B)(A^{-1}S(A|B))^k.
\end{aligned}$$

$\square$

Proposition 3 の (1) を書き直すと

$$(\diamond 1) \qquad A \natural_t B = A + \sum_{k=1}^{n-1} t^k S^{[k]}(A|B) + t^n T_t^{[n]}(A|B)$$

であり，Proposition 3 の (2) と Lemma 4 より $S^{[k]}(A|B) = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dt^k}A \natural_t B\Big|_{t=0}$ である．したがって，$(\diamond 1)$ は，k 次 relative operator entropy $S^{[k]}(A|B)$ を t^k の係数とする $A \natural_t B$ の0の周囲での Taylor 展開に相当する式とみなすことができる．また，このとき，$T_t^{[n]}(A|B)$ は $(\diamond 1)$ の剰余項を $\frac{1}{t^n}$ 倍したものとして現れている．

そこで，$A \natural_t B$ の α の周囲での Taylor展開を用いて，k 次 relative operator entropy $S^{[k]}(A|B)$ の一般化としての k 次 generalized relative operator entropy $S_\alpha^{[k]}(A|B)$ と，n 次 Tallis relative operator entropy $T_t^{[n]}(A|B)$ の一般化としての n 次 residual relative operator entropy を導入する．$A \natural_t B$ の α の周囲での Taylor 展開は Lemma 4 より

$$(\diamond 2) \qquad A \natural_t B = A \natural_\alpha B + \sum_{k=1}^{n-1}(t-\alpha)^k \frac{1}{k!}(A \natural_\alpha B)(A^{-1}S(A|B))^k + R_n$$

である．

Definition 5. *Let $k \in \mathbb{N}$ and $t, \alpha \in \mathbb{R}$. We define the k-th generalized relative operator entropy $S_\alpha^{[k]}(A|B)$ as follows:*

$$S_\alpha^{[k]}(A|B) \;\equiv\; \frac{1}{k!}(A \natural_\alpha B)(A^{-1}S(A|B))^k.$$

$S_\alpha^{[k]}(A|B)$ は $S^{[k]}(A|B)$ により，次のように表すことができる．

Proposition 6. *Let $k \in \mathbb{N}$ and $\alpha \in \mathbb{R}$. Then*

$$S_\alpha^{[k]}(A|B) \;=\; (A \natural_\alpha B)A^{-1}S^{[k]}(A|B).$$

Proof.

$$\begin{aligned}S_\alpha^{[k]}(A|B) &= \frac{1}{k!}(A \natural_\alpha B)(A^{-1}S(A|B))^k \\ &= (A \natural_\alpha B)A^{-1}\frac{1}{k!}A(A^{-1}S(A|B))^k \\ &= (A \natural_\alpha B)A^{-1}S^{[k]}(A|B).\end{aligned}$$

□

Theorem 2 と同様の結果が n 次 generalized relative operator entropy $S_\alpha^{[n]}(A|B)$ についてもいえる.

Theorem 7. *Let $r,\, s,\, \alpha \in \mathbb{R}$. Then*

$$S_\alpha^{[n]}(A \natural_r B|A \natural_s B) = (s-r)^n S_{(1-\alpha)r+s\alpha}^{[n]}(A|B) \quad \textit{for all } n \in \mathbb{N}.$$

Proof. Path $A \natural_t B$ の性質 (cf. [2, 4, 8])

$$(A \natural_r B) \natural_t (A \natural_s B) = A \natural_{(1-t)r+st} B$$

と Proposition 6，Theorem 2 より

$$\begin{aligned}S_\alpha^{[n]}(A \natural_r B|A \natural_s B) &= ((A \natural_r B) \natural_\alpha (A \natural_s B))\,(A \natural_r B)^{-1}S^{[n]}(A \natural_r B|A \natural_s B) \\ &= \left(A \natural_{(1-\alpha)r+s\alpha} B\right)(A \natural_r B)^{-1}(s-r)^n(A \natural_r B)A^{-1}S^{[n]}(A|B) \\ &= (s-r)^n \left(A \natural_{(1-\alpha)r+s\alpha} B\right) A^{-1}S^{[n]}(A|B) \\ &= (s-r)^n S_{(1-\alpha)r+s\alpha}^{[n]}(A|B).\end{aligned}$$

□

Collorary 8. *Let $n \in \mathbb{N}$ and $\alpha \in \mathbb{R}$. Then*

$$S_\alpha^{[n]}(B|A) = (-1)^n S_{1-\alpha}^{[n]}(A|B).$$

次に，($\diamond$2) の剰余項 R_n を用いて，$T_t^{[n]}(A|B)$ を一般化した n 次 residual relative operator entropy を $\dfrac{1}{(t-\alpha)^n}R_n$ として定義する．Proposition 6，Proposition 3 より

$$\begin{aligned}R_n \;&=\; A \natural_t B - A \natural_\alpha B - \sum_{k=1}^{n-1}(t-\alpha)^k S_\alpha^{[k]}(A|B) \\ &=\; A \natural_t B - A \natural_\alpha B - \sum_{k=1}^{n-1}(t-\alpha)^k (A \natural_\alpha B)A^{-1}S^{[k]}(A|B) \\ &=\; A \natural_t B - A \natural_\alpha B - (A \natural_\alpha B)A^{-1}\sum_{k=1}^{n-1}(t-\alpha)^k S^{[k]}(A|B) \\ &=\; (t-\alpha)^n(A \natural_\alpha B)A^{-1}\frac{1}{(t-\alpha)^n}\left(A \natural_{t-\alpha} B - A - \sum_{k=1}^{n-1}(t-\alpha)^k S^{[k]}(A|B)\right) \\ &=\; (t-\alpha)^n(A \natural_\alpha B)A^{-1}T_{t-\alpha}^{[n]}(A|B)\end{aligned}$$

であるから，n 次 residual relative operator entropy は具体的には $(A \natural_\alpha B)A^{-1}T^{[n]}_{t-\alpha}(A|B)$ と表せる．

Table 1 に n 次 residual relative operator entropy と n 次 relative operator entropy $S^{[n]}(A|B)$，n 次 generalized relative operator entropy $S^{[n]}_\alpha(A|B)$，n 次 Tsallis relative operator entropy $T^{[n]}_t(A|B)$ の関係を示す．

Table 1

$$
\begin{array}{ccc}
\dfrac{1}{(t-\alpha)^n}R_n & \xrightarrow[\alpha=0]{} & T^{[n]}_t(A|B) \\
\downarrow_{t\to\alpha} & & \downarrow_{t\to 0} \\
S^{[n]}_\alpha(A|B) & \xrightarrow[\alpha=0]{} & S^{[n]}(A|B)
\end{array}
$$

$S(A|B)$，$T_\alpha(A|B)$，$S_\alpha(A|B)$ の間には Proposition A の不等式が成立していた．ここで定義した n 次 relative operator entropy $S^{[n]}(A|B)$，n 次 Tsallis relative operator entropy $T^{[n]}_\alpha(A|B)$，n 次 generalized relative operator entropy $S^{[n]}_\alpha(A|B)$ の間には次に示す不等式が成立する．

Theorem 9. *Let $n \in \mathbb{N}$ and $\alpha \in [0,1]$. Then the following hold:*

(1) *If n is odd,*

$$S^{[n]}(A|B) \le T^{[n]}_\alpha(A|B) \le S^{[n]}_\alpha(A|B) \le -T^{[n]}_{1-\alpha}(B|A) \le S^{[n]}_1(A|B).$$

(2) *If n is even,*

$$S^{[n]}(A|B) \le T^{[n]}_\alpha(A|B) \le S^{[n]}_\alpha(A|B) \le T^{[n]}_{1-\alpha}(B|A) \le S^{[n]}_1(A|B) \quad \textit{for } A \le B$$

and

$$S^{[n]}(A|B) \ge T^{[n]}_\alpha(A|B) \ge S^{[n]}_\alpha(A|B) \ge T^{[n]}_{1-\alpha}(B|A) \ge S^{[n]}_1(A|B) \quad \textit{for } A \ge B.$$

Proof. Propotision 3 と Propotision 6 より

$$
\begin{aligned}
S^{[n]}(A|B) &= \frac{1}{n!}A(A^{-1}S(A|B))^n, \\
T^{[n]}_\alpha(A|B) &= \frac{1}{\alpha^n}\left(A \natural_\alpha B - A - \sum_{k=1}^{n-1}\alpha^k S^{[k]}(A|B)\right), \\
S^{[n]}_\alpha(A|B) &= \frac{1}{n!}(A \natural_\alpha B)(A^{-1}S(A|B))^n
\end{aligned}
$$

である．

まず，n が奇数または $A \le B$ ならば

$$S^{[n]}(A|B) \le T^{[n]}_\alpha(A|B) \le S^{[n]}_\alpha(A|B)$$

が成立することを示す．この不等式は

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n!}(\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^n &\le \frac{1}{\alpha^n}\left((A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^\alpha - I - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{\alpha^k}{k!}(\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^k\right) \\
&\le \frac{1}{n!}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^\alpha(\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^n
\end{aligned}
$$

と同値であり，$A \leq B$ であることと $A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}} \geq I$ であることは同値であるから，n が奇数または $x \geq 1$ ならば

$$\frac{1}{n!}(\log x)^n \leq \frac{1}{\alpha^n}\left(x^\alpha - 1 - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{\alpha^k}{k!}(\log x)^k\right) \leq \frac{1}{n!}x^\alpha(\log x)^n$$

が成立することを示せばよい．一方，Taylor の定理より，ある $\theta \in (0,1)$ を用いて

$$x^\alpha \;=\; 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{\alpha^k}{k!}(\log x)^k + \frac{\alpha^n}{n!}x^{\theta\alpha}(\log x)^n,$$

すなわち

$$\frac{1}{\alpha^n}\left(x^\alpha - 1 - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{\alpha^k}{k!}(\log x)^k\right) = \frac{1}{n!}x^{\theta\alpha}(\log x)^n$$

と書けるから，上の不等式は

$$(\bullet) \qquad (\log x)^n \leq x^{\theta\alpha}(\log x)^n \leq x^\alpha(\log x)^n$$

と同値である．$(\bullet)$ は，$x \geq 1$ ならば，全ての $n \in \mathbb{N}$ について成立し，n が奇数ならば，$0 < x \leq 1$ でも，$1 \geq x^{\theta\alpha} \geq x^\alpha$，$\log x \leq 0$ だから成立する．以上より

$$(\star 1) \qquad n \text{ が奇数または } A \leq B \text{ ならば} \quad S^{[n]}(A|B) \leq T_\alpha^{[n]}(A|B) \leq S_\alpha^{[n]}(A|B)$$

が成立する．

$1-\alpha \in [0,1]$ であるから，上の結果より，n が奇数または $A \geq B$ ならば

$$S^{[n]}(B|A) \leq T_{1-\alpha}^{[n]}(B|A) \leq S_{1-\alpha}^{[n]}(B|A)$$

が成立する．したがって，Collorary 8 より

$$(\star 2) \quad n \text{ が奇数または } A \geq B \text{ ならば} \quad (-1)^n S_1^{[n]}(A|B) \leq T_{1-\alpha}^{[n]}(B|A) \leq (-1)^n S_\alpha^{[n]}(A|B)$$

も成立する．

また，n が偶数かつ $0 < x \leq 1$ ならば

$$(\log x)^n \geq x^{\theta\alpha}(\log x)^n \geq x^\alpha(\log x)^n$$

が成立するので，上と同様にして

$$(\star 3) \qquad n \text{ が偶数かつ } A \geq B \text{ ならば} \quad S^{[n]}(A|B) \geq T_\alpha^{[n]}(A|B) \geq S_\alpha^{[n]}(A|B)$$

が成立し，Collorary 8 より

$$(\star 4) \qquad n \text{ が偶数かつ } A \leq B \text{ ならば} \quad S_1^{[n]}(A|B) \geq T_{1-\alpha}^{[n]}(B|A) \geq S_\alpha^{[n]}(A|B)$$

が成立する．

したがって，n が奇数ならば，$(\star 1)$，$(\star 2)$ より，(1) の不等式が成立する．n が偶数ならば，$(\star 1)$，$(\star 4)$ より，(2) の $A \leq B$ のときの不等式が成立し，$(\star 2)$，$(\star 3)$ より，(2) の $A \geq B$ のときの不等式が成立する． □

$A \leq B$ であるときには Proposition A と同様の関係が成立する．

Corollary 10. *Let* $\alpha \in [0,1]$. *If* $A \le B$, *then*

$$S^{[n]}(A|B) \le T_\alpha^{[n]}(A|B) \le S_\alpha^{[n]}(A|B) \le (-1)^n T_{1-\alpha}^{[n]}(B|A) \le S_1^{[n]}(A|B)$$

hold for any $n \in \mathbb{N}$.

3. The n-th operator valued divergence.

このsectionでは，Section 2で定義した$S^{[n]}(A|B)$，$S_\alpha^{[n]}(A|B)$，$T_\alpha^{[n]}(A|B)$を用いて，n次のoperator valued divergenceを導入し，その性質を調べる．

$S(A|B) = S^{[1]}(A|B)$，$S_\alpha(A|B) = S_\alpha^{[1]}(A|B)$，$T_\alpha(A|B) = T_\alpha^{[1]}(A|B)$ である．$\Delta_1 = T_\alpha^{[1]}(A|B) - S^{[1]}(A|B)$であり，また，$\alpha = 1$ のときは $D_{FK}(A|B)$ であるから，これらを1次のoperator valued divergence とみなし，n次のrelative operator entropyの差をn次のoperator valued divergence とする．まず，n次 Petz-Bregman divergence $D_{FK}^{[n]}(A|B)$ を次のように定義する．

Definition 11. *Let* $n \in \mathbb{N}$. *We define the* n*-th Petz-Bregman divergence* $D_{FK}^{[n]}(A|B)$ *as follows*:

$$D_{FK}^{[n]}(A|B) \equiv T_1^{[n]}(A|B) - S^{[n]}(A|B).$$

Theorem 9より，n次 Petz-Bregman divergence $D_{FK}^{[n]}(A|B)$ は次の性質を持つ．

Proposition 12. *Let* $n \in \mathbb{N}$. *Then*

(1) $D_{FK}^{[n]}(A|B) \ge 0$ *if* n *is odd*,

(2) $D_{FK}^{[n]}(A|B) \ge 0$ *if* n *is even and* $A \le B$ *and* $D_{FK}^{[n]}(A|B) \le 0$ *if* n *is even and* $A \ge B$.

さらに，Proposition 3 より，$D_{FK}^{[n]}(A|B)$ は次のように表される．

Theorem 13. *For any* $n \in \mathbb{N}$, *the following holds*:

$$D_{FK}^{[n]}(A|B) = B - A - \sum_{k=1}^{n} S^{[k]}(A|B).$$

また，n次のoperator valued divergenceの一つとして，$\mathscr{D}_\alpha^{[n]}(A|B)$を次で定義する．

Definition 14. *For* $n \in \mathbb{N}$ *and* $\alpha \in [0,1]$, *we define*

$$\mathscr{D}_\alpha^{[n]}(A|B) \equiv T_\alpha^{[n]}(A|B) - S^{[n]}(A|B).$$

ここで，$\mathscr{D}_\alpha^{[1]}(A|B) = \Delta_1$，$\mathscr{D}_1^{[n]}(A|B) = D_{FK}^{[n]}(A|B)$である．$\mathscr{D}_\alpha^{[n]}(A|B)$ も $D_{FK}^{[n]}(A|B)$ と同様の性質を持つ．

Proposition 15. *Let* $n \in \mathbb{N}$. *Then*

(1) $\mathscr{D}_\alpha^{[n]}(A|B) \ge 0$ *if* n *is odd*,

(2) $\mathscr{D}_\alpha^{[n]}(A|B) \ge 0$ *if* n *is even and* $A \le B$ *and* $\mathscr{D}_\alpha^{[n]}(A|B) \le 0$ *if* n *is even and* $A \ge B$.

Theorem 16. *Let* $\alpha \in (0,1]$. *Then the following holds for* $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathscr{D}_\alpha^{[n]}(A|B) = \frac{1}{\alpha^n}\left(A \natural_\alpha B - A - \sum_{k=1}^{n} \alpha^k S^{[k]}(A|B)\right).$$

Remark. $\mathscr{D}_\alpha^{[n]}(A|B) = \alpha T_\alpha^{[n+1]}(A|B)$，特に $\mathscr{D}_0^{[n]}(A|B) = O$ である．

$\alpha \neq 0$ のとき，$\mathscr{D}_\alpha^{[n]}(A|B)$ は次に示す性質を持つ．

Theorem 17. *Let n be a fixed natural number and α be a fixed real number in* $(0,1]$. *Then the following holds*:

$$\mathscr{D}_\alpha^{[n]}(A|B) = O \ if\ and\ only\ if\ \ A = B.$$

上の Remark より Theorem 17 が成立することを示すためには，次の proposition が成立することを示せば十分である．

Proposition 18. *Let n be a fixed natural number and α be a fixed real number in* $[0,1]$. *Then the following holds*:

$$T_\alpha^{[n]}(A|B) = O \ if\ and\ only\ if\ \ A = B.$$

Proof. Proposition 3 より，$A = B$ ならば $T_\alpha^{[n]}(A|B) = O$ がであることは自明である．そこで，$T_\alpha^{[n]}(A|B) = O$ を仮定し， $A = B$ であることを示す．

$\alpha = 0$ のときは

$$T_0^{[n]}(A|B) = S^{[n]}(A|B) = \frac{1}{n!}A(A^{-1}S(A|B))^n = O$$

であるから，$\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}} = O$ であり，$A = B$ であることは明らかである．

$\alpha \neq 0$ のとき，Proposition 3 より

$$\begin{aligned} A \natural_\alpha B &= A + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha^k S^{[k]}(A|B) \\ &= A^{\frac{1}{2}} \left(I + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha^k}{k!} (\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^k \right) A^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

である．$A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}$ の任意の spectrum を x とすると $x > 0$ であり

$$x^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha^k}{k!} (\log x)^k$$

が成り立っている．一方，Taylor の定理より，ある $\theta \in (0,1)$ を用いて

$$x^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha^k}{k!} (\log x)^k + \frac{\alpha^n}{n!} x^{\theta\alpha} (\log x)^n$$

と書くことができる．これらの 2 つの式より $\dfrac{\alpha^n}{n!} x^{\theta\alpha} (\log x)^n = 0$ がいえ，$x = 1$ である．x は任意であるので，$A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}} = I$ であり，$A = B$ を得る． □

Section 1 で述べたように，Δ_1 は Petz-Bregman divergence $D_{FK}(A|B)$ を用いて (∗2) のように表される．したがって，$\mathscr{D}_\alpha^{[1]}(A|B)$ と $D_{FK}^{[1]}(A|B)$ の間に次の関係があることがわかる．

$$\mathscr{D}_\alpha^{[1]}(A|B) = \frac{1}{\alpha} D_{FK}^{[1]}(A|A \natural_\alpha B).$$

$\mathscr{D}_\alpha^{[n]}(A|B)$ と $D_{FK}^{[n]}(A|B)$ についても上と同様のことがいえる．

Proposition 19. *Let $\alpha \in (0,1]$. Then the following holds for all $n \in \mathbb{N}$:*

$$\mathscr{D}_{\alpha}^{[n]}(A|B) = \frac{1}{\alpha^n} D_{FK}^{[n]}(A|A \natural_{\alpha} B).$$

Proof. Theorem 16，Theorem 2，Theorem 13 より

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_{\alpha}^{[n]}(A|B) &= \frac{1}{\alpha^n}\left(A \natural_{\alpha} B - A - \sum_{k=1}^{n} \alpha^k S^{[k]}(A|B)\right) \\ &= \frac{1}{\alpha^n}\left(A \natural_{\alpha} B - A - \sum_{k=1}^{n} S^{[k]}(A|A \natural_{\alpha} B)\right) = \frac{1}{\alpha^n} D_{FK}^{[n]}(A|A \natural_{\alpha} B). \qquad \square\end{aligned}$$

参考文献

[1] J. I. Fujii and E. Kamei, Relative operator entropy in noncommutative information theory, Math. Japon., **34**(1989), 341–348.

[2] J. I. Fujii and E. Kamei, Interpolational paths and their derivatives, Math. Japon., **39**(1994), 557–560.

[3] J. I. Fujii and E. Kamei, Path of Bregman-Petz operator divergence, Sci. Math. Jpn., **70**(2009), 329–333.

[4] J. I. Fujii, Interpolationality for symmetric operator means, Sci. Math. Jpn., **75**(2012), 267–274.

[5] T. Furuta, Parametric extensions of Shannon inequality and its reverse one in Hilbert space operators, Linear Algebra Appl., **381**(2004), 219–235.

[6] H. Isa, M. Ito, E. Kamei, H. Tohyama and M. Watanabe, Relative operator entropy, operator divergence and Shannon inequality, Sci. Math. Jpn., **75**(2012), 289–298.

[7] H. Isa, M. Ito, E. Kamei, H. Tohyama and M. Watanabe, On relations between operator valued α-divergence and relative operator entropies, Sci. Math. Jpn., **78**(2015), 215–228. (online: e-2015 (2015), 215–228.)

[8] H. Isa, M. Ito, E. Kamei, H. Tohyama and M. Watanabe, Expanded relative operator entropies and operator valued α-divergence, J. Math. Syst. Sci., **5**(2015), 215–224.

[9] H. Isa, M. Ito, E. Kamei, H. Tohyama and M. Watanabe, Some operator divergences based on Petz-Bregman divergence, Sci. Math. Jpn., **80**(2017), 161–170.

[10] E. Kamei, Paths of operators parametrized by operator means, Math. Japon., **39**(1994), 395–400.

[11] F. Kubo and T. Ando, Means of positive linear operators, Math Ann., **248**(1980), 205–224.

[12] M. Nakamura and H. Umegaki, A note on the entropy for operator algebras, Proc. Jap. Acad., **37**(1961), 149–154.

[13] D. Petz, Bregman divergence as relative operator entropy, Acta Math. Hungar., **116**(2007), 127–131.

[14] A. Uhlmann, Relative entropy and Wigner-Yanase-Dyson-Lieb concavity in an interpolation theory, Commun. Math. Phys., **54**(1977), 22–32.

[15] K. Yanagi, K. Kuriyama and S. Furuichi, Generalized Shannon inequalities based on Tsallis relative operator entropy, Linear Algebra Appl., **394**(2005), 109–118.