数理解析研究所講究録 第2113巻 2019年 148-155

作用素ノルム不等式について
On Operator Norm Inequalities

渚 勝 (千葉大学大学院理学研究院)
Masaru NAGISA
(Graduate School of Science, Chiba University)

1 Introduction

行列やヒルベルト空間上の有界線形作用素に対するユニタリ不変ノルムに関係する不等式は多くの研究がある [2]. ここでは 日合-幸崎による方法 [3] を用いて議論をすすめるので, まずその概略を述べることにする.

$f \in C(0,\infty)^+_{1,sym}$ によって, f は $(0,\infty)$ から $(0,\infty)$ への連続写像で, 条件 $(f(1)=1)$ と対称条件 $(f(t)=tf(1/t))$ を満たすものとする. このような $f \in C(0,\infty)^+_{1,sym}$ が与えられたとき, 次の定義式で f に関連した 2 変数関数 $M_f : (0,\infty)\times(0,\infty) \to (0,\infty)$ が得られる:

$$M_f(s,t) = tf(s/t), \quad s,t \in (0,\infty).$$

このとき M_f は以下のような性質を持つ:

$$M_f(s,t) > 0, \quad M_f(1,1) = 1,$$
$$M_f(\alpha s, \alpha t) = \alpha M_f(s,t) \quad (\alpha > 0), \quad \text{and } M_f(s,t) = M_f(t,s).$$

$N \times N$ 行列 A に対して左から, 右からの作用として作用素 L_A, R_A を定義する.

$$L_A : \mathbb{M}_N(\mathbb{C}) \ni X \mapsto AX \in \mathbb{M}_N(\mathbb{C}),$$
$$R_A : \mathbb{M}_N(\mathbb{C}) \ni X \mapsto XA \in \mathbb{M}_N(\mathbb{C}).$$

トレースを内積と考えれば $(\mathbb{M}_N(\mathbb{C}), \mathrm{Tr})$ は Hilbert 空間なので, L_A, R_A は $(\mathbb{M}_N(\mathbb{C}), \mathrm{Tr})$ 上の可換な作用素になる.

$f, g \in C(0,\infty)^+_{1,sym}$ に対して

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{f(e^x)}{g(e^x)}$$

が正定値関数になることと, $H, K, X \in \mathbb{M}_N(\mathbb{C})$, $H, K \geq 0$ に対して

$$M_f(L_H, R_K)X = \int_{-\infty}^{\infty} H^{is}(M_g(L_H, R_K)X)K^{-is}d\mu(s)$$

という積分表示が得られることと, この積分表示から, ユニタリ不変ノルムに対して

$$|||M_f(L_H, R_K)X||| \leq |||M_g(L_H, R_K)X|||$$

が成立すること同値であることが示されている.

ここで, 関数 $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ が正定値であるとは, 任意の $n \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{pmatrix} \phi(x_1 - x_1) & \phi(x_1 - x_2) & \cdots & \phi(x_1 - x_n) \\ \phi(x_2 - x_1) & \phi(x_2 - x_2) & \cdots & \phi(x_2 - x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi(x_n - x_1) & \phi(x_n - x_2) & \cdots & \phi(x_n - x_n) \end{pmatrix} \geq 0$$

となることである. また, $|||\cdot|||$ がユニタリ不変ノルムであるとは, ユニタリ $U, V \in \mathbb{M}_N(\mathbb{C})$ に対して

$$|||UXV||| = |||X||| \qquad (X \in \mathbb{M}_N(\mathbb{C}))$$

となることである.

[3] において, いろいろな不等式が示されているが $-\infty \leq a \leq \infty$ に対して

$$f_a(x) = \frac{a-1}{a}\frac{x^a - 1}{x^{a-1} - 1} \in C(0,\infty)^+_{1,sym}$$

を対象に,

$$M_a(s,t) = M_{f_a}(s,t) = \frac{a-1}{a}\frac{s^a - t^a}{s^{a-1} - t^{a-1}}$$

に関係する次のようなユニタリ不変ノルム不等式が得られている:

$$-\infty \leq a < b \leq \infty \ \Rightarrow\ |||M_a(L_H, R_K)X||| \leq |||M_b(L_H, R_K)X|||.$$

とくに $a = 1/2$, $b = 2$ のときは, McIntosh の不等式

$$|||H^{1/2}XK^{1/2}||| \leq \frac{1}{2}|||HX + XK|||$$

を導く.

ユニタリ不変ノルムの不等式は, 関数の正定値性から導かれるので, 無限分解可能性を議論することは有効である. 関数 $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ が無限分解可能であるとは, 任意の正の実数 a に対して $\phi(x)^a$ が正定値になることをいう.

[4], [5], [6] においては, 多くの関数の無限分解可能性について調べられていて、

$$\frac{x}{\sinh x}, \quad \frac{1}{\cosh x + \beta}\ (-1 < \beta \leq 1)$$
$$\frac{\sinh ax}{\sinh bx}\ (0 \leq a \leq b), \quad \frac{\cosh ax}{\cosh bx}\ (0 \leq a \leq b)$$
$$\frac{(a-1)b \sinh ax \sinh(b-1)x}{a(b-1)\sinh(a-1)x \sinh bx}\ (0 \leq a \leq b)$$

というような関数が無限分解可能であることが示されている.

[1] においては, $\alpha = (a_1, a_2, \ldots a_n)$, $\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ として

$$\begin{aligned} f_{\alpha,\beta}(x) &= x^{\gamma(\alpha,\beta)} \prod_{i=1}^{n} \frac{|b_i|(x^{|a_i|} - 1)}{|a_i|(x^{|b_i|} - 1)} \in C(0,\infty)^{+}_{1,sym} \\ &= x^{1/2} \prod_{i=1}^{n} \frac{b_i(x^{a_i/2} - x^{-a_i/2})}{a_i(x^{b_i/2} - x^{-b_i/2})} \end{aligned}$$

に関係するユニタリ不変ノルム不等式を考察した. ただし $\gamma(\alpha, \beta) = (1 - |\alpha| + |\beta|)/2$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} |a_i|$.

以下 $a_i, b_i \geq 0$ とする. これに関連して関数

$$\varphi(x) = \frac{\sinh a_1 x \sinh a_2 x \cdots \sinh a_n x}{\sinh b_1 x \sinh b_2 x \cdots \sinh b_n x}$$

の無限分解可能性を調べ, 次のような結果を得ている.

Theorem 1 (Albania-Nagisa)**.** $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$, $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq 0$ とするとき

(1) $a_1 > b_1$ のとき φ は正定値ではない.

(2) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n > b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ のとき φ は正定値ではない.

(3) $a_1 + a_2 + \cdots + a_k \leq b_1 + b_2 + \cdots + b_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ のとき φ は無限分解可能である.

(4) $n = 2$ のとき, φ が無限分解可能であるための同値条件は $a_1 \leq b_1$ かつ $a_1 + a_2 \leq b_1 + b_2$ である.

2 主結果

Theorem 1 で得られた結果を用いて, ユニタリ不変ノルム不等式を導くことを考える. まず幸崎 [6] で示された命題

$$\frac{1}{2}(1-\frac{1}{n}) \leq \alpha \leq \frac{1}{2}(1+\frac{1}{n}) \ \Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{2}|||H^{\alpha}XK^{1-\alpha} + H^{1-\alpha}XK^{\alpha}||| \leq \frac{1}{2^n}|||\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}H^{m/n}XK^{(n-m)/n}|||$$

を考察する.

$\alpha = \frac{1}{2}$ のとき, 上の不等式は

$$|||H^{1/2}XK^{1/2}||| \leq \frac{1}{2^n}|||B_{1/n}(L_H, R_K)X|||,$$

ここで

$$B_{1/n}(s,t) = (s^{1/n} + t^{1/n})^n$$

というように幾何平均と二項平均との関係式を表している.

このノルム不等式を導くために中心となる関数として

$$g_{n,a}(x) = \frac{\cosh ax}{\cosh^n(x/n)} \quad (n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R})$$

とおく. $\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$ より

$$g_{n,a}(x) = \frac{2^n \sinh 2ax \sinh^n(x/n)}{2\sinh ax \sinh^n(2x/n)} = \frac{2^n \sinh 2|a|x \sinh(x/n)\cdots\sinh(x/n)}{2\sinh|a|x \sinh(2x/n)\cdots\sinh(2x/n)}$$

となるので $|a| > \frac{1}{n}$ のとき Theorem 1(1) より $g_{n,a}$ は正定値でないことがわかる. $|a| \leq \frac{1}{n}$ のときは, $|a| \leq \frac{1}{2n}$ のときと $\frac{1}{2n} < |a| \leq \frac{1}{n}$ のときの場

合に分けて Theorem 1(3) より $g_{n,a}$ は無限分解可能であることがわかる. したがって

$$|a| \leq \frac{1}{n} \ \Leftrightarrow\ g_{n,a} \text{ は正定値}$$

となる.

ここで $a = 2\alpha - 1$ とおくと

$$\frac{1}{2}(1-\frac{1}{n}) \leq \alpha \leq \frac{1}{2}(1+\frac{1}{n}) \ \Leftrightarrow\ |a| \leq \frac{1}{n} \ \Leftrightarrow\ g_{n,a} \text{ は正定値}$$

がわかる. また, このとき

$$\begin{aligned} g_{n,a}(x) &= \frac{\sinh 2ax}{2\sinh ax} \Big/ \frac{\sinh(2x/n)\cdots\sinh(2x/n)}{2^n \sinh(x/n)\cdots\sinh(x/n)} \\ &= \frac{f_{(2a),(a)}(e^{2x})}{f_{(2/n,\ldots,2/n),(1/n,\ldots,1/n)}(e^{2x})} \end{aligned}$$

が正定値なので

$$|||M_{(2a),(a)}(L_H, R_K)X||| \leq |||M_{(\frac{2}{n},\ldots,\frac{2}{n}),(\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n})}(L_H, R_K)X|||$$

が成立する. ただし

$$\begin{aligned} M_{(2a),(a)}(s,t) &= \frac{1}{2}(st)^{(1-a)/2}(s^a + t^a), \\ M_{(\frac{2}{n},\ldots,\frac{2}{n}),(\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n})}(s,t) &= \frac{1}{2^n}(s^{1/n} + t^{1/n})^n. \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}|||H^{(1+a)/2}XK^{(1-a)/2} + H^{(1-a)/2}XK^{(1+a)/2}||| \\ &\qquad \leq \frac{1}{2^n}|||\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}H^{m/n}XK^{(n-m)/n}||| \end{aligned}$$

$a = 2\alpha - 1$ を置き換えれば

$$\frac{1}{2}|||H^{\alpha}XK^{1-\alpha} + H^{1-\alpha}XK^{\alpha}||| \leq \frac{1}{2^n}|||\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}H^{m/n}XK^{(n-m)/n}|||$$

が導かれる.

上の証明において, Theorem 1 の正定値性の判定を用いたが, 無限分解可能性を用いていないので, これを用いることを考える. $\alpha = (a_1, a_2, \ldots a_n)$, $\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, $a \in \mathbb{R}$ に対して

$$f_{\alpha,\beta,a}(x) = x^{\gamma(\alpha,\beta,a)} \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{|b_i|(x^{|a_i|}-1)}{|a_i|(x^{|b_i|}-1)} \right)^a \in C(0,\infty)^+_{1,sym}$$
$$= x^{1/2} \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{b_i(x^{a_i/2}-x^{-a_i/2})}{a_i(x^{b_i/2}-x^{-b_i/2})} \right)^a$$

ただし $\gamma(\alpha,\beta,a) = (1-a(|\alpha|-|\beta|))/2$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^n |a_i|$. このとき

$$M_{\alpha,\beta,a}(s,t) = tf_{\alpha,\beta,a}(s/t) = (st)^{\gamma(\alpha,\beta,a)} \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{|b_i|(s^{|a_i|}-t^{|a_i|})}{|a_i|(s^{|b_i|}-t^{|b_i|})} \right)^a$$

となる. $r \in \mathbb{R}$ に対して $r\alpha = (ra_1, ra_2, \ldots, ra_n)$ を表すものとする. このとき, 次の命題が得られる.

Theorem 2. $r \geq 1$, $a_1 \geq a_2 \geq \cdots a_n \geq 0$ で $a_1 + \cdots + a_k \geq a_{k+1} + \cdots + a_n$ を満たしているとする. $0 < b \leq a$ とし, $\alpha = (a_1, \ldots, a_k)$, $\beta = (a_{k+1}, \ldots, a_n)$ とおくと

$$|||M_{r\beta,\beta,b}(L_H, R_K)X||| \leq |||M_{r\alpha,\alpha,a}(L_H, R_K)X|||$$

が成立する. ここで, $X, H, K \in \mathbb{M}_N(\mathbb{C})$, $H, K \geq 0$ であり $|||\cdot|||$ は $\mathbb{M}_N(\mathbb{C})$ 上の任意のユニタリ不変ノルム.

証明の概略を述べる前に, 行列の正値性の性質より, 正定値関数の正数倍や, 正定値関数の和, 積、各点収束極限関数がまた正定値関数になることに注意しておく.

$r \geq 1$ に注意すると

$$(\alpha, r\beta) = (a_1, \ldots, a_k, ra_{k+1}, \ldots, ra_n) \preceq_w (ra_1, \ldots, ra_k, a_{k+1}, \ldots, a_n) = (r\alpha, \beta)$$

が成立することがわかる. ただし, $(c_1, \ldots, c_n) \preceq_w (d_1, \ldots, d_n)$ とは, 大きな数の順に並び変えて

$$\sum_{i=1}^{k} c_i^{\downarrow} \leq \sum_{i=1}^{k} d_i^{\downarrow} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

となることである．したがって Theorem 1(3) より

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{\sinh a_i x}{\sinh r a_i x} \prod_{i=k+1}^{n} \frac{\sinh r a_i x}{\sinh a_i x}$$

が無限分解可能であることがわかる．したがって $b > 0$ に対して

$$\left(\prod_{i=1}^{k} \frac{\sinh a_i x}{\sinh r a_i x} \right)^{b} \left(\prod_{i=k+1}^{n} \frac{\sinh r a_i x}{\sinh a_i x} \right)^{b}$$

は正定値である．また

$$\frac{\sinh a_i x}{\sinh r a_i x} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

も無限分解可能であるから, $a \geq b$ より

$$\left(\frac{\sinh a_i x}{\sinh r a_i x} \right)^{a-b} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

も正定値であり

$$\left(\prod_{i=1}^{k} \frac{\sinh a_i x}{\sinh r a_i x} \right)^{a-b} \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{\sinh a_i x}{\sinh r a_i x} \right)^{b} \left(\prod_{i=k+1}^{n} \frac{\sinh r a_i x}{\sinh a_i x} \right)^{b}$$

も正定値になる．つまり

$$\left(\prod_{i=1}^{k} \frac{\sinh a_i x}{\sinh r a_i x} \right)^{a} \left(\prod_{i=k+1}^{n} \frac{\sinh r a_i x}{\sinh a_i x} \right)^{b}$$

は正定値である．このとき

$$\begin{aligned} \frac{f_{r\beta,\beta,b}(e^{2x})}{f_{r\alpha,\alpha,a}(e^{2x})} &= \left(\prod_{i=k+1}^{n} \frac{a_i \sinh r a_i x}{r a_i \sinh a_i x} \right)^{b} \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{r a_i \sinh a_i x}{a_i \sinh r a_i x} \right)^{a} \\ &= r^{ka-(n-k)b} \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{\sinh a_i x}{\sinh r a_i x} \right)^{a} \left(\prod_{i=k+1}^{n} \frac{\sinh r a_i x}{\sinh a_i x} \right)^{b} \end{aligned}$$

が正定値なので, 求めるユニタリ不変ノルム不等式が得られることになる．

すでに知られている不等式であるが, 自然数 n, m に対して $m < n$ とし

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_m = \frac{1}{m}, a_{m+1} = a_{m+2} = \cdots = a_{m+n} = \frac{1}{n}$$

とし $r = 2$, $a = b = 1$ に対して Theorem 2 を適用すると

$$\frac{1}{2^n}|||\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}H^{i/n}XK^{(n-i)/n}||| \leq \frac{1}{2^m}|||\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}H^{j/m}XK^{(m-j)/m}|||$$

が得られる. このようにに多くのノルム不等式を導き出すことができる.

参考文献

[1] Albania, I. N. and Nagisa, M., Some families of operator norm inequalities, Linear Algebra Its Appl. 534(2017), 102–121.

[2] Bhatia, R., *Positive Definite Matrices*, Princeton University Press, 2007.

[3] Hiai, F. and Kosaki, H., Means for matrices and comparison of their norms, Indiana Univ. Math. J. 48(1999), 899–936. 1

[4] Kosaki, H., On infinite divisibility of positive definite functions arising from operator means, J. Funct. Anal. 254(2008), 84–108.

[5] Kosaki, H., Strong monotonicity for various means, J. Funct. Anal. 267(2014), 1917–1958.

[6] Kosaki, H., A certain generalization of the Heinz inequality for positive operators, Internat. J. Math. 27(2016), 1650008, 17pp.

[7] Nagisa, M., Some formulas of operator norm inequalities, in preparation.