数理解析研究所講究録 第2114巻 2019年 42-47

Weak Duality Theorem and Detecting Infeasibility (弱双対定理と実行不能性判定)

Toshihiro Kosaki (小崎　敏寛) *
Stera Link Co.,Ltd. (ステラリンク株式会社)

概 要

実行不能性判定を考える．弱双対定理がなりたつとき，双対問題の最適値が∞ならば主問題は実行不能である．そこで，弱双対定理がなりたつ問題のクラスを調べる．

1 はじめに

与えられた最適化問題の実行不能性を判定する実行不能性判定を考える．実行不能性判定に関する論文は，ADMM としては [2, 6]，内点法としては [10, 11] がある．

本稿の構成は次のようになる．2 節で一般的に，弱双対定理と主問題の実行不能性を述べる．以降で問題を具体的に考えて，弱双対定理を証明する．3 節では線形計画問題，4 節では二次錐計画問題，5 節では Extended Lorentz Cone Programming，6 節では複素最適化問題，7 節では四元最適化問題を扱う．8 節で結論と今後の課題を述べる．

2 弱双対定理と実行不能性

最小化問題である主問題 (P) と最大化問題である双対問題 (D) について，弱双対定理：主問題の実行可能解の目的関数 p と双対問題の実行可能解の目的関数 d について，

$$p \geq d \tag{1}$$

がなりたつ．

問題 (P) は，実行可能ならば，実行可能領域で目的関数が有限の値を取る点の集合が空でないと仮定する．この仮定より，実行可能解の目的関数値が ∞ のみからなる病的な場合は無くなる．

もし，双対問題の最適値が ∞ ならば，主問題は実行不能である．以下で具体的に問題を考えて，弱双対定理を証明する．

3 LP

線形計画問題 (LP) を考える．主問題は

$$\min\ c^T x \text{ s.t. } Ax = b\ x \geq 0. \tag{P1}$$

*(T. Kosaki) toshihirokosaki@gmail.com Stera Link, Co., Ltd. 1-1-18 Sakae, Ichinomiya, Aichi 491-0858, Japan.

双対問題は

$$\max\ b^T y \text{ s.t. } A^T y + z = c\ z \geq 0. \tag{D1}$$

目的関数の差は次のようになる.

$$\begin{aligned} c^T x - b^T y &= (A^T y + z)^T x - (Ax)^T y \\ &= x^T z \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

したがって，弱双対理がなりたつ.

4 SOCP

二次錐計画問題 (SOCP)[1, 7] を考える．主問題は

$$\min\ c^T x \text{ s.t. } Ax = b\ x_0 \geq \|x_{1:n}\|_2. \tag{P2}$$

双対問題は

$$\max\ b^T y \text{ s.t. } A^T y + z = c\ z_0 \geq \|z_{1:n}\|_2. \tag{D2}$$

目的関数の差は次のようになる.

$$\begin{aligned} c^T x - b^T y &= (A^T y + z)^T x - (Ax)^T y \\ &= x^T z \\ &= x_0 z_0 + x_{1:n}^T z_{1:n} \\ &\geq \|x_{1:n}\|_2 \|z_{1:n}\|_2 + x_{1:n}^T z_{1:n} \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

したがって，弱双対理がなりたつ.

5 Extended Lorentz Cone Programming

Extended Lorentz Cone Programming[8, 9] を考える．主問題は

$$\min\ c^T \tilde{x} \text{ s.t. } A\tilde{x} = b\ \tilde{x} \in L := \{(x, u) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q : x \geq \|u\|_2 e\}. \tag{P3}$$

双対問題は

$$\max\ b^T \tilde{y} \text{ s.t. } A^T \tilde{y} + \tilde{z} = c\ \tilde{z} \in M := \{(z, t) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q : z^T e \geq \|t\|_2,\ z \geq 0\}. \tag{D3}$$

目的関数の差は次のようになる.

$$\begin{aligned} c^T \tilde{x} - b^T \tilde{y} &= (A^T \tilde{y} + \tilde{z})^T \tilde{x} - (A\tilde{x})^T \tilde{y} \\ &= \tilde{x}^T \tilde{z} \\ &= x^T z + u^T t \\ &\geq (\|u\|_2 e)^T z + u^T t \\ &\geq \|u\|_2 \|t\|_2 + u^T t \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

したがって，弱双対理がなりたつ.

6 複素最適化問題

複素最適化問題 [4, 5] を考える．複素数ベクトルの性質は Appendix A を参照．主問題は

$$\min\ \langle c, x\rangle \text{ s.t. } \langle a_i, x\rangle = b_i\ i = 1, \dots, m, \quad x \geq 0. \tag{P4}$$

双対問題は

$$\max\ b^T y \text{ s.t. } A^T y + z = c\ z \geq 0. \tag{D4}$$

ただし，A^T は n 次元列ベクトル a_i を m 列並べてできる行列．目的関数の差は次のようになる.

$$\begin{aligned}
\langle c, x\rangle - b^T y &= \langle A^T y + z, x\rangle - \sum_{i=1}^m \langle a_i, x\rangle y_i \\
&= \langle A^T y, x\rangle + \langle z, x\rangle - \sum_{i=1}^m \langle a_i, x\rangle y_i \\
&= \langle [y_1 a_1 + \cdots + y_m a_m], x\rangle + \langle z, x\rangle - \sum_{i=1}^m \langle a_i, x\rangle y_i \\
&= \langle y_1 a_1, x\rangle + \cdots + \langle y_m a_m, x\rangle + \langle z, x\rangle - \sum_{i=1}^m \langle a_i, x\rangle y_i \\
&= y_1 \langle a_1, x\rangle + \cdots + y_m \langle a_m, x\rangle + \langle z, x\rangle - \sum_{i=1}^m \langle a_i, x\rangle y_i \\
&= \langle x, z\rangle \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

したがって，弱双対理がなりたつ.

7 四元最適化問題

四元最適化問題を考える．四元数ベクトルの性質は Appendix B を参照．主問題は

$$\min\ \langle c, x\rangle \text{ s.t. } \langle a_i, x\rangle = b_i\ i = 1, \dots, m, \quad x \geq 0. \tag{P5}$$

双対問題は

$$\max\ b^T y \text{ s.t. } A^T y + z = c\ \ z \geq 0. \tag{D5}$$

ただし，A^T は n 次元列ベクトル a_i を m 列並べてできる行列．目的関数の差は次のようになる．

$$\begin{aligned}
\langle c, x\rangle - b^T y &= \langle A^T y + z, x\rangle - \sum_{i=1}^{m}\langle a_i, x\rangle y_i \\
&= \langle A^T y, x\rangle + \langle z, x\rangle - \sum_{i=1}^{m}\langle a_i, x\rangle y_i \\
&= \langle [y_1 a_1 + \cdots + y_m a_m], x\rangle + \langle z, x\rangle - \sum_{i=1}^{m}\langle a_i, x\rangle y_i \\
&= \langle y_1 a_1, x\rangle + \cdots + \langle y_m a_m, x\rangle + \langle z, x\rangle - \sum_{i=1}^{m}\langle a_i, x\rangle y_i \\
&= y_1\langle a_1, x\rangle + \cdots + y_m\langle a_m, x\rangle + \langle z, x\rangle - \sum_{i=1}^{m}\langle a_i, x\rangle y_i \\
&= \langle x, z\rangle \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

したがって，弱双対定理がなりたつ．

8　結論と今後の課題

いくつかの問題について弱双対定理を証明した．これにより，双対問題の最適値が∞ならば，主問題が実行不能であることが分かる．

今後の課題をしては，実行不能性を判定するアルゴリズムを考えることがある．

参考文献

[1] F. Alizadeh and D. Goldfarb, Second-order cone programming, Mathematical Programming, 95, 3-51, 2003.

[2] G. Banjac, P. Goulart, B. Stellato, and S. Boyd, Infeasibility detection in the alternating direction method of multipliers for convex optimization, Optimization Online, 2017.

[3] 堀 源一郎, ハミルトンと四元数, 海鳴社, 2007.

[4] 小崎 敏寛, 複素最適化問題の弱双対定理, 統計数理研究所共同研究リポート 387, 最適化：モデリングとアルゴリズム 29, 154-161, 2017.

[5] 久志本 茂, 最適化問題の基礎, 森北出版株式会社, 1979.

[6] Y. Liu, E. K. Ryu, and W. Yin, A new use of Douglas-Rachford splitting and ADMM for identifying infeasible, unbounded, and pathological conic programs, arXiv, 2017.

[7] M. Lobo, L. Vandenberghe, S. Boyd, and H. Lebret, Applications of second-order cone programming, Linear Algebra and its Applications, 284, 193-228, 1998.

[8] S. Z. Németh and G. Zhang, Extended Lorentz cones and mixed complementarity problems, Journal of Global Optimization, 62, 443-457, 2015.

[9] S. Z. Németh and G. Zhang, Extended Lorentz cones and variational inequalities on cylinders, Journal of Optimization Theory and Applications, 168, 756-768, 2016.

[10] M. J. Todd, Detecting infeasibility in infeasible-interior-point methods for optimization, Foundations of computational mathematics, edited by F. Cucker, R. DeVore, P. Olver, and E. Suli, 157-192, 2004.

[11] M. J. Todd, Dual versus primal-dual interior-point methods for linear and conic programming, Mathematical Programming, 111, 301-313, 2008.

[12] 矢野 忠, 四元数の発見, 海鳴社, 2014.

A 複素数ベクトルの性質

複素数ベクトル x と $y \in \mathbb{C}^n$ に対して，$\langle x, y\rangle := \dfrac{\bar{x}^T y + x^T \bar{y}}{2}$ とする．ただし $\bar{(\cdot)}$ は複素共役．$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は実数値をとり，

$$\langle (x+y), z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle,\ \langle x, (y+z)\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle,$$

$$\text{実数 } \lambda \in \mathbb{R} \text{ について，} \langle \lambda x, y\rangle = \langle x, \lambda y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle,$$

$$\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle,$$

複素数ベクトルの不等号を実部ベクトルと虚部ベクトルが非負で決める．

$$\mathbb{C}^n \ni s, t \geq 0 \text{ ならば } \langle s, t\rangle \geq 0$$

がなりたつ．

B 四元数ベクトルの性質

四元数 [3, 12] のベクトルの性質を考える．
まず，一変数の時について考える．四元数 $x \in \mathbb{H}$ を考える．

$$x = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \tag{2}$$

と表記する．ここで，α, β, γ, $\delta \in \mathbb{R}$,

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1. \tag{3}$$

$$\text{スカラー部}: S(x) = \alpha, \tag{4}$$

$$\text{ベクトル部}: V(x) = (\beta, \gamma, \delta) \tag{5}$$

とする．四元数が非負であることを次のように決める．

$$x \geq 0 \overset{\text{def}}{=} S(x) \geq 0 \text{ かつ } V(x) \geq 0 \tag{6}$$

とする．

多変数の時（ベクトル）について考える．四元数ベクトル $x,\ y \in \mathbb{H}^n$ に対して，次のものを考える．

$$\langle x, y \rangle := \frac{S(\bar{x}^T y + x^T \bar{y})}{2} \tag{7}$$

ただし $\bar{(\cdot)}$ は共役．$\langle \cdot, \cdot \rangle$ は実数値をとり，

$$\begin{gathered}\langle (x+y), z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle,\ \langle x, (y+z) \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle, \\ \text{実数 } \lambda \in \mathbb{R} \text{ について，} \langle \lambda x, y \rangle = \langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle, \\ \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \\ x, y \geq 0 \Rightarrow \langle x, y \rangle \geq 0\end{gathered}$$

がなりたつ．