数理解析研究所講究録 第2114巻 2019年 165-170

二つの非線形写像に関する総和不可能誤差付きの共通不動点近似
(APPROXIMATION OF A COMMON FIXED POINT OF TWO NONLINEAR MAPPINGS WITH NONSUMMABLE ERRORS)

茨木貴徳 (TAKANORI IBARAKI)
横浜国立大学 教育学部
(COLLEGE OF EDUCATION, YOKOHAMA NATIONAL UNIVERSITY)

梶葉駿介 (SHUNSUKE KAJIBA)
横浜国立大学大学院 教育学研究科
(GRADUATE SCHOOL OF EDUCATION, YOKOHAMA NATIONAL UNIVERSITY)

1. はじめに

E を実バナッハ空間とし, C を E の空でない閉凸部分集合とする. C から E への写像 T が非拡大写像 (nonexpansive mapping) であるとは任意の C の元 x, y に対して $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ が成り立つことである. 不動点問題とは写像 T において $z = Tz$ を満たす C の元 z を見つけるという問題である. 不動点問題は凸最小化問題, 均衡問題や変分不等式問題などの多くの非線形問題を一般化した問題でもある.

距離による不動点理論において非拡大写像の不動点近似法は重要な問題の一つであり近年, 多くの研究者により研究され, 急速に発展してきた. その中でも高橋 - 竹内 - 窪田 [20] によって提案された収縮射影法 (shrinking projection method) は注目すべき結果である.

定理 1.1 ([20]). H を実ヒルベルト空間とし, C を H の空でない閉凸部分集合とし, T を $F(T) = \{z \in C : z = Tz\}$ が空でないような C から C への非拡大写像とする. また, $\{\alpha_n\}$ を $[0, a[$ の実数列とする. ただし $0 < a < 1$ である. x_0 を H の任意の元とし点列 $\{x_n\}$ を次のように構成する : $C_1 = C$, $x_1 = P_{C_1}x_0$ とし, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} y_n &= \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)Tx_n, \\ C_{n+1} &= \{z \in C : \|z - y_n\| \leq \|z - x_n\|\} \cap C_n \\ x_{n+1} &= P_{C_{n+1}}x_0 \end{aligned}$$

とする. このとき, 点列 $\{x_n\}$ は $P_{F(T)}x_0$ に強収束する. ただし, P_K は H から H の空でない閉凸部分集合 K への距離射影とする.

なお, 高橋 - 竹内 - 窪田 [20] は論文の中で, 定理 1.1 より一般的な非拡大写像族の共通不動点への収束定理を得ている. この研究以降, 収縮射影法は多くの研究者により非拡大型非線形写像に関してヒルベルト空間やバナッハ空間等さまざまな空間で研究が行われて発展してきた ([3, 5, 7–11] 及びこれらの参考文献を参照). 一方, 収縮射影法は点列を構成する際に距離射影の正確な値を求める必要がある. しかし, 距離射影の正確な値を求めることは一般的に容易なことではない. そこでこの課題を解決すべく 2012 年に木村 [7] は測地距離空間において距離射影の値の計算に誤差を含んで点列を構成する収縮射影法を提案した. それ以来, この手法はヒ

2010 *Mathematics Subject Classification.* 47H05, 47H09, 47J25.
Key words and phrases. 共通不動点, 擬非拡大, (r) 型擬非拡大, 収縮射影法, 距離射影.

ルベルト空間やバナッハ空間で議論されてきた ([3,5,8–10] を参照). 特に, バナッハ空間においては一つの写像に関する不動点近似法が多く, 複数の写像に対する研究は少ない. そこで, 本論文では木村 [7] の手法を用いてバナッハ空間での非拡大型非線形写像に関する複数の写像の共通不動点への近似法を議論する.

2. 準備

E を実バナッハ空間とし, ノルムを $\|\cdot\|$ と表す. また, E^* を共役空間とし, $S_E := \{x \in E : \|x\| = 1\}$ とする. $\{x_n\}$ が x に強収束するとき $x_n \to x$, 弱収束するとき $x_n \rightharpoonup x$ と表す. E が狭義凸 (strictly convex) であるとは任意の $x, y \in S_E (x \neq y)$ に対し, 常に $\|x+y\| < 2$ が成り立つことである. E が一様凸 (uniformly convex) であるとは $\{x_n\}, \{y_n\}$ を $\lim_n \|x_n + y_n\| = 2$ となる S_E の点列としたとき, 常に $\lim_n \|x_n - y_n\| = 0$ が成り立つことである. また, E がカデック・クリー条件 (Kadec-Klee property) を満たすとは E の点列 $\{x_n\}$ が x に弱収束し, $\{\|x_n\|\}$ が $\|x\|$ へ収束するときには, 常に $\{x_n\}$ が x に強収束することをいう. バナッハ空間 E が滑らか (smooth) であるとは任意の $x, y \in S_E$ に対して

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t} \tag{2.1}$$

となる極限が存在することである. また, E が一様に滑らか (uniformly smooth) であるとは (2.1) に対して S_E の任意の元 x, y が一様に収束することである ([17,18] を参照).

E から E^* への双対写像 (duality mapping)J を E の元 x に対して

$$Jx = \{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

と定義する. 双対写像について以下の性質が知られている ([2,17–19] を参照).

(1) E の元 x に対して Jx は空でない;
(2) E の元 x, y, Jx の元 x^*, Jy の元 y^* に対して, $\langle x-y, x^*-y^* \rangle \geq 0$ が成り立つ;
(3) E が回帰的であるための必要十分条件は, J が全射になることである;
(4) E が滑らかであるための必要十分条件は, J が一価になることである;
(5) E が狭義凸であるための必要十分条件は, J が単射になることである;
(6) E が回帰的で滑らかな狭義凸なとき, E^* の双対写像 J_* は J の逆像となる. すなわち, $J_* = J^{-1}$ となる;
(7) E が一様に滑らかであるための必要十分条件は, E^* が一様凸となることである;
(8) E が一様凸であるならば E は回帰的, 狭義凸でカデック・クリー条件を満たしている.

E を回帰的で狭義凸バナッハ空間とし, C を E の空でない閉凸部分集合とする. このとき, 任意の E の元 x に対し

$$\|x - z\| = \min_{y \in C} \|x - y\|$$

となる C の元 z が一意に存在する. そこで, E の元 x に対し, このような C の元 z を対応させる写像を, E から C の上への距離射影 (metric projection) と呼び, P_C で表す.

E を回帰的なバナッハ空間とし, $\{C_n\}$ を E の空でない閉凸部分集合列とする. このとき, $\{C_n\}$ の強下極限集合 s-Li C_n と弱上極限集合 w-Ls C_n はそれぞれ

$$\begin{aligned} \text{s-Li}\, C_n &= \{x \in E : \exists \{x_n\} \subset E \ s.t.\ x_n \to x, x_n \in C_n (\forall n \in \mathbb{N})\} \\ \text{w-Ls}\, C_n &= \{x \in E : \exists \{x_{n_i}\} \subset E \ s.t.\ x_{n_i} \rightharpoonup x, x_{n_i} \in C_{n_i} (\forall i \in \mathbb{N})\} \end{aligned}$$

と定義する. また, C_0 が

$$\text{s-}\mathop{\text{Li}}_n C_n = C_0 = \text{w-Ls}\, C_n$$

を満たすとき, $\{C_n\}$ が C_0 にモスコ収束 (Mosco convergence) [15] するといい,

$$C_0 = \text{M-lim}\, C_n$$

と表す. 1984 年に塚田 [21] はバナッハ空間の距離射影に関して次の定理を証明した.

定理 2.1 ([21]). E を回帰的な狭義凸バナッハ空間とし, $\{C_n\}$ を E の空でない閉凸部分集合列とする. $\{C_n\}$ が C_0 にモスコ収束し, C_0 が空でないとき, E の任意の元 x に対し, $\{P_{C_n}x\}$ は $P_{C_0}x$ に弱収束する. さらに, E がカデック・クリー条件を満たせば, $\{P_{C_n}x\}$ は $P_{C_0}x$ に強収束する.

E を滑らかなバナッハ空間とし, $E \times E$ から $\mathbb{R}$ への関数 V を E の元 x, y に対して

$$V(x,y) = \|x\|^2 - 2\langle x, Jy\rangle + \|y\|^2$$

と定義する. この関数 V は以下の性質を満たす ([1,6,14] を参照).

(1) E の元 x, y に対して, $(\|x\| - \|y\|)^2 \le V(x,y) \le (\|x\| + \|y\|)^2$ である;
(2) E の元 x, y に対して, $V(x,y) + V(y,x) = 2\langle x - y, Jx - Jy\rangle$ である;
(3) E の元 x, y, z に対して, $V(x,y) = V(x,z) + V(z,y) + 2\langle x - z, Jz - Jy\rangle$ である;
(4) E が狭義凸のとき, E の元 x, y に対して, $V(x,y) = 0$ となる必要十分条件は $x = y$ となることである.

r を正の実数とし, $B_r = \{z \in E : \|z\| \le r\}$ とする. 本論文では以下に示す関数 $\underline{g}_r$, $\overline{g}_r$, $\underline{g}_r^*$ 及び $\overline{g}_r^*$ が重要な役割を果たす. これらの関数の存在性は, バナッハ空間とその共役空間の凸性から導き出すことができる.

定理 2.2 ([22]). E をバナッハ空間とし, r を正の実数としたとき, 以下が成立する.

(i) E が一様凸ならば, B_r の任意の元 x, y と, $[0,1]$ の任意の実数 α に対して,

$$\|\alpha x + (1-\alpha)y\|^2 \le \alpha\|x\|^2 + (1-\alpha)\|y\|^2 - \alpha(1-\alpha)\underline{g}_r(\|x-y\|)$$

を満たし, $\underline{g}_r(0) = 0$ となる $[0, 2r]$ から $[0, \infty[$ への連続で狭義単調増加な凸関数 $\underline{g}_r$ が存在する.

(ii) E が一様に滑らかならば, B_r の任意の元 x, y と, $[0,1]$ の任意の実数 α に対して,

$$\|\alpha x + (1-\alpha)y\|^2 \ge \alpha\|x\|^2 + (1-\alpha)\|y\|^2 - \alpha(1-\alpha)\overline{g}_r(\|x-y\|)$$

を満たし, $\overline{g}_r(0) = 0$ となる $[0, 2r]$ から $[0, \infty[$ への連続で狭義単調増加な凸関数 $\overline{g}_r$ が存在する.

定理 2.2 より以下を導くことができる.

定理 2.3. E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, r を正の実数としたとき, 以下が成立する.

(i) E が一様に滑らかならば, B_r の任意の元 x, y と, $[0,1]$ の任意の実数 α に対して,

$$\|\alpha Jx + (1-\alpha)Jy\|^2 \le \alpha\|x\|^2 + (1-\alpha)\|y\|^2 - \alpha(1-\alpha)\underline{g}_r^*(\|Jx-Jy\|)$$

を満たし, $\underline{g}_r^*(0) = 0$ となる $[0, 2r]$ から $[0, \infty[$ への連続で狭義単調増加な凸関数 $\underline{g}_r^*$ が存在する.

(ii) E が一様凸ならば, B_r の任意の元 x, y と, $[0,1]$ の任意の実数 α に対して,

$$\|\alpha Jx + (1-\alpha)Jy\|^2 \ge \alpha\|x\|^2 + (1-\alpha)\|y\|^2 - \alpha(1-\alpha)\overline{g}_r^*(\|Jx-Jy\|)$$

を満たし, $\overline{g}_r^*(0) = 0$ となる $[0, 2r]$ から $[0, \infty[$ への連続で狭義単調増加な凸関数 $\overline{g}_r^*$ が存在する.

定理 2.2, 定理 2.3 より以下の結果を得ることができる.

定理 2.4 ([10]). E を一様に滑らかな一様凸バナッハ空間とし, r を正の実数とする. このとき, 定理 2.2における関数 $\underline{g}_r$ 及び $\overline{g}_r$ は任意の $x, y \in B_r$ に対して

$$\underline{g}_r(\|x-y\|) \leq V(x,y) \leq \overline{g}_r(\|x-y\|)$$

を満たす.

定理 2.5 ([5]). E を一様に滑らかな一様凸バナッハ空間とし, r を正の実数とする. このとき, 定理 2.3における関数 $\underline{g}_r^*$ 及び $\overline{g}_r^*$ は任意の $x, y \in B_r$ に対して

$$\underline{g}_r^*(\|Jx-Jy\|) \leq V(x,y) \leq \overline{g}_r^*(\|Jx-Jy\|)$$

を満たす.

C を滑らかなバナッハ空間 E の空でない閉凸部分集合とする. また, $F(T)$ と $\hat{F}(T)$ をそれぞれ T の不動点集合, 漸近的不動点集合とする. C の元 p が写像 T の漸近的不動点 (asymptotic fixed point) であるとは $x_n \rightharpoonup p$ かつ $x_n - Tx_n \to 0$ を満たす C の点列 $\{x_n\}$ が存在することである ([13, 14, 16] を参照). このとき, C から E への写像 T が (r) 型擬非拡大写像 (relatively nonexpansive mapping) であるというのは $\hat{F}(T) = F(T) \neq \emptyset$ であり, 任意の $F(T)$ の元 u と C の元 x に対して

$$V(u, Tx) \leq V(u, x)$$

が成り立つことを言う ([13, 14] を参照). 本論文の主定理においては (r) 型擬非拡大写像の $\hat{F}(T) = F(T)$ という条件ではなく, より弱い条件である $I - T$ が原点において閉であるという条件を用いる. $I - T$ が原点において閉 (closed at zero) であるとは C の点列 $\{x_n\}$ が $x_n \to x_0$ かつ $x_n - Tx_n \to 0$ のとき, $x_0 - Tx_0 = 0$ が常に成り立つことである.

3. 主定理

本節では二つの非線形写像に関する誤差を含んだ収縮射影法について議論する.

定理 3.1 ([4]). E を一様に滑らかな一様凸バナッハ空間とし, C を E の空でない有界な閉凸部分集合とする. さらに, 正の実数 r に対して $C \subset B_r$ を満たすとする. T_1, T_2 を $F(T_1) \cap F(T_2) \neq \emptyset$ を満たす C から E への写像とし, $i \in \{1,2\}$ に対して $V(p, T_i x) \leq V(p, x)$ が任意の $p \in F(T_i)$ と $x \in E$ に対して成り立つとする. また, $\{\alpha_{n,i} : n \in \mathbb{N}, i \in \{1,2\}\}$ を $]0,1]$ の集合で, $\alpha_{n,1} + \alpha_{n,2} = 1$ を満たし, $i \in \{1,2\}$ に対して $\liminf_n \alpha_{n,i} > 0$ も満たすとする. $\{\delta_n\}$ は非負の実数列であり, $\delta_0 = \limsup_n \delta_n$ とする. E の元 u を任意にとり, 点列 $\{x_n\}$ を次のように構成する : $x_1 = x \in C, C_1 = C$ とし, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} y_n &= J^{-1}(\alpha_1 JT_1 x_n + \alpha_2 JT_2 x_n), \\ C_{n+1} &= \{z \in C : V(z, y_n) \leq V(z, x_n)\} \cap C_n, \\ x_{n+1} &\in \{z \in C : \|u - z\|^2 \leq d(u, C_{n+1})^2 + \delta_{n+1}\} \cap C_{n+1}, \end{aligned}$$

とする. このとき, $i \in \{1,2\}$ に対して

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n - T_i x_n\| \leq 2\underline{g}_r^{-1}\left(\frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2\underline{\alpha}_i}(\zeta_0 + \eta_0)\right) \tag{3.1}$$

となる. ただし,

$$\begin{gathered} \zeta_0 = \overline{g}_r(\underline{g}_r^{-1}(\delta_0)), \\ \eta_0 = \overline{\alpha}_1\overline{\alpha}_2\overline{g}_r^*\left(\underline{g}_r^{*-1}\Big(\frac{1}{\underline{\alpha}_1\underline{\alpha}_2}\overline{g}_r\big(\underline{g}_r^{-1}(\delta_0)\big) + \frac{8r}{\underline{\alpha}_1\underline{\alpha}_2}\underline{g}_r^{*-1}\big(\overline{g}_r(\underline{g}_r^{-1}(\delta_0))\big)\Big)\right), \\ \underline{\alpha}_i = \liminf_{n\to\infty} \alpha_{n,i}, \quad \overline{\alpha}_i = \limsup_{n\to\infty} \alpha_{n,i} \end{gathered}$$

とする．さらに，$\delta_0 = 0$ かつ $i \in \{1,2\}$ に対して $I - T_i$ が原点で閉のとき点列 $\{x_n\}$ は $P_{F(T_1)\cap F(T_2)}u$ に強収束する．

E がヒルベルト空間の場合は関数 $\underline{g}_r$, $\overline{g}_r$, $\underline{g}_r^*$ 及び $\overline{g}_r^*$ は，任意の正の実数 r に対して

$$\underline{g}_r = \overline{g}_r = \underline{g}_r^* = \overline{g}_r^* = |\cdot|^2$$

を満たす．また，定理 3.1 で扱っている写像はヒルベルト空間において擬非拡大写像 (quasi nonexpansive mapping) になる．C をヒルベルト空間 H の空でない閉凸部分集合としたとき，C から H の写像 T が擬非拡大写像であるとは，$F(T) \neq \emptyset$ であり，任意の $F(T)$ の元 z と H の元 x に対して，

$$\|z - Tx\| \leq \|z - x\|$$

を満たす写像である．これより定理 3.1 をヒルベルト空間で考えると以下の結果を得る．

系 3.2 ([4])**.** H をヒルベルト空間とし，C を H の空でない有界な閉凸部分集合とする．さらに，正の実数 r に対して $C \subset B_r$ を満たすとする．T_1, T_2 を $F(T_1) \cap F(T_2) \neq \emptyset$ を満たす C から H への擬非拡大写像とする．また，$\{\alpha_{n,i} : n \in \mathbb{N}, i \in \{1,2\}\}$ を $]0,1]$ の集合で，$\alpha_{n,1} + \alpha_{n,2} = 1$ を満たし，$i \in \{1,2\}$ に対して $\liminf_n \alpha_{n,i} > 0$ も満たすとする．$\{\delta_n\}$ は非負の実数列であり，$\delta_0 = \limsup_n \delta_n$ とする．H の元 u を任意にとり，点列 $\{x_n\}$ を次のように構成する：$x_1 = x \in C, C_1 = C$ とし，$n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} y_n &= \alpha_1 T_1 x_n + \alpha_2 T_2 x_n, \\ C_{n+1} &= \{z \in C : \|z - y_n\| \leq \|z - x_n\|\} \cap C_n, \\ x_{n+1} &\in \{z \in C : \|u - z\|^2 \leq d(u, C_{n+1})^2 + \delta_{n+1}\} \cap C_{n+1}, \end{aligned}$$

とする．このとき，$i \in \{1,2\}$ に対して

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n - T_i x_n\| \leq 2\sqrt{\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\underline{\alpha}_i}\left(1 + \frac{\overline{\alpha}_1\overline{\alpha}_2}{\underline{\alpha}_1\underline{\alpha}_2}\right)\right\}\delta_0 + \frac{4r\overline{\alpha}_1\overline{\alpha}_2}{\underline{\alpha}_i\underline{\alpha}_1\underline{\alpha}_2}\sqrt{\delta_0}} \tag{3.2}$$

となる．ただし，

$$\underline{\alpha}_i = \liminf_{n\to\infty} \alpha_{n,i}, \quad \overline{\alpha}_i = \limsup_{n\to\infty} \alpha_{n,i}$$

とする．さらに，$\delta_0 = 0$ かつ $i \in \{1,2\}$ に対して $I - T_i$ が原点で閉のとき点列 $\{x_n\}$ は $P_{F(T_1)\cap F(T_2)}u$ に強収束する．

注意 3.3. 系 *3.2* において (3.2) の右式は一見複雑だが，$\liminf_n \alpha_{n,i} = \limsup_n \alpha_{n,i}$ の場合，すなわち $\lim_n \alpha_{n,i} (= \alpha_i)$ が存在するときは，$i \in \{1,2\}$ に対して (3.2) 式は

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n - T_i x_n\| \leq 2\sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha_i}\right)\delta_0 + \frac{4r}{\alpha_i}\sqrt{\delta_0}}.$$

となり，より簡素な評価式で表すことができる．

4. まとめ

高橋 - 竹内 - 窪田 [20] が収縮射影法を提案してからこの手法を用いて様々な研究が行われてきた．特に，木村 - 高橋 [11] の研究は収束定理の証明にモスコ収束の概念を用いて，定理 2.1 を利用することによって証明が簡素になり，さらに定理の条件を弱めることにも成功した．一方，収縮射影法において点列を構成する際に必要な「距離射影の正確な値を求める」ことは一般に容易ではなく，この課題を克服するために木村 [7] は誤差を含んだ収縮射影法を提案した．点列を生成する各段階で誤差を含める場合，誤差が累積していくため，一般的に誤差数列の級数に対して，有界性の仮定が必要になる．しかし，この手法では点列を構成する際に含めた誤差数列

の級数が発散しても不動点近似において有用な結果を得ることができた．本論文では，木村 - 高橋 [11] と木村 [7] の手法を利用してバナッハ空間において二つの非拡大型非線形写像に関する共通不動点近似法を議論した．その点列の構成に関しては高阪 - 高橋 [12]，松下 - 高橋 [13, 14] の点列構成方法も参考にした．本論文の今後の課題としては，より一般的な n 個の非線形写像に関する共通不動点近似法を議論することがあげられる．また，定理 3.1 で示した (3.1) の右式をより簡略化することも課題の一つである．

参考文献

[1] Ya. I. Alber, *Metric and generalized projection operaters in Banach space: properties and applications.* Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone type, Dekker, New York, 1996. 15–50.

[2] I. Cioranescu *Geometry of Banach spaces, Duality Mappings and Nonlinear Problems*, Kluwer Academic Publishers, Dordecht, 1990.

[3] T. Ibaraki, *Approximation of zero point of monotome operators with nonsummable errors*, Fixed point Theory Appl., **2016**:48(2016), 14 pages.

[4] T. Ibaraki, S. Kajiba and Y. Kimura *Approximation of a common fixed point of two nonlinear mappings with nonsummable errors in a Banach space*, The 12th International Conference on Fixed Point Theory and Its Applications, Newcastle, New South Wales, July 24–28, 2017.

[5] T. Ibaraki and Y. Kimura, *Approximation of a fixed point of generalized firmly nonexpansive mappings with nonsummable errors*, Linear Nonlinear Anal., **2** (2016), 301–310.

[6] S. Kamimura and W. Takahashi, *Strong convergence of a proximal type algorithm in a Banach space*, SIAM J. Optim., **13** (2002), 938–945.

[7] Y. Kimura, *Approximation of a fixed point of nonexpansive mapping with nonsummable errors in a geodesic space*, Proceedings of the 10th International Conference on Fixed Point Theory and Its Applications, 2012, 157–164.

[8] 木村泰紀，「射影を用いた非線形射像の不動点近似法」数理解析研究所講究録，**1852** (2013), 8–14.

[9] Y. Kimura, *Approximation of a fixed point of nonlinear mappings with nonsummable errors in a Banach space*, Proceedings of the International Symposium on Banach and Function Spaces IV (Kitakyushu, Japan), (L. Maligranda, M. Kato, and T. Suzuki eds.), 2014, 303–311.

[10] Y. Kimura, *Approximation of a common fixed point of a finite family of nonexpansive mappings with nonsummable errors in a Hilbert space*, J. Nonlinear Convex Anal., **15** (2014), 429–436.

[11] Y. Kimura and W. Takahashi, *On a hybrid method for a family of relatively nonexpansive mappings in a Banach space*, J. Math. Anal. Appl., **357** (2009), 356–363.

[12] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Strong convergence of an iterative sequence for maximal monotone operators in a Banach space*, Abstr. Appl. Anal., **2004** (2004), 239–249.

[13] S. Matsushita and W. Takahashi *Weak and strong convergence theorem for relatively nonexpansive mappings in a Banach space*, Fixed Point Theory Appl., **2004** (2004), 37–47

[14] S. Matsushita and W. Takahashi, *A strong convergence theorem for relatively nonexpansive mappings in a Banach space*, J. Approx. Theory, **134** (2005), 257–266.

[15] U. Mosco, *Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities*, Adv. in Math., **3** (1969), 510–585.

[16] S. Reich, *A weak convergence theorem for the alternating method with Bregman distances*, Theory and Aplications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 178, Dekker, New York, 1996, 313–318.

[17] W. Takahashi *Nonlinear Functional Analysis - Fixed Point Theory and Its Applications.*, Yokohama Publishers, 2000.

[18] 高橋渉, 凸解析と不動点近似, 横浜図書, 2000.

[19] 高橋渉, 非線形・凸解析学入門, 横浜図書, 2005.

[20] W. Takahashi, Y. Takeuchi and R. Kubota, *Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces*, J. Math. Anal. Appl., **341** (2008), 276–286.

[21] M. Tsukada, *Convergence of best approximations in a smooth Banach space*, J. Approx. Theory, **40** (1984), 301–309.

[22] H. K. Xu, *Inequalities in Banach spaces with applications*, Nonlinear Anal., **16** (1991), 1127–1138.