数理解析研究所講究録 第2114巻 2019年 185-190

集合値写像の弧状連結準凸性の特徴付け

瀬戸 和希
島根大学大学院総合理工学研究科
Kazuki Seto
Interdisciplinary Graduate School of Science and Engineering
Shimane University
k.seto@math.shimane-u.ac.jp
黒岩 大史
島根大学大学院総合理工学研究科数理科学領域
Daishi Kuroiwa
Department of Mathematics,
Major in Interdisciplinary Science and Engineering
Shimane University
kuroiwa@riko.shimane-u.ac.jp

概 要

本講究録では、黒岩、Popovici、瀬戸 [5] による弧状連結準凸性の分類と、Crouzeix の特徴付けが成立する範囲を述べる。また、具体例を用いて 2 つの弧状連結凸の和には、同じ弧を持つという仮定が必要であることを示す。

1 はじめに

集合値写像の準凸性の概念は、これまでに多くの研究がなされているものの、それぞれの研究者によって別々に定義された準凸性が数多く存在しており、体系的に分類されていなかった。近年、瀬戸、黒岩、Popovici[4] は集合値写像の準凸性を体系的に分類し、Crouzeix の特徴付けが成立する範囲を明確にした。本講究録においては、黒岩、Popovici、瀬戸 [5] による弧状連結準凸性の分類と、Crouzeix の特徴付けが成立する範囲を述べる。その際、集合値写像の和は同じ弧上で考える必要があることを、具体例を用いて示す。

以下では、まず瀬戸、黒岩、Popovici[4] で述べられた結果について紹介する。なお、本講究録では、集合族上の二項関係のうち、l 型のみを取り扱う。

定義 1.1. Y を線形空間、$C \subset Y$ を空ではない凸錐とする。このとき、任意の集合 $A, B \subset Y$ に対して、二項関係 $\leq_C^l$ を次のように定義する。

$$A \leq_C^l B \overset{\text{def}}{\iff} A + C \supset B.$$

定義 1.2. X を線形位相空間とする。このとき、集合値写像 $F : X \to 2^Y$ が任意の $x_0, x_1 \in \mathrm{dom}F$ と $t \in (0,1)$ に対して,

$$F((1-t)x_0 + tx_1) \leq_C^l (1-t)F(x_0) + tF(x_1)$$

をみたすとき、F は l 型凸という。また、l 型凸のクラスを $\mathcal{C}_l$ で表す。

集合値写像の準凸は様々な研究者によって別々に定義されており、実数値関数の拡張概念として 9 種類がある。それらは瀬戸、黒岩、Popovici[4] によって体系的に 5 種類の l 型準凸性に分類された。本講究録では、それらをリナンバーしたもので紹介する。

定義 1.3. 集合値写像 $F : X \to 2^Y$ が

- 任意の $x_0, x_1 \in \mathrm{dom}F$ と $t \in (0,1)$ に対して、

$$F((1-t)x_0 + tx_1) \leq_C^l F(x_0) \text{ or } F((1-t)x_0 + tx_1) \leq_C^l F(x_1)$$

  をみたすとき、F は $l1$ 型準凸という。また、$l1$ 型準凸のクラスを $\mathcal{Q}_{l1}$ で表す。

- 任意の $x_0, x_1 \in \mathrm{dom}F$ と $t \in (0,1)$ に対して、ある実数 $\lambda \in [0,1]$ が存在して、

$$F((1-t)x_0 + tx_1) \leq_C^l (1-\lambda)F(x_0) + \lambda F(x_1)$$

  をみたすとき、F は $l2$ 型準凸という。$l2$ 型準凸のクラスを $\mathcal{Q}_{l2}$ で表す。

- 任意の凸集合 $A \in 2^Y$ に対して、

$$\left\{x \in \mathrm{dom}F \;\middle|\; F(x) + A \leq_C^l \{0\}\right\}$$

  が凸集合になるとき、F は $l3$ 型準凸という。$l3$ 型準凸のクラスを $\mathcal{Q}_{l3}$ で表す。

- 任意の $y \in Y$ に対して、

$$\left\{x \in \mathrm{dom}F \;\middle|\; F(x) \leq_C^l \{y\}\right\}$$

  が凸集合になるとき、F は $l4$ 型準凸という。$l4$ 型準凸のクラスを $\mathcal{Q}_{l4}$ で表す。

- 任意の $x_0, x_1 \in \mathrm{dom}F$ と $t \in (0,1)$ に対して、

$$F(x_0) \leq_C^l F(x_1) \Rightarrow F((1-t)x_0 + tx_1) \leq_C^l F(x_1).$$

  をみたすとき、F は $l5$ 型準凸という。$l5$ 型準凸のクラスを $\mathcal{Q}_{l5}$ で表す。

瀬戸、黒岩、Popovici はこれらの準凸性について以下の関係を示すことで体系的に分類した。

命題 1.4. [4]

$$\mathcal{Q}_{l1} \subset \mathcal{Q}_{l2} \subset \mathcal{Q}_{l3} \subset \mathcal{Q}_{l4} \subset \mathcal{Q}_{l5}.$$

次に Crouzeix の特徴付けに必要な集合値写像のアフィンについて紹介する。

定義 1.5. 集合値写像 $F : X \to 2^Y$ が任意の $x_0, x_1 \in \mathrm{dom}F$ と $t \in (0,1)$ に対して、

$$F((1-t)x_0 + tx_1) = (1-t)F(x_0) + tF(x_1).$$

をみたすとき、F はアフィンという。また、アフィンのクラスを $\mathcal{A}$ で表す。

集合値写像の Crouzeix の特徴付けは、Crespi、黒岩、Rocca によって $l2$ 型準凸について与えられた [3]。瀬戸、黒岩、Popovici は、体系的に分類した準凸性について Crouzeix の特徴付けが成り立つ範囲を明確にした。

定理 1.6. [4] 任意の $x \in \mathrm{dom}F$ に対して、$F(x) + C$ が閉凸かつ $F(x)$ が有界ならば、以下は同値。

1° $F \in \mathcal{C}_l$

2° 任意の $G \in \mathcal{A}$ に対して、$F + G \in \mathcal{Q}_{l2}$

3° 任意の $G \in \mathcal{A}$ に対して、$F + G \in \mathcal{Q}_{l3}$

4° 任意の $G \in \mathcal{A}$ に対して、$F + G \in \mathcal{Q}_{l4}$

5° 任意の $G \in \mathcal{A}$ に対して、$F + G \in \mathcal{Q}_{l5}$

2 主結果

黒岩、Popovici、瀬戸 [5] は前章で述べた結果を弧状連結な集合上の集合値写像へと拡張した。この章では、その結果について述べると共に、集合値写像の和について同じ弧上である必要性を具体例を用いて示す。

定義 2.1. [1] 線形位相空間 X の部分集合 S が弧状連結集合であるとは、任意の $x_0, x_1 \in S$ に対して、ある連続写像 $H_{x_0,x_1} : [0,1] \to S$ が存在して、

$$H_{x_0,x_1}(0) = x_0 \text{ and } H_{x_0,x_1}(1) = x_1$$

が成立するときをいい、H_{x_0,x_1} を弧と呼ぶ。

一般的に、S が弧状連結の場合、弧のとり方は一意には定まらない。

例 2.2. $[0,1]^2$ の境界 $\mathrm{bd}[0,1]^2$ は弧状連結であり、弧のとり方は一意には定まらない。例えば、$\psi : [0,4) \to \mathrm{bd}[0,1]^2$ を

$$\psi(t) = \begin{cases} (t, 0) & t \in [0,1) \\ (1, 1-t) & t \in [1,2) \\ (3-t, 1) & t \in [2,3) \\ (0, 4-t) & t \in [3,4) \end{cases}$$

とし、任意の $x_0, x_1 \in \mathrm{dom}F$ に対して、$H_{x_0,x_1} : [0,1] \to S$ を $H_{x_0,x_1}(t) = \psi((1-t)\psi^{-1}(x_0) + t\psi^{-1}(x_1))$ と定義すれば H_{x_0,x_1} は弧であり、また、$\psi' : [0,4) \to \mathrm{bd}[0,1]^2$ を

$$\psi'(t) = \begin{cases} (1, t) & t \in [0,1) \\ (t, 1) & t \in [1,2) \\ (0, 3-t) & t \in [2,3) \\ (t-3, 0) & t \in [3,4) \end{cases}$$

とし、任意の $x_0, x_1 \in \mathrm{dom}F$ に対して、$H'_{x_0,x_1} : [0,1] \to S$ を $H'_{x_0,x_1}(t) = \psi'((1-t)\psi'^{-1}(x_0) + t\psi'^{-1}(x_1))$ と定義すれば、H'_{x_0,x_1} は弧となることがわかる。

定義 2.3. Y を線形位相空間、$S \subset X$ を弧状連結集合とする。このとき、集合値写像 $F : S \to 2^Y$ が任意の $x_0, x_1 \in S$ に対して、ある集合値写像 $H_{x_0,x_1} : [0,1] \to S$ が存在して、任意の $t \in (0,1)$ に対して、

$$F(H_{x_0,x_1}(t)) \leq_C^l (1-t)F(x_0) + tF(x_1)$$

をみたすとき、F は弧状連結 l 型凸という。また、弧状連結 l 型凸のクラスを $\mathcal{C}_l^a$ で表す。

一般的に、集合値写像が l 型凸ならば、弧状連結 l 型凸である。実際に、弧 H_{x_0,x_1} を $H_{x_0,x_1}(t) = (1-t)x_0 + tx_1$ とすればよい。また、２つの l 型凸写像の和は l 型凸であるが、弧状連結 l 型凸の場合、２つの写像が同じ弧のもとで弧状連結 l 型凸である仮定が必要になる。2 つ写像が同じ弧をもつ考え方は、[2] においても集合値写像の方向微分の和を考える際にも現れている。

命題 2.4. 集合値写像 $F, G : S \to 2^Y$ が共通の弧 $H_{x_0,x_1}(x_0, x_1 \in S)$ に対する弧状連結 l 型凸とする。このとき、$F+G$ は弧状連結 l 型凸になる。

異なる弧上で弧状連結 l 型凸な 2 つの集合値写像の和がまた弧状連結 l 型凸になるとは限らない。このことを次の例を通して確認する。

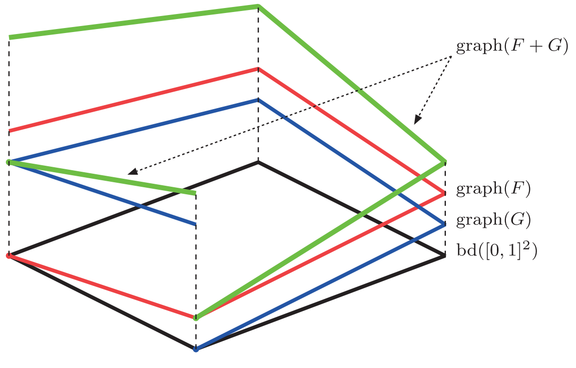
例 2.5. 例 2.2 において、集合値写像 $F : \mathrm{bd}[0,1]^2 \to 2^Y$ を

$$F(x,y) = \{\psi^{-1}(x,y)\}$$

と定める。このとき、F は弧状連結 l 型凸であることがわかる。実際に弧を $H_{x_0,x_1}(t) = \psi((1-t)\psi^{-1}(x_0) + t\psi^{-1}(x_1))$ ととればよい。また、集合値写像 $G : \mathrm{bd}[0,1]^2 \to 2^Y$ を

$$G(x,y) = \{\psi'^{-1}(x,y)\}$$

と定める。このとき、G も弧状連結 l 型凸である。弧は $H'_{x_0,x_1} = \psi'((1-t)\psi'^{-1}(x_0) + t\psi'^{-1}(x_1))$ ととればよい。さらに $G(x,y) = F(1-y, x)$ であることもわかる。ここで $F+G$ を考える。このとき、F、G、$F+G$ のグラフは以下のようになり、$F+G$ は弧状連結 l 型凸でないことが分かる。



次に、l 型準凸の概念の弧状連結集合上への拡張を紹介する（[5]）。

定義 2.6. 弧状連結部分集合を $S \subset X$ とする。集合値写像 $F : S \to 2^Y$ が

- 任意の $x_0, x_1 \in \mathrm{dom}F$ に対して、ある弧 $H_{x_0,x_1} : [0,1] \to S$ が存在して、任意の $t \in (0,1)$ に対して、

  $$F(H_{x_0,x_1}(t)) \leq^l_C F(x_0) \text{ or } F(H_{x_0,x_1}(t)) \leq^l_C F(x_1)$$

  をみたすとき、F は弧状連結 $l1$ 型準凸という。また、弧状連結 $l1$ 型準凸のクラスを $\mathcal{Q}^a_{l1}$ で表す。

- 任意の $x_0, x_1 \in \mathrm{dom}F$ に対して、ある弧 $H_{x_0,x_1} : [0,1] \to S$ と $\lambda \in [0,1]$ が存在して、任意の $t \in (0,1)$ に対して、

  $$F(H_{x_0,x_1}(t)) \leq^l_C (1-\lambda)F(x_0) + \lambda F(x_1)$$

  をみたすとき、F は弧状連結 $l2$ 型準凸という。また、弧状連結 $l2$ 型準凸のクラスを $\mathcal{Q}^a_{l2}$ で表す。

- 任意の凸集合 $A \subset Y$ に対して、

$$\{x \in \mathrm{dom}F \mid F(x) + A \leq^l_C \{0\}\}$$

が弧状連結集合であるとき、F は弧状連結 $l3$ 型準凸という。また、弧状連結 $l3$ 型準凸のクラスを $\mathcal{Q}^a_{l3}$ で表す。

- 任意の $y \in Y$ に対して、

$$\{x \in \mathrm{dom}F \mid F(x) \leq^l_C \{y\}\}$$

が弧状連結集合であるとき、F は弧状連結 $l4$ 型準凸という。また、弧状連結 $l4$ 型準凸のクラスを $\mathcal{Q}^a_{l4}$ で表す。

- 任意の $x_0, x_1 \in \mathrm{dom}F$ に対して、ある弧 $H_{x_0,x_1} : [0,1] \to S$ が存在して、任意の $t \in (0,1)$ に対して、

$$F(x_0) \leq^l_C F(x_1) \Rightarrow F(H_{x_0,x_1}(t)) \leq^l_C F(x_1)$$

をみたすとき、F は弧状連結 $l5$ 型準凸という。また、弧状連結 $l5$ 型準凸のクラスを $\mathcal{Q}^a_{l5}$ で表す。

集合値写像の l 型準凸性と同様に、弧状連結 l 型準凸性に関しても以下の関係が成り立つ。

命題 2.7. [5]

$$\mathcal{Q}^a_{l1} \subset \mathcal{Q}^a_{l2} \subset \mathcal{Q}^a_{l3} \subset \mathcal{Q}^a_{l4} \subset \mathcal{Q}^a_{l5}.$$

定義 2.8. 弧状連結部分集合を $S \subset X$ とする。集合値写像 $F : S \to 2^Y$ が任意の $x_0, x_1 \in \mathrm{dom}F$ に対して、ある弧 $H_{x_0,x_1} : [0,1] \to S$ が存在して、任意の $t \in (0,1)$ に対して、

$$F(H_{x_0,x_1}(t)) = (1-t)F(x_0) + tF(x_1)$$

をみたすとき、F は弧状連結アフィンであるという。また、弧状連結アフィンのクラスを $\mathcal{A}^a$ で表す。

命題 2.7 をもとに、次の弧状連結凸に関する Crouzeix の特徴付け定理が得られる。

定理 2.9. [5] $S \subset X$ を弧状連結集合、$C \subset Y$ を凸錐とする。集合値写像 $F : S \to 2^Y$ が任意の $x \in \mathrm{dom}F$ に対して、$F(x) + C$ が閉凸かつ $F(x)$ が有界とする。S の任意の異なる 2 点 x_0, x_1 に対し、単射となる弧 H_{x_0,x_1} が存在すると仮定する。このとき、以下は同値である：

1° F は弧 $H_{x_0,x_1}(x_0, x_1 \in S)$ に対して弧状連結 l 型凸

2° 弧 $H_{x_0,x_1}(x_0, x_1 \in S)$ に対する任意の弧状連結アフィン写像 $G : S \to 2^Y$ に対して、$F + G$ は弧状連結 $l2$ 型準凸

3° 弧 $H_{x_0,x_1}(x_0, x_1 \in S)$ に対する任意の弧状連結アフィン写像 $G : S \to 2^Y$ に対して、$F + G$ は弧状連結 $l3$ 型準凸

4° 弧 $H_{x_0,x_1}(x_0, x_1 \in S)$ に対する任意の弧状連結アフィン写像 $G : S \to 2^Y$ に対して、$F + G$ は弧状連結 $l4$ 型準凸

5° 弧 $H_{x_0,x_1}(x_0, x_1 \in S)$ に対する任意の弧状連結アフィン写像 $G : S \to 2^Y$ に対して、$F + G$ は弧状連結 $l5$ 型準凸

参考文献

[1] Avriel M., Zang I. Generalized arcwise-connected functions and characterizations of local-global minimum properties. J. Opim. Theory Appl. 1980;32;407–425.

[2] Fu J. Y., Wang Y. H. Arcwise connected cone-convex functions and mathmatical programming. J. Optim. Theory Appl. 2003;118(2):339–352.

[3] Crespi G. P., Kuroiwa D., Rocca M. Quasiconvexity of set-valued maps assures well-posedness of robust vector optimization. Ann. Oper. Res. 2017;251(1-2):89–104.

[4] Seto K., Kuroiwa D., Popovici N. A systematization of convexity and quasiconvexity concepts for set-valued maps, defined by l-type and u-type preorder relations, Optimization, accepted.

[5] Kuroiwa D., Popovici N., Seto K. A characterization of arcwise connected C-convexity for set-valued maps in term of arcwise connected C-quasiconvexity for set-valued maps, preprint.