数理解析研究所講究録 第2115巻 2019年 68-72

Rigidity of entropy spectra for one-sided topological Markov chains

広島大学大学院理学研究科 中川勝國*
Department of Mathematics,
Graduate School of Science,
Hiroshima University

1 設定

N を 2 以上の整数とし $\mathbf{A}$ は N 行 N 列の 0-1 行列で原始的，すなわち正整数 k が存在して A^k の成分が全て正になるとする．

$$\Sigma_{\mathbf{A}}^{+} := \{\omega = (\omega_n) \in \{1, ..., N\}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \mid \mathbf{A}(\omega_n \omega_{n+1}) = 1, \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\},$$
$$\Sigma_{\mathbf{A}} := \{\omega = (\omega_n) \in \{1, ..., N\}^{\mathbb{Z}} \mid \mathbf{A}(\omega_n \omega_{n+1}) = 1, \forall n \in \mathbb{Z}\}$$

とおき，シフト写像$\sigma_{\mathbf{A}}^{+}$, $\sigma_{\mathbf{A}}$ を

$$\sigma_{\mathbf{A}}^{+} : \Sigma_{\mathbf{A}}^{+} \to \Sigma_{\mathbf{A}}^{+},\ (\omega_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \mapsto (\omega_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}},$$
$$\sigma_{\mathbf{A}} : \Sigma_{\mathbf{A}} \to \Sigma_{\mathbf{A}},\ (\omega_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto (\omega_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}.$$

で定義する．$\Sigma_{\mathbf{A}}^{+}$, $\Sigma_{\mathbf{A}}$ は離散位相空間 $\{1, ..., N\}$ の直積位相空間としてコンパクトになり，シフト写像はこの位相に関して連続である．位相力学系 $(\Sigma_{\mathbf{A}}^{+}, \sigma_{\mathbf{A}}^{+})$, $(\Sigma_{\mathbf{A}}, \sigma_{\mathbf{A}})$ をそれぞれ片側 *Markov* シフト，両側 *Markov* シフトと呼ぶ．

$\theta \in (0, 1)$ に対して $\Sigma_{\mathbf{A}}^{+}$ $(\Sigma_{\mathbf{A}})$ 上の距離 d_θ^{+} (d_θ) をそれぞれ

$$d_\theta^{+}(\omega, \omega') := \theta^{\inf\{n \geq 0 \mid \omega_n \neq \omega'_n\}},$$
$$d_\theta(\omega, \omega') := \theta^{\inf\{n \geq 0 \mid \omega_n \neq \omega'_n \text{ or } \omega_{-n} \neq \omega'_{-n}\}}.$$

で定める．d_θ^{+} (d_θ) は $\Sigma_{\mathbf{A}}^{+}$ $(\Sigma_{\mathbf{A}})$ の直積位相とコンパチブルである．

$$F_\theta^{+} := \{\phi : \Sigma_A^{+} \to \mathbb{R} \mid \phi \text{ は距離 } d_\theta^{+} \text{ に関して Lipschitz 連続 }\},$$
$$F_\theta := \{\phi : \Sigma_A \to \mathbb{R} \mid \phi \text{ は距離 } d_\theta \text{ に関して Lipschitz 連続 }\}.$$

とおく．

定義 1. $\phi \in F_\theta^{+}$ とし，μ は $\Sigma_{\mathbf{A}}^{+}$ 上の $\sigma_{\mathbf{A}}^{+}$-不変な Borel 確率測度とする．μ が ϕ の平衡測度であるとは，μ が次の上限を実現することを言う：

$$P(\phi) := \sup_{\nu} \left(h_\nu(\sigma_{\mathbf{A}}^{+}) + \int_{\Sigma_{\mathbf{A}}^{+}} \phi \, d\nu \right).$$

ここで，ν は $\Sigma_{\mathbf{A}}^{+}$ 上の $\sigma_{\mathbf{A}}^{+}$-不変な Borel 確率測度全体を動く．

* e-mail:ktsnakag@gmail.com

定理 2. 任意の $\phi \in F_\theta^+$ に対して平衡測度が唯一つ存在する.

μ_ϕ でこの平衡測度を表す. $\phi \in F_\theta$ に対する平衡測度も定義 1 と同様に定義され, 定理 2 が成り立つ.

2 同型定理

Ornstein は測度論的エントロピーが等しい 2 つの Bernoulli シフトが同型であることを示した ([5]). 弱 Beroulli 性と呼ばれる性質を持つ測度論的力学系はある Bernoulli シフトに同型であり ([4]), 両側 Markov シフトとその上の平衡測度より成る測度論的力学系は弱 Beroulli 性を持つので ([1]), 次が分かる:

定理 3. $\phi, \psi \in F_\theta$ とする. $h_{\mu_\phi}(\sigma_{\mathbf{A}}) = h_{\mu_\psi}(\sigma_{\mathbf{A}})$ ならば $(\Sigma_{\mathbf{A}}, \sigma_{\mathbf{A}}, \mu_\phi)$ と $(\Sigma_{\mathbf{A}}, \sigma_{\mathbf{A}}, \mu_\psi)$ は同型.

ここで, 測度論的力学系とは確率空間 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ と μ を保つ可測写像 $T : X \to X$ の組 $(X, \mathcal{F}, \mu, T)$ のことであり, 2 つの測度論的力学系 $(X_1, \mathcal{F}_1, \mu_1, T_1)$ と $(X_2, \mathcal{F}_2, \mu_2, T_2)$ が同型であるとは次の 4 条件を満たす $\widetilde{X}_1 \in \mathcal{F}_1$, $\widetilde{X}_2 \in \mathcal{F}_2$ が存在することを言う:
(1) $\mu_1(\widetilde{X}_1) = \mu_2(\widetilde{X}_2) = 1$.
(2) $T_1(\widetilde{X}_1) \subset \widetilde{X}_1$, $T_2(\widetilde{X}_2) \subset \widetilde{X}_2$.
(3) $\mu_2 = \mu_1 \circ S^{-1}$.
(4) $S \circ T_1 = T_2 \circ S$ on $\widetilde{X}_1$.

定理 3 が片側 Markov シフトで成り立つか否かが本稿の基本的な問題意識である.

3 反例

定理 3 は片側 Markov シフトでは成り立たない. 反例を紹介するため次の定義をおく:

定義 4. $\mathbf{P}$ は N 行 N 列の確率行列とする. ただし $\mathbf{P}(ij) > 0 \Leftrightarrow \mathbf{A}(ij) = 1$ が全ての i, j で成立しているとする. 関数 $\Sigma_{\mathbf{A}}^+ \ni (\omega_n) \mapsto \log \mathbf{P}(\omega_0\omega_1) \in \mathbb{R}$ の平衡測度を $\mathbf{P}$ の定める *Markov* 測度と呼ぶ. これは,

$$\mu([i_0 \cdots i_{m-1}]) = \mathbf{p}_{i_0}\mathbf{P}(i_0 i_1)\mathbf{P}(i_1 i_2) \cdots \mathbf{P}(i_{n-2} i_{n-1})$$

が全ての $m \geq 1$ と $i_0, ..., i_{m-1} \in \{1, ..., N\}$ に対して成立する測度と言っても良い. ここで, $[i_0 \cdots i_{m-1}] = \{(\omega_n) \in \Sigma_{\mathbf{A}}^+ \mid \omega_k = i_k,\, k = 0, ..., m-1\}$ であり, また $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, ..., \mathbf{p}_N) \in \mathbb{R}^N$ は $\mathbf{pP} = \mathbf{p}$ を満たす確率ベクトルである. (非負行列に対する Perron-Frobenius の定理より $\mathbf{p}$ は唯一つ存在する.)

命題 5 ([2],[8]). $\mathbf{A} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ とし $\alpha \in (0, 1/2)$ とする. 次の 3 つの確率行列

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}.$$

が定める Markov 測度をそれぞれ μ_1, μ_2, μ_3 とした時, $(\Sigma_{\mathbf{A}}^+, \sigma_{\mathbf{A}}^+, \mu_i)$, $i = 1, 2, 3$ はどの 2 つも同型ではない.

4 エントロピースペクトルの定義と性質

片側 Markov シフトの場合に同型を導くような不変量の候補としてエントロピースペクトルを導入する.

$\phi \in F_\theta^+$ とする．$\alpha \in [-\infty, +\infty]$ に対して

$$E_\alpha := \left\{ \omega \in \Sigma_{\mathbf{A}}^+ \mid \lim_{n\to\infty} -\frac{\log \mu_\phi([\omega_0 \cdots \omega_{n-1}])}{n} = \alpha \right\}$$

とおき，

$$\alpha_{\min} := \inf\{\alpha \mid E_\alpha \neq \emptyset\}, \quad \alpha_{\max} := \sup\{\alpha \mid E_\alpha \neq \emptyset\}.$$

と定める．

関数 $\mathcal{E}^{(\mu_\phi)} : [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}] \to \mathbb{R}$ を

$$\mathcal{E}^{(\mu_\phi)}(\alpha) := h(\sigma_{\mathbf{A}}^+ \mid E_\alpha).$$

で定義し，μ_ϕ の**エントロピースペクトル**と呼ぶ．ここで，$h(\sigma_{\mathbf{A}}^+|Z)$ は $Z \subset \Sigma_{\mathbf{A}}^+$ の位相的エントロピーである．

定理 6 ([3],[6],[7])**.** 関数 $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $\beta(q) = -P(q\phi) + qP(\phi)$ で定めると次が成り立つ：

(i) β は狭義単調増加，上に凸で実解析的．

(ii) $0 < \alpha_{\min} \leq \alpha_{\max} < +\infty$ であり $\beta'(q) \to \begin{cases} \alpha_{\min} & (q \to +\infty), \\ \alpha_{\max} & (q \to -\infty). \end{cases}$

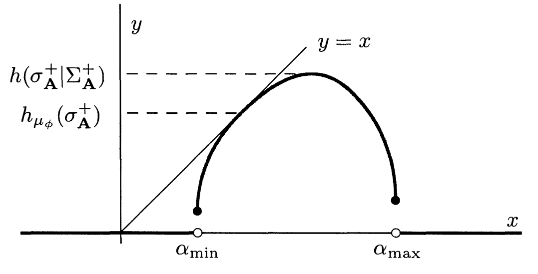
(iii) $E_\alpha \neq \emptyset \Leftrightarrow \alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$.

(iv) 任意の $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ に対して $\mathcal{E}^{(\mu_\phi)}(\alpha) = \inf_{q\in\mathbb{R}}\{q\alpha - \beta(q)\}$.

(v) $\alpha_{\min} = \alpha_{\max} \Leftrightarrow h_{\mu_\phi}(\sigma_{\mathbf{A}}) = h(\sigma_{\mathbf{A}}^+|\Sigma_{\mathbf{A}}^+)$.

注意 7. 定理 6(iv) は $\mathcal{E}^{(\mu_\phi)}$ が β の *Legendre* 変換であることを意味している．

定理 6 より，$\mathcal{E}^{(\mu_\phi)}$ の最大値は $\Sigma_{\mathbf{A}}^+$ の位相的エントロピーと等しく，$\mathcal{E}^{(\mu_\phi)}$ と直線 $y = x$ との接点は μ_ϕ の測度論的エントロピーと等しいことが分かる．よって $\mathcal{E}^{(\mu_\phi)} = \mathcal{E}^{(\mu_\psi)} \Rightarrow h_{\mu_\phi}(\sigma_{\mathbf{A}}^+) = h_{\mu_\psi}(\sigma_{\mathbf{A}}^+)$ であり，エントロピースペクトルは両側 Markov シフトの場合の測度論的エントロピーの役割を果たす量の候補として妥当と言える．



エントロピースペクトルの概形

5 不変量としてのエントロピースペクトル

完全不変量の候補としてのエントロピースペクトルに対し，筆者はまず次を得た．

定理 8 (N)**.** エントロピースペクトルは同型に関する不変量である．すなわち，$\phi, \psi \in F_\theta^+$ として $(\Sigma_{\mathbf{A}}^+, \sigma_{\mathbf{A}}^+, \mu_\phi)$ と $(\Sigma_{\mathbf{A}}^+, \sigma_{\mathbf{A}}^+, \mu_\psi)$ が同型とすれば $\mathcal{E}^{(\mu_\phi)} = \mathcal{E}^{(\mu_\psi)}$.

注意 9. $(\Sigma_{\mathbf{A}}^+, \sigma_{\mathbf{A}}^+, \mu_\phi)$ と $(\Sigma_{\mathbf{A}}^+, \sigma_{\mathbf{A}}^+, \mu_\psi)$ の同型を与える写像が $\Sigma_{\mathbf{A}}^+$ からそれ自身への同相写像であれば，変分原理より $\mathcal{E}^{(\mu_\phi)} = \mathcal{E}^{(\mu_\psi)}$ は容易に分かるが ([2] Proposition 2)，定理 8 では同型写像に連続性を仮定しておらず主張は自明ではない．

実はエントロピースペクトルは完全不変量ではない．実際，命題 5 で与えたものが反例となっている．

定理 10 ([2])**.** 命題 5 の μ_1, μ_2, μ_3 について $\mathcal{E}^{(\mu_1)} = \mathcal{E}^{(\mu_2)} = \mathcal{E}^{(\mu_3)}$.

同型関係の完全不変量でないことが判明したのだが，ではエントロピースペクトルの一致から力学系の関係としてどの程度強いものが導けるだろうか？ Markov 測度に対象を絞った結果，筆者により次が得られた．

定理 11 (N)**.** N 行 N 列の確率行列で $\mathbf{P}(ij) > 0 \Leftrightarrow \mathbf{A}(ij) = 1$ が全ての i, j で成立しているもの全体を $M_0(\Sigma_{\mathbf{A}}^+)$ と書き，これに $\mathbb{R}^{N^2}$ からの相対位相を入れる．また，$\mathbf{P} \in M_0(\Sigma_{\mathbf{A}}^+)$ に対して，$\mathbf{P}$ の定める Markov 測度を $\mu_{\mathbf{P}}$ と書く．この時，次の集合

$$\{\mathbf{P} \in M_0(\Sigma_{\mathbf{A}}^+) \mid \mathcal{E}^{(\mu_{\mathbf{P}})} = \mathcal{E}^{(\mu_{\mathbf{Q}})} \text{ なる任意の } \mathbf{Q} \in M_0(\Sigma_{\mathbf{A}}^+) \text{ に対して，} \\ \text{行列 } (\mathbf{P}_{ij}^q), (\mathbf{Q}_{ij}^q) \text{ の特性多項式が全ての } q \in \mathbb{R} \text{ で等しい} \}$$

は $M_0(\Sigma_{\mathbf{A}}^+)$ で residual，すなわち可算個の稠密開部分集合の交わりを含む．

6 測度論的同型の位相同型への拡張

確率 1 の集合上で定義された測度論的同型が，全空間で定義された位相同型に拡張できるかは興味ある問題である．筆者はこれに関して，やはり Markov 測度に対象を絞った結果次を得た．

命題 12 (N)**.** $M_0(\Sigma_{\mathbf{A}}^+)$ は定理 11 のものとする．次の集合

$$\{\mathbf{P} \in M_0(\Sigma_{\mathbf{A}}^+) \mid (\Sigma_A^+, \sigma_A, \mu_{\mathbf{Q}}) \text{ が } (\Sigma_A^+, \sigma_A, \mu_{\mathbf{P}}) \text{ と同型になる任意の } \mathbf{Q} \in M_0(\Sigma_{\mathbf{A}}^+) \text{ に対して，} \\ \text{同型を与える写像は } \Sigma_A^+ \text{ への連続拡張を唯一つ持ち，} \\ \text{その拡張は } \Sigma_A^+ \text{ からそれ自身への同相写像である} \}$$

は，$M_0(\Sigma_{\mathbf{A}}^+)$ の稠密開部分集合を含む．

参考文献

[1] R.E. Bowen, *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphism.* Springer Lecture Notes in Math **470**,1975.

[2] L. Barreira and V. Saravia, Multifractal nonrigidity of Topological Markov chains, *J. Stat. Phys* **130** 387-412 (2008).

[3] P. Collet, J.L. Lebowitz and A. Porzio, The dimension spectrum of some dynamical systems, *J. Stat. Phys* **47** 609-644 (1987) .

[4] N.A. Friedman and D.S. Ornstein, On isomorphism of weak Bernoulli transformations, *Advances in Math* **5** 365-394 (1971).

[5] D.S. Ornstein, Bernoulli shifts with the same entropy are isomorphic, *Advances in Math* **4** 337-352 (1970).

[6] D.A. Rand, The singularity spectrum $f(\alpha)$ for cookie-cutters, *Ergod. Th. & Dynam. Sys* **9** 527-541 (1989) .

[7] J. Schmeling, On the completeness of multifractal spectra, *Ergod. Th. & Dynam. Sys* **19** 1595-1616 (1999).

[8] P. Walters, Some results on the classification of non-invertible measure-preserving transformations. *Springer Lecture Notes in Math* **318**, 266-276 (1973).