数理解析研究所講究録 第2116巻 2019年 64-69

多変量 ARMA 過程の有限予測係数に対する閉形式表示

広島大学・大学院理学研究科　井上 昭彦 (Akihiko Inoue)
Graduate School of Science, Hiroshima University

1　イントロダクション

これは多変量 ARMA 過程の有限予測係数の閉形式表示に関する [1] の結果のアブストラクトである．証明と応用を含めた詳細については [1] を見よ．また，関連する文献として [2, 3, 4, 5] を見よ．

$\mathbb{C}^{m\times n}$ を $m\times n$ の複素行列の全体とする．$\mathbb{C}^d$ は $\mathbb{C}^{d\times 1}$ を表す．I_n を $n\times n$ の単位行列とする．$a\in\mathbb{C}^{m\times n}$ に対し，a^{T} は a の転置行列であり, $\bar{a}$ と a^* はそれぞれ a の複素およびエルミート共役を表す．従って, $a^*=\bar{a}^{\mathrm{T}}$.

$\mathbb{T}:=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$ と $\overline{\mathbb{D}}:=\{z\in\mathbb{C}:|z|\le 1\}$ はそれぞれ $\mathbb{C}$ の単位円と閉単位円板とする．$d\in\mathbb{N}$ とする．ここでは，$\{X_k:k\in\mathbb{Z}\}$ が d-変量 ARMA (autoregressive moving-average) 過程であるとは，$\mathbb{C}^d$-値，平均 0 の弱定常過程であって次の形のスペクトル密度 w を持つこととする：

$$w(e^{i\theta})=h(e^{i\theta})h(e^{i\theta})^*,\qquad \theta\in[-\pi,\pi). \tag{1.1}$$

ここで，$h:\mathbb{T}\to\mathbb{C}^{d\times d}$ は次の条件を満たすとする：

$$\begin{aligned}&h(z)\ \text{の成分は}\ z\ \text{の有理関数で，それらは}\ \overline{\mathbb{D}}\ \text{に極を持たず，}\\ &\text{また}\ \det h(z)\ \text{は}\ \overline{\mathbb{D}}\ \text{に零点を持たない．}\end{aligned} \tag{C}$$

(C) および次の条件を満たす $h_\sharp:\mathbb{T}\to\mathbb{C}^{d\times d}$ が存在することが知られている：

$$w(e^{i\theta})=h(e^{i\theta})h(e^{i\theta})^*=h_\sharp(e^{i\theta})^*h_\sharp(e^{i\theta}),\qquad \theta\in[-\pi,\pi). \tag{1.2}$$

さらに $h_\sharp$ はユニタリ因子を除いて一意である．

$\mathbb{D}:=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ を $\mathbb{C}$ の開単位円板とする．$h(z)^{-1}$ は次の形に書くことができる：

$$h(z)^{-1}=-\rho_0-\sum_{\mu=1}^{K}\sum_{j=1}^{m_\mu}\frac{1}{(1-\overline{p}_\mu z)^j}\rho_{\mu,j}-\sum_{j=1}^{m_0}z^j\rho_{0,j}. \tag{1.3}$$

ここで，

$$\begin{cases}K\in\mathbb{N}\cup\{0\},\\ p_\mu\in\mathbb{D}\setminus\{0\}\quad(\mu=1,\dots,K),\quad p_\mu\ne p_\nu\quad(\mu\ne\nu),\\ m_\mu\in\mathbb{N}\quad(\mu=1,\dots,K),\quad m_0\in\mathbb{N}\cup\{0\},\\ \rho_{\mu,j}\in\mathbb{C}^{d\times d}\quad(\mu=0,1,\dots,K,\ j=1,\dots,m_\mu),\quad \rho_0\in\mathbb{C}^{d\times d},\\ \rho_{\mu,m_\mu}\ne 0\quad(\mu=0,1,\dots,K).\end{cases} \tag{1.4}$$

ただし $\sum_{k=1}^{0}=0$ とする．

2　2 つの行列値外部関数の極の間の対応

前節の h と $h_\sharp$ の極の間の対応に関し，次の定理が成り立つ．

定理 2.1 ([1]). (1.3) と (1.4) における m_0, K *and* $(p_1, m_1), \ldots, (p_K, m_K)$ に対して，$h_\sharp^{-1}$ は次の形である：

$$h_\sharp(z)^{-1} = -\rho_0^\sharp - \sum_{\mu=1}^{K} \sum_{j=1}^{m_\mu} \frac{1}{(1-\bar{p}_\mu z)^j} \rho_{\mu,j}^\sharp - \sum_{j=1}^{m_0} z^j \rho_{0,j}^\sharp. \tag{2.1}$$

ここで

$$\begin{cases} \rho_{\mu,j}^\sharp \in \mathbb{C}^{d\times d} \quad (\mu = 0, 1, \ldots, K,\ j = 1, \ldots, m_\mu), \quad \rho_0^\sharp \in \mathbb{C}^{d\times d}, \\ \rho_{\mu,m_\mu}^\sharp \neq 0 \ (\mu = 0, 1, \ldots, K). \end{cases} \tag{2.2}$$

さらに，次が成り立つ：

$$\rho_{\mu,m_\mu} h_\sharp(p_\mu)^* = h(p_\mu)^* \rho_{\mu,m_\mu}^\sharp, \qquad \mu = 0, 1, \ldots, K. \tag{2.3}$$

3　主定理に現れる行列の定義

この節では，(1.3) の K に対し $K \geq 1$ を仮定する．d-変量 ARMA 過程 $\{X_k\}$ の有限予測係数 $\phi_{n,j} \in \mathbb{C}^{d\times d}$ $(j = 1, \ldots, n)$ は次で定義される：

$$P_{[-n,-1]} X_0 = \phi_{n,1} X_{-1} + \cdots + \phi_{n,n} X_{-n}. \tag{3.1}$$

ここで，$n \in \mathbb{N}$ に対し $P_{[-n,-1]} X_0$ は有限の過去 $\{X_{-n}, \ldots, X_{-1}\}$ に基づく X_0 の最良線形予測子である．次節において多変量 ARMA 過程の有限予測係数 $\phi_{n,j}$ に対する閉形式表示を述べるために，この節ではそこに現れるいくつかの行列を導入する．

$\{X_k\}$ の前進 MA および AR 係数 c_k と a_k をそれぞれ次で定義する：

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k c_k, \qquad -h(z)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k a_k, \qquad z \in \mathbb{D}. \tag{3.2}$$

すると，

$$c_0 = h(0) = -\left\{ \rho_0 + \sum_{\mu=1}^{K} \sum_{j=1}^{m_\mu} \rho_{\mu,j} \right\}^{-1} \tag{3.3}$$

および次の命題が，容易に分かる．

命題 3.1. 次が成り立つ：

$$a_n = \sum_{\mu=1}^{K} \sum_{j=1}^{m_\mu} \binom{n+j-1}{j-1} \overline{p}_\mu^n \rho_{\mu,j}, \qquad n \geq m_0 + 1, \tag{3.4}$$

さらに，もし $m_0 \geq 1$ ならば，次が成り立つ：

$$a_n = \rho_{0,n} + \sum_{\mu=1}^{K} \sum_{j=1}^{m_\mu} \binom{n+j-1}{j-1} \overline{p}_\mu^n \rho_{\mu,j}, \qquad n = 1, \ldots, m_0, \tag{3.5}$$

$\mu = 1, \ldots, K$ と $i \in \mathbb{N}$ に対し，$p_{\mu,i} : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{C}$ を次で定義する：

$$p_{\mu,i}(k) := \binom{k}{i-1} p_\mu^{k-i+1}, \qquad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{3.6}$$

次を注意せよ：

$$p_{\mu,i}(0) = \binom{0}{i-1} p_\mu^{-i+1} = \delta_{i,1}.$$

$\mu = 1, \ldots, K$ と $i = 1, \ldots, m_\mu$ および $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し，次のようにおく：

$$\mathbf{p}_{\mu,i}(n) := p_{\mu,i}(n) I_d \in \mathbb{C}^{d \times d}. \tag{3.7}$$

ここで $p_{\mu,i}(n)$ は (3.6) の通りである．次のようにおく：

$$M := \sum_{\mu=1}^{K} m_\mu. \tag{3.8}$$

$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し，$\mathbf{p}_n \in \mathbb{C}^{dM \times d}$ を次のブロック表示で定義する：

$$\mathbf{p}_n := (\mathbf{p}_{1,1}(n), \ldots, \mathbf{p}_{1,m_1}(n) | \mathbf{p}_{2,1}(n), \ldots, \mathbf{p}_{2,m_2}(n) | \cdots | \mathbf{p}_{K,1}(n), \ldots, \mathbf{p}_{K,m_K}(n))^{\mathrm{T}}. \tag{3.9}$$

次を注意せよ：

$$\mathbf{p}_0 = (I_d, 0, \ldots, 0 | I_d, 0, \ldots, 0 | \cdots | I_d, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^{dM \times d}. \tag{3.10}$$

$\mu, \nu \in \{1, 2, \ldots, K\}$ に対し，$\Lambda^{\mu,\nu} \in \mathbb{C}^{dm_\mu \times dm_\nu}$ を次のブロック表示で定義する：

$$\Lambda^{\mu,\nu} := \begin{pmatrix} \lambda^{\mu,\nu}(1,1) & \lambda^{\mu,\nu}(1,2) & \cdots & \lambda^{\mu,\nu}(1,m_\nu) \\ \lambda^{\mu,\nu}(2,1) & \lambda^{\mu,\nu}(2,2) & \cdots & \lambda^{\mu,\nu}(2,m_\nu) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda^{\mu,\nu}(m_\mu,1) & \lambda^{\mu,\nu}(m_\mu,2) & \cdots & \lambda^{\mu,\nu}(m_\mu,m_\nu) \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

ここで，$i = 1, \ldots, m_\mu$ と $j = 1, \ldots, m_\nu$ に対し，

$$\lambda^{\mu,\nu}(i,j) := \sum_{r=0}^{j-1} \binom{i-1}{r} \binom{i+j-r-2}{i-1} \frac{p_\mu^{j-r-1} \overline{p}_\nu^{i-r-1}}{(1 - p_\mu \overline{p}_\nu)^{i+j-r-1}} I_d \in \mathbb{C}^{d \times d}. \tag{3.12}$$

$\Lambda \in \mathbb{C}^{dM \times dM}$ を次のブロック表示で定義する：

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda^{1,1} & \Lambda^{1,2} & \cdots & \Lambda^{1,K} \\ \Lambda^{2,1} & \Lambda^{2,2} & \cdots & \Lambda^{2,K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda^{K,1} & \Lambda^{K,2} & \cdots & \Lambda^{K,K} \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

$n \in \mathbb{N}$ と $\mu, \nu \in \{1, 2, \ldots, K\}$ に対し，$\Xi_n^{\mu,\nu} \in \mathbb{C}^{dm_\mu \times dm_\nu}$ を次のブロック表示で定義する：

$$\Xi_n^{\mu,\nu} := \begin{pmatrix} \xi_n^{\mu,\nu}(1,1) & \xi_n^{\mu,\nu}(1,2) & \cdots & \xi_n^{\mu,\nu}(1,m_\nu) \\ \xi_n^{\mu,\nu}(2,1) & \xi_n^{\mu,\nu}(2,2) & \cdots & \xi_n^{\mu,\nu}(2,m_\nu) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_n^{\mu,\nu}(m_\mu,1) & \xi_n^{\mu,\nu}(m_\mu,2) & \cdots & \xi_n^{\mu,\nu}(m_\mu,m_\nu) \end{pmatrix}. \tag{3.14}$$

ここで，$n \in \mathbb{N}, i = 1, \ldots, m_\mu$ と $j = 1, \ldots, m_\nu$ に対し，$\xi_n^{\mu,\nu}(i,j) \in \mathbb{C}^{d\times d}$ は次で定義する：

$$\xi_n^{\mu,\nu}(i,j) := \sum_{r=0}^{j-1} \binom{n+i+j-2}{r} \binom{i+j-r-2}{i-1} \frac{p_\mu^{j-r-1}\overline{p}_\nu^{n+i+j-r-2}}{(1-p_\mu\overline{p}_\nu)^{i+j-r-1}} I_d. \tag{3.15}$$

$n \in \mathbb{N}$ に対し，$\Xi_n \in \mathbb{C}^{dM\times dM}$ を次で定義する：

$$\Xi_n := \begin{pmatrix} \Xi_n^{1,1} & \Xi_n^{1,2} & \cdots & \Xi_n^{1,K} \\ \Xi_n^{2,1} & \Xi_n^{2,2} & \cdots & \Xi_n^{2,K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Xi_n^{K,1} & \Xi_n^{K,2} & \cdots & \Xi_n^{K,K} \end{pmatrix}. \tag{3.16}$$

さらに，$\rho \in \mathbb{C}^{dM\times d}$ と $\tilde{\rho} \in \mathbb{C}^{dM\times d}$ を，それぞれブロック表示

$$\rho := (\rho_{1,1}^{\mathrm{T}}, \ldots, \rho_{1,m_1}^{\mathrm{T}} \mid \rho_{2,1}^{\mathrm{T}}, \ldots, \rho_{2,m_2}^{\mathrm{T}} \mid \cdots \mid \rho_{K,1}^{\mathrm{T}}, \ldots, \rho_{K,m_K}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \tag{3.17}$$

と

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &:= (\tilde{\rho}_{1,1}^{\mathrm{T}}, \ldots, \tilde{\rho}_{1,m_1}^{\mathrm{T}} \mid \tilde{\rho}_{2,1}^{\mathrm{T}}, \ldots, \tilde{\rho}_{2,m_2}^{\mathrm{T}} \mid \cdots \mid \tilde{\rho}_{K,1}^{\mathrm{T}}, \ldots, \tilde{\rho}_{K,m_K}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \\ &= \left(\overline{\rho_{1,1}^{\sharp}}, \ldots, \overline{\rho_{1,m_1}^{\sharp}} \mid \overline{\rho_{2,1}^{\sharp}}, \ldots, \overline{\rho_{2,m_2}^{\sharp}} \mid \cdots \mid \overline{\rho_{K,1}^{\sharp}}, \ldots, \overline{\rho_{K,m_K}^{\sharp}}\right)^{\mathrm{T}} \end{aligned} \tag{3.18}$$

により定義する．

　次のようにおく：

$$v_n = \Xi_n \rho, \qquad n \geq m_0 + 1, \tag{3.19}$$

$$\tilde{v}_n = \overline{\Xi}_n \tilde{\rho}, \qquad n \geq m_0 + 1. \tag{3.20}$$

さらに，もし $m_0 \geq 1$ ならば，次のようにおく：

$$v_n = \Xi_n \rho + \sum_{l=0}^{m_0-n} \mathbf{p}_l \rho_{0,n+l}, \qquad n = 1, \ldots, m_0, \tag{3.21}$$

$$\tilde{v}_n = \overline{\Xi}_n \rho + \sum_{l=0}^{m_0-n} \overline{\mathbf{p}}_l \tilde{\rho}_{0,n+l}, \qquad n = 1, \ldots, m_0. \tag{3.22}$$

　次のようにおく：

$$h^\dagger(z) := h(1/\overline{z})^*. \tag{3.23}$$

そして，次を定義する：

$$\begin{aligned} \theta_{\mu,j} := -\lim_{z\to p_\mu} \frac{1}{(m_\mu - j)!} \frac{d^{m_\mu - j}}{dz^{m_\mu - j}} \left\{(z-p_\mu)^{m_\mu} h_\sharp(z) h^\dagger(z)^{-1}\right\} \in \mathbb{C}^{d\times d}, \\ \mu = 0, 1, \ldots, K, \quad j = 1, \ldots, m_\mu. \end{aligned} \tag{3.24}$$

ここで，

$$p_0 := 0.$$

$\Theta \in \mathbb{C}^{dM\times dM}$ を次により定義する：

$$\Theta := \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Theta_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Theta_K \end{pmatrix}. \tag{3.25}$$

ここで，(3.24) と (3.23) により定まる $\theta_{\mu,j}$ を用いて，$\mu=1,\dots,K$ に対し，$\Theta_\mu \in \mathbb{C}^{dm_\mu \times dm_\mu}$ は次で定義される：

$$\Theta_\mu := \begin{pmatrix} \theta_{\mu,1} & \theta_{\mu,2} & \cdots & \theta_{\mu,m_\mu-1} & \theta_{\mu,m_\mu} \\ \theta_{\mu,2} & \theta_{\mu,3} & \cdots & \theta_{\mu,m_\mu} & \\ \vdots & \vdots & & & \\ \theta_{\mu,m_\mu-1} & \theta_{\mu,m_\mu} & & & \\ \theta_{\mu,m_\mu} & & & & \text{\Large 0} \end{pmatrix}. \tag{3.26}$$

$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し $\Pi_n \in \mathbb{C}^{dM \times dM}$ を次で定義する：

$$\Pi_n := \begin{pmatrix} \Pi_{1,n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Pi_{2,n} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Pi_{K,n} \end{pmatrix}. \tag{3.27}$$

ここで，(3.7) の $\mathbf{p}_{\mu,i}(n)$ を用いて，$\mu=1,\dots,K$ と $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し，$\Pi_{\mu,n} \in \mathbb{C}^{dm_\mu \times dm_\mu}$ は次で定義される：

$$\Pi_{\mu,n} := \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{\mu,1}(n) & \mathbf{p}_{\mu,2}(n) & \mathbf{p}_{\mu,3}(n) & \cdots & \mathbf{p}_{\mu,m_\mu}(n) \\ & \mathbf{p}_{\mu,1}(n) & \mathbf{p}_{\mu,2}(n) & \cdots & \mathbf{p}_{\mu,m_\mu-1}(n) \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \mathbf{p}_{\mu,2}(n) \\ \text{\Large 0} & & & & \mathbf{p}_{\mu,1}(n) \end{pmatrix}. \tag{3.28}$$

最後に，$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し $G_n, \tilde{G}_n \in \mathbb{C}^{dM \times dM}$ を次で定義する：

$$G_n := \Pi_n \Theta \Lambda, \tag{3.29}$$

$$\tilde{G}_n := (\Pi_n \Theta)^* \Lambda^{\mathrm{T}}. \tag{3.30}$$

4　有限予測係数に対する閉形式表示

前の節と同様，(1.3) の K に対し $K \geq 1$ を仮定する．

多変量 ARMA 過程の有限予測係数 $\phi_{n,j}$ に対する閉形式表示を述べる準備ができた．

定理 4.1 ([1])**.** $n \geq \max(m_0, 1)$ と $j=1,\dots,n$ に対し，次が成り立つ：

$$\phi_{n,j} = c_0 a_j + c_0 \mathbf{p}_0^{\mathrm{T}} (I_{dM} - \tilde{G}_n G_n)^{-1} (\Pi_n \Theta)^* \{\Lambda^{\mathrm{T}} \Pi_n \Theta v_j + \tilde{v}_{n-j+1}\}. \tag{4.1}$$

系 4.2 ([1])**.** もし $m_0 = 0$ ならば，$n \geq 1$ と $j=1,\dots,n$ に対し，次が成り立つ：

$$\phi_{n,j} = c_0 a_j + c_0 \mathbf{p}_0^{\mathrm{T}} (I_{dM} - \tilde{G}_n G_n)^{-1} (\Pi_n \Theta)^* \{\Lambda^{\mathrm{T}} \Pi_n \Theta \Xi_j \rho + \Xi_{n-j+1} \tilde{\rho}\}. \tag{4.2}$$

系 4.3 ([1])**.** $m_\mu = 1$ ($\mu = 1,\dots,K$) と $m_0 = 0$ を仮定する．すると，$n \geq 1$ と $j = 1,\dots,n$ に対し，次が成り立つ：

$$\phi_{n,j} = c_0 a_j + c_0 \mathbf{p}_0^{\mathrm{T}} (I_{dM} - \tilde{G}_n G_n)^{-1} (\Pi_n \Theta)^* \{\Lambda^{\mathrm{T}} \Pi_n \Theta \Xi_j \rho + \Xi_{n-j+1} \tilde{\rho}\}. \tag{4.3}$$

ここで，$a_j = \sum_{\mu=1}^{K} \overline{p}_\mu^j \rho_{\mu,1}$ *for* $j \geq 1$, $\mathbf{p}_0^{\mathrm{T}} = (I_d, \ldots, I_d) \in \mathbb{C}^{d \times dK}$,

$$\Theta = \begin{pmatrix} p_1 h_\sharp(p_1)\rho_{1,1}^* & & & 0 \\ & p_2 h_\sharp(p_2)\rho_{2,1}^* & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & p_K h_\sharp(p_K)\rho_{K,1}^* \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{dK \times dK},$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-p_1\overline{p}_1} I_d & \frac{1}{1-p_1\overline{p}_2} I_d & \cdots & \frac{1}{1-p_1\overline{p}_K} I_d \\ \frac{1}{1-p_2\overline{p}_1} I_d & \frac{1}{1-p_2\overline{p}_2} I_d & \cdots & \frac{1}{1-p_2\overline{p}_K} I_d \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{1-p_K\overline{p}_1} I_d & \frac{1}{1-p_K\overline{p}_2} I_d & \cdots & \frac{1}{1-p_K\overline{p}_K} I_d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{dK \times dK},$$

$$\Pi_n = \begin{pmatrix} p_1^n I_d & & & 0 \\ & p_2^n I_d & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & p_K^n I_d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{dK \times dK}, \qquad n \geq 0,$$

$$\Xi_n = \begin{pmatrix} \frac{\overline{p}_1^n}{1-p_1\overline{p}_1} I_d & \frac{\overline{p}_2^n}{1-p_1\overline{p}_2} I_d & \cdots & \frac{\overline{p}_K^n}{1-p_1\overline{p}_K} I_d \\ \frac{\overline{p}_1^n}{1-p_2\overline{p}_1} I_d & \frac{\overline{p}_2^n}{1-p_2\overline{p}_2} I_d & \cdots & \frac{\overline{p}_K^n}{1-p_2\overline{p}_K} I_d \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\overline{p}_1^n}{1-p_K\overline{p}_1} I_d & \frac{\overline{p}_2^n}{1-p_K\overline{p}_2} I_d & \cdots & \frac{\overline{p}_K^n}{1-p_K\overline{p}_K} I_d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{dK \times dK}, \qquad n \geq 1,$$

$$\rho = (\rho_{1,1}^{\mathrm{T}}, \rho_{2,1}^{\mathrm{T}}, \ldots, \rho_{K,1}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^{dK \times d},$$

$$\tilde{\rho} = \left(\overline{\rho_{1,1}^\sharp}, \overline{\rho_{2,1}^\sharp}, \ldots, \overline{\rho_{K,1}^\sharp}\right)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^{dK \times d}$$

および $G_n = \Pi_n \Theta \Lambda$, $\tilde{G}_n = (\Pi_n \Theta)^* \Lambda^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^{dK \times dK}$ である．

参考文献

[1] Inoue, A. (2018). Closed-form expression for finite predictor coefficients of vector ARMA processes, https://arxiv.org/abs/1805.04820

[2] Inoue, A. and Kasahara, Y. (2006). Explicit representation of finite predictor coefficients and its applications. *Ann. Statist.* **34** 973–993.

[3] Inoue, A. and Kasahara, Y. (2018). Simple matrix representations of the orthogonal polynomials for a rational spectral density on the unit circle. *J. Math. Anal. Appl.* **464** 1366–1374.

[4] Inoue, A., Kasahara, Y. and Pourahmadi, M. (2016). The intersection of past and future for multivariate stationary processes. *Proc. Amer. Math. Soc.* **144** 1779–1786.

[5] Inoue, A., Kasahara, Y. and Pourahmadi, M. (2018). Baxter's inequality for finite predictor coefficients of multivariate long-memory stationary processes. *Bernoulli* **3** 1202–1232.