数理解析研究所講究録 第2116巻 2019年 124-127

CONSERVATIVENESS AND FELLER PROPERTY OF DIFFUSION PROCESSES ON RIEMANNIAN MANIFOLDS WITH m-BAKRY-ÉMERY RICCI TENSOR FOR $m \leq 1$

桑江一洋 (K. Kuwae) 福岡大学理学部

1. Laplacian の比較定理

中国科学院の Xiang-Dong Li 氏との Laplacian の比較定理に関する共同研究 [5] に基づき, 氏と北京師範大学の Songzi Li 氏との共同研究 [6] について報告する. (M,g) を完備で滑らかな境界のないリーマン多様体とする。$\phi \in C^2(M)$ を固定する。$C_0^\infty(M)$ 上の作用素 L を $L := \Delta - \langle \nabla\phi, \nabla\cdot\rangle$ で定めると, これは $\mu := e^{-\phi}\mathrm{vol}_g$ について対称になる。すなわち $\int_M (-Lf)g\mathrm{d}\mu = \int_M \langle \nabla f, \nabla g\rangle \mathrm{d}\mu =: \mathcal{E}(f,g)$ が $f,g \in C_0^\infty(M)$ で成立する。L を Witten Laplacian あるいは重み付き Laplacian と呼ぶ。ディリクレ形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ を $(\mathcal{E}, C_0^\infty(M))$ の $L^2(M;\mu)$ 上の最小閉拡張とし, $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ に対応する拡散過程を $\mathbf{X} = (\Omega, X_t, \mathbf{P}_x)$ とおく。$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ の $L^2(M;\mu)$-半群は連続な熱核を許容することが知られている ($\phi \in C^\infty(M)$ のときは [3, 7.5] を参照)。$m \in]-\infty, +\infty]$ に対して m-Bakry-Émery リッチテンソル $\mathrm{Ric}_{m,n}(L)$ を

$$\mathrm{Ric}_{m,n}(L)(x) := \mathrm{Ric}(x) + \mathrm{Hess}\,\phi(x) - \frac{\nabla\phi(x)\otimes\nabla\phi(x)}{m-n}$$

で定める。M 上の関数 K に対して $\mathrm{Ric}_{m,n}(L)(x) \geq K(x)$, $x \in M$ が成立するとき曲率次元条件 $\mathrm{CD}(K,m)$ が成立すると呼ぶ。$m = n$ のときは ϕ は定数と規約する。この場合は $\mathrm{Ric}_{m,n}(L)(x) = \mathrm{Ric}(x)$ となる。$m \geq n$ で K が定数なら (M, d_g, μ) の $\mathsf{RCD}(K,m)$-条件と同値になる。ここでは $m \leq 1$ の場合に重み付き Laplacian L の比較定理 ([5]) に基づいて $\mathbf{X}$ の保存性と Feller 性への変形されたやや強い判定条件を与える。$r_p(x) := d_g(x,p)$ を距離関数とする。

定義 1.1 ((ϕ,m)-完備性)**.** $m \leq 1$ とする。(M,g,ϕ) が (ϕ,m)-完備であるとは任意の $p \in M$ に対して

$$\varlimsup_{r\to\infty} \inf\left\{ \int_0^r e^{-\frac{2\phi(\gamma_t)}{n-m}}\mathrm{d}t \;\middle|\; \gamma\text{は単位速度測地線で}\gamma_0 = p, \gamma_{r_p(x)} = x \right\} = +\infty$$

が成立することとする。

以下の比較定理は $m = 1$ で κ が定数の場合に [8] で最初に証明された。

定理 1.2 (Laplacian の比較定理 [5], cf. [8])**.** $x, p \in M$, $m \leq 1$ とする。$\mathrm{Ric}_{m,n}(L)(x) \geq (n-m)\kappa(s_p(x))e^{-\frac{4\phi(x)}{n-m}}$, $x \in B_R(p)$ なら,

$$Lr_p(x) \leq (n-m)\mathsf{cot}_\kappa(s_p(x))e^{-\frac{2\phi(x)}{n-m}}$$

が $x \in \{r_p < R, s_p < \delta_\kappa\} \setminus \mathrm{Cut}(p) \cup \{p\}$ で成立する。ここで κ は $[0, +\infty[$ 上の連続関数で, $s_p(x)$ は

$$s_p(x) = \inf\left\{ \int_0^{r_p(x)} e^{-\frac{2\phi(\gamma_t)}{n-m}}\mathrm{d}t \;\middle|\; \gamma\text{は単位速度測地線で}\gamma_0 = p, \gamma_{r_p(x)} = x \right\}$$

で与えられる。さらに (M,g,ϕ) が (ϕ,m)-完備なら $x\in\{r_p<R\}\setminus\mathrm{Cut}(p)\cup\{p\}$ で結論が成立する。ここで cot_κ は初期条件 $\lim_{s\to 0} s\,\mathsf{cot}_\kappa(s)=1$ をみたす Riccati 方程式

$$-\frac{\mathrm{d}\mathsf{cot}_\kappa}{\mathrm{d}s}(s)=\kappa(s)+\mathsf{cot}_\kappa(s)^2, \tag{1.1}$$

の $[0,\delta_\kappa[$ 上の解で δ_κ はその爆発時刻である。$\kappa\le 0$ なら $\delta_\kappa=+\infty$ となる。$\delta_\kappa<\infty$ なら末期条件 $\lim_{s\to\delta_\kappa}(\delta_\kappa-s)\,\mathsf{cot}_\kappa(s)=1$ も満たされる。κ が定数のときは $\kappa\le 0$ の場合も込めて $\mathsf{cot}_\kappa(s)=\sqrt{\kappa}\cos(\sqrt{\kappa}s)/\sin(\sqrt{\kappa}s)$, $\delta_\kappa=\pi/\sqrt{\kappa_+}$ となる。

定理 1.2の証明は以下の２つの補題に基づく。

補題 1.3. $m\le 1$ とする。γ_r を単位速度測地線で $\gamma_0=p$ と $\dot\gamma_0=\theta\in\mathbb{S}^{n-1}$ を満たすものとする。s を $\mathrm{d}s=e^{\frac{-2\phi(\gamma(r))}{n-m}}\mathrm{d}r$ を満たすパラメータとし，$\lambda(r,\theta)=(e^{\frac{2\phi}{n-m}}Lr_p)(r,\theta)$ とする。 このとき

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}s}\le-\frac{\lambda^2}{n-m}-e^{\frac{4\phi(\gamma(r))}{n-m}}\ \mathrm{Ric}_{m,n}(L)\left(\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}r},\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}r}\right) \tag{1.2}$$

となる。特に

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}r}\le-e^{\frac{-2\phi(\gamma(r))}{n-m}}\frac{\lambda^2}{n-m}-e^{\frac{2\phi(\gamma(r))}{n-m}}\ \mathrm{Ric}_{m,n}(L)\left(\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}r},\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}r}\right) \tag{1.3}$$

が $x=(r,\theta)\notin\mathrm{Cut}(p)\cup\{p\}$ で成立する。さらに等号がある点で成立すれば，その点において $\nabla^2 r_p$ は多重度 $n-1$ の零でない固有値を一つもつ。

補題 1.4 (リッカチ不等式の比較定理)**.** $\kappa:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ を連続関数とし，a_κ を $]0,\delta_\kappa[$ で定義される境界条件 $\lim_{s\downarrow 0}\mathsf{a}_\kappa(s)=+\infty$ を満たすリッカチ方程式 $\mathsf{a}'_\kappa(s)+\mathsf{a}_\kappa(s)^2+\kappa(s)=0,\ s\in]0,\delta_\kappa[$ の一意的な C^1-解とする。$S\in]0,+\infty[$ を固定する。$\mathsf{b}_\kappa(s)$ を $]0,S[$ での C^1-関数で境界条件 $\lim_{s\downarrow 0}\mathsf{b}_\kappa(s)=+\infty$ を伴うリッカチ不等式 $\mathsf{b}'_\kappa(s)+\mathsf{b}_\kappa(s)^2+\kappa(s)\le 0$ *for* $s\in]0,S[$ の解とする。このとき $\mathsf{b}_\kappa\le\mathsf{a}_\kappa$ が $]0,S\wedge\delta_\kappa[$ 上で成立する。

補題 1.3の証明は L に対する Bochner-Weitzenböck 公式: u が C^3 となる点で

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}L|\nabla u|^2&=|\nabla^2 u|^2+\mathrm{Ric}_{\infty,n}(L)(\nabla u,\nabla u)+\langle\nabla Lu,\nabla u\rangle\\&=|\nabla^2 u|^2+\mathrm{Ric}_{m,n}(L)(\nabla u,\nabla u)-\frac{\nabla\phi\otimes\nabla\phi}{n-m}(\nabla u,\nabla u)+\langle\nabla Lu,\nabla u\rangle.\end{aligned}$$

を $u=r_p$ on $M\setminus\mathrm{Cut}(p)\cup\{p\}$ で適用することと，$M\setminus\mathrm{Cut}(p)\cup\{p\}$ 上で $|\nabla r_p|=1$ より $\nabla^2 r_p$ に対して ∇r_p が固有値 0 に対応する固有ベクトルであることから従う不等式

$$|\nabla^2 r_p|^2\ge\frac{(\Delta r_p)^2}{n-1}\ge\frac{(\Delta r_p)^2}{n-m}.$$

から得られる。

2. 主結果

$\phi_p(r) := \inf_{B_r(p)} \phi$ とする。K を $[0, +\infty[$ 上の非負連続な非減少関数で以下の $(\mathbf{K})$ という条件を満たすとする:

$$(\mathbf{K}): \qquad \int_{r_o}^{\infty} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\mathsf{K}\left(e^{-\frac{2\phi_p(r)}{n-m}} r\right) e^{-\frac{2\phi_p(r)}{n-m}}}} = +\infty \quad \text{for some} \quad r_o > 0.$$

注意 2.1. (1) 条件 $(\mathbf{K})$ は $\phi_p(r) \le \phi(p)$ から

$$\int_{r_o}^{\infty} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\mathsf{K}(r)}} = +\infty \quad \text{for some} \quad r_o > 0 \tag{2.1}$$

を常に意味する。さらに ϕ が下に有界なら逆も成立する。

(2) 条件 $(\mathbf{K})$ は $p \in M$ には依存しない。

定理 2.2 ($\mathbf{X}$ の保存性)**.** $p \in M$ を固定する。条件 $(\mathbf{K})$ を仮定し

$$\mathrm{Ric}_{m,n}(L)(x) \ge -\mathsf{K}(s_p(x)) e^{-\frac{4\phi(x)}{n-m}} \quad \textit{for any } x \in M \tag{2.2}$$

が $m \le 1$ で成立するとする。このとき $\mathbf{X}$ は保存的である。

定理 2.3 ($\mathbf{X}$ の Feller 性)**.** 条件 $(\mathbf{K})$ を仮定し

$$\mathrm{Ric}_{m,n}(L)(z) \ge -\mathsf{K}(s_q(z)) e^{-\frac{4\phi(z)}{n-m}} \quad \textit{for any} \quad z, q \in M \tag{2.3}$$

が $m \le 1$ で成立するとする。このとき $\mathbf{X}$ は *Feller* 性をもつ。

例 2.4. $\varepsilon \in [0,1]$ と $\delta \in [\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}, 1]$ を考える．K を正定数とし $\mathsf{K}(r) = K r^{2(1-\delta)}$ とおく．このとき (2.1) が常に成立する．非正 C^2-関数 $\phi(x) = -\frac{(n-m)\varepsilon}{4}\log(1+r_p^2(x))$ を考える．このとき $\phi_p(r) \ge -\frac{(n-m)\varepsilon}{4}\log(1+r^2)$ であり，これより条件 $(\mathbf{K})$ が成立する．特に $\varepsilon = \delta = 1$ の場合に次が成立する．もし $\mathrm{Ric}_{m,n}(L)(x) \ge -Ke^{-\frac{4\phi(x)}{n-m}}$ がすべての $x \in M$ に対して $m \le 1$ で成立すれば, 熱半群 $P_t = e^{tL}$ は保存性とフェラー性をもつ.

例 2.5. ユークリッド空間 $(M, g) = (\mathbb{R}^n, g_{\mathrm{Euc}})$ の場合を考える．この場合は $\mathrm{Ric}_{m,n}(L) = (n-m)e^{-\frac{\phi}{n-m}} \mathrm{Hess}\left(e^{\frac{\phi}{n-m}}\right)$ である．K を非負定数とし以下の条件を考える．

$$(\mathbf{A}) \qquad \mathrm{Hess}\left(e^{\frac{\phi}{n-m}}\right) + \frac{K}{n-m} e^{-\frac{3\phi}{n-m}} E_n \ge O.$$

ここで E_n (resp. O) は (n,n)-単位 (resp. (n,n)-零) 行列である．条件 $(\mathbf{A})$ の下では $\mathbb{R}^n$ 上で $\mathrm{Ric}_{m,n}(L) \ge -Ke^{-\frac{4\phi}{n-m}}$ である．この場合, 条件 $(\mathbf{K})$ は $K=0$ か $K>0$ かつ $\phi(x) \ge -\frac{n-m}{4}\log(1+|x-p|^2)$ がある $p \in \mathbb{R}^n$ で成立するときに $\mathsf{K} \equiv K$ で成立する．$K=0$ の場合を考えよう．このとき熱半群 $P_t = e^{tL}$ は $e^{\frac{\phi}{n-m}}$ の凸性から保存性とフェラー性をもつ． 特に, ϕ の凸性があれば同じ結論を得る． この事実は $m \ge n$ の場合での [7, Theorems 1.4 and 1.5] の結果と $|\nabla\phi(x)| \le C|x-p|\log\log(1+|x-p|)$ がある $C>0$ と $p \in \mathbb{R}^n$ で成立することからも示せる．次に $K>0$ の場合を考える．仮定 $(\mathbf{A})$ は $K \ge \frac{n-m}{2}$ の場合に $\phi(x) = -\frac{n-m}{4}\log(1+|x|^2)$ に対して成立する.

実際，$f(x) := e^{\frac{\phi(x)}{n-m}} = (1+|x|^2)^{-\frac{1}{4}}$ は $K \geq \frac{n-m}{2}$ で次の評価を満たす：

$$\begin{aligned}
\operatorname{Hess} f(x) + \frac{K}{n-m} f^{-3}(x) E_n &\geq \operatorname{Hess} f(x) + \frac{K}{n-m} f(x) E_n \\
&= (1+|x|^2)^{-\frac{9}{4}} \left(\frac{5}{4} x_i x_j - \frac{1}{2}(1+|x|^2)\delta_{ij} + \frac{K}{n-m}(1+|x|^2)^2 \delta_{ij} \right)_{ij} \\
&\geq \frac{5}{4}(1+|x|^2)^{-\frac{9}{4}} (x_i x_j)_{ij} \geq O.
\end{aligned}$$

したがって (2.3) が成立し，$\phi(x) := -\frac{n-m}{4}\log(1+|x|^2) \in C^2(\mathbb{R}^n)$ は条件 (**K**) を $K \geq \frac{n-m}{2}$ の下で満たす．これより熱半群 $P_t = e^{tL}$ は $m < 1$ で $\phi(x) = -\frac{n-m}{4}\log(1+|x|^2)$ に対して保存性とフェラー性をもつ.

定理 2.2の証明は Grigor'yan [2] の保存性の判定条件に帰着される。また定理 2.3の証明は Azencott [1] の Feller 性の判定条件に帰着される ([4] に通常の Laplacian の場合での証明がある)。$m \geq n$ の場合の Laplacian の比較定理は $\mathrm{Ric}_{m,n}(L)(x) \geq (m-1)\kappa(r_p(x))$ なら $Lr_p(x) \leq (m-1)\mathsf{cot}_\kappa(r_p(x))$, $r_p(x) < \delta_\kappa$ の形のため, $\mathbf{X}$ の保存性や Feller 性は (**K**) よりも弱い条件である (2.1) で成立することが知られている ([7, Theorems 1.4 and 1.5])

References

[1] R. Azencott, *Behavior of diffusion semi-groups at infinity*, Bull. Soc. Math. France **102** (1974), 193–240.

[2] A. Grigor'yan, *On stochastically complete manifolds*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **290** (1986), 534–537.

[3] A. Grigor'yan, *Heat kernel and analysis on manifolds*, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, **47**. American Mathematical Society, Providence, RI; International Press, Boston, MA, 2009.

[4] E. P. Hsu, *Stochastic analysis on manifolds*, Graduate Studies in Mathematics, **38**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[5] K. Kuwae and X.-D. Li, *Laplacian comparison theorem on Riemannian manifolds with* CD(K,m)*-condition for* $m \leq 1$, preprint, 2018.

[6] K. Kuwae, S.-Z. Li and X.-D. Li, *Conservativeness and Feller property of diffusion processes on Riemannian manifolds with m-Bakry-Émery Ricci tensor for* $m \leq 1$, 2018, preprint.

[7] X.-D. Li, *Liouville theorems for symmetric diffusion operators on complete Riemannian manifolds*, J. Math. Pures Appl. (9) **84** (2005), no. 10, 1295–1361.

[8] W. Wylie and D. Yeroshkin, *On the geometry of Riemannian manifolds with density*, preprint, 2016.