数理解析研究所講究録 第2116巻 2019年 147-156

確率幾何的表現を用いた量子 Ising 模型の平均場臨界現象の解析

北海道大学大学院理学院数学専攻　上島芳倫 *
Yoshinori Kamijima
Department of Mathematics, Hokkaido University

1　導入

本稿では，量子 Ising 模型の平均場臨界現象が古典 Ising 模型のそれからどの程度ずれるのかという問題について，現在までに得られた結果を紹介する．なお，本研究は半田悟氏（北海道大学）と坂井哲氏（北海道大学）との共同研究 [11] である．

1.1　古典 Ising 模型

強磁性体の相転移を記述するモデルに Ising 模型がある．古典 Ising 模型とは，スピン配置 $\sigma = \{\sigma_x\}_{x\in\Lambda} \in \{-1,+1\}^\Lambda$ ($\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ は有限格子) 上の関数

$$H^{\mathrm{cl}}(\sigma) = -\sum_{x,y\in\Lambda} J_{x,y}\sigma_x\sigma_y - h\sum_{x\in\Lambda}\sigma_x \tag{1}$$

によって定まる確率測度に従って，σ がランダムに与えられるというモデルである．ここで，$J_{x,y} \in \mathbb{R}$ を相互作用係数，$h > 0$ を外部磁場の強さといい、$H^{\mathrm{cl}}(\sigma)$ を Hamiltonian 関数という．その確率測度による物理量の期待値を調べることによって，相転移現象を解析できる．具体的には，逆温度 $\beta \in (0,\infty]$ に対して確率測度を $\mathrm{e}^{-\beta H^{\mathrm{cl}}(\sigma)}/Z^{\mathrm{cl}}(\beta)$ と定め，物理量 $A\colon \{-1,+1\}^\Lambda \to \mathbb{R}$ の期待値を次のように定義する：

$$\langle\!\langle A\rangle\!\rangle_{\beta,h;\Lambda} = \sum_{\sigma\in\{-1,+1\}^\Lambda} A(\sigma)\frac{\mathrm{e}^{-\beta H^{\mathrm{cl}}(\sigma)}}{Z^{\mathrm{cl}}(\beta)}, \quad \text{ただし } Z^{\mathrm{cl}}(\beta) = \sum_{\sigma\in\{-1,+1\}^\Lambda} \mathrm{e}^{-\beta H^{\mathrm{cl}}(\sigma)}.$$

規格化定数 $Z^{\mathrm{cl}}(\beta)$ を分配関数と呼ぶ.

相転移を起こすかどうかを見るには，無限体積極限でのスピン σ_x の平均的な向き（磁化）$m(\beta,h) = \lim_{\Lambda\uparrow\mathbb{Z}^d} |\Lambda|^{-1}\sum_{x\in\Lambda}\langle\!\langle\sigma_x\rangle\!\rangle_{\beta,h;\Lambda}$ を調べる．磁化に対して，磁場の強さを小さくし

* kamijima@math.sci.hokudai.ac.jp

ていった極限 $\lim_{h\downarrow 0} m(\beta,h)$ を自発磁化といい，自発磁化は高温では 0，低温では 0 にならないことが知られている[1)]．この自発磁化の値が変わる境目 β_{c} を臨界点と呼ぶ．

また，スピン同士の共分散のような量 $\chi^{\mathrm{cl}}(\beta)=\lim_{\Lambda\uparrow\mathbb{Z}^d}\beta|\Lambda|^{-1}\sum_{x,y\in\Lambda}\langle\!\langle\sigma_x;\sigma_y\rangle\!\rangle_{\beta,0;\Lambda}$ (ここで，$\langle\!\langle\sigma_x;\sigma_y\rangle\!\rangle_{\beta,0;\Lambda}\coloneqq\langle\!\langle\sigma_x\sigma_y\rangle\!\rangle_{\beta,0;\Lambda}-\langle\!\langle\sigma_x\rangle\!\rangle_{\beta,0;\Lambda}\langle\!\langle\sigma_y\rangle\!\rangle_{\beta,0;\Lambda}$) を帯磁率といい，帯磁率は臨界点 β_{c} で発散することが知られている[2)]．このような，物理量が発散するなどの臨界点付近で起こる特異な現象の総称を臨界現象と呼ぶ．特に，帯磁率では $\chi^{\mathrm{cl}}(\beta)\asymp(\beta_{\mathrm{c}}-\beta)^{-\gamma}$ という冪乗則が成り立つと信じられている[3)]．ここに現れた指数 γ を臨界指数と呼ぶ．

1.2　平均場臨界現象

格子の次元 d が十分大きいとき，臨界指数は対応するランダムウォークの臨界指数に一致すると予想されている．これは直感的には，(1) の第 1 項に対してスピンの配位数に関する大数の法則のようなものが成り立つことにより，スピンの向きが独立なものの如く決まる，と理解できる．このときの臨界指数 ($\gamma=1$) を平均場臨界指数と呼ぶ．

古典 Ising 模型の臨界指数が平均場臨界指数に退化することを数学的に厳密に証明するための十分条件として，次の赤外評価がある：4 次元より大きい次元 d に対して，

$$\exists C\in(0,\infty),\quad \forall\beta<\beta_{\mathrm{c}},\quad 0\le\hat{G}_\beta(k)\coloneqq\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}\langle\!\langle\sigma_o\sigma_x\rangle\!\rangle_\beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}\le\frac{C}{\hat{J}_0-\hat{J}_k}. \tag{2}$$

ここで，$\hat{J}_k$ は $J_{o,x}$ の Fourier 変換 $\hat{J}_k=\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}J_{o,x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}$ を意味する．具体的な場合に計算すると，この不等式の最右辺はランダムウォークの Green 関数の Fourier 変換になることが容易にわかる．もし (2) が成り立てば，次の不等式 [1] から $\gamma=1$ が導かれる．すなわち，$B^{\mathrm{cl}}\coloneqq\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}\langle\!\langle\sigma_o\sigma_x\rangle\!\rangle_\beta^2$ とおくと，

$$\exists C_1,C_2(B^{\mathrm{cl}})\in(0,\infty),\quad \frac{C_1}{\beta_{\mathrm{c}}-\beta}\le\chi^{\mathrm{cl}}(\beta)\le\frac{C_2(B^{\mathrm{cl}})}{\beta_{\mathrm{c}}-\beta}. \tag{3}$$

実際，Parseval の等式と (2) を適用して積分を計算[4)]すれば $B^{\mathrm{cl}}<\infty$ がわかる．

古典 Ising 模型において，赤外評価を証明するための手法には鏡映正値性 [6] とレース展開 [14] がある．鏡映正値性は格子の形や相互作用係数に強い制限があるものの，上部臨界次元（臨界指数が平均場臨界指数に退化する境目の次元）ぎりぎりで赤外評価を証明できる手法である．レース展開は有効な次元を下げるのに精度良い評価が必要であるものの，格子の形に制限が少ない上に臨界点の漸近評価も得られる強力な手法である．

---

1) 例えば，[12, 第 6 章および第 7 章] を参照．

2) 例えば，[12, 定理 8.1] を参照．

3) 実関数 f と g に対して，$t\to\alpha$ のとき $f(t)\asymp g(t)$ とは，$\exists c_1,c_2<\infty$ s.t. $c_1g(t)\le f(t)\le c_2g(t)$．

4) d 次元ランダムウォークに対する再帰性の計算と殆ど同じ．

1.3　量子 Ising 模型

古典 Ising 模型は格子点上のスピンの方向だけを考慮したモデルであった．ところが，現代物理学によれば，実際のスピンは量子力学的に扱われるべき対象である．そこで，古典 Ising 模型のスピンを対応する作用素で置き換え，横磁場を印加する（詳しい定義は次節を参照）．このようにして得られるモデルが量子 Ising 模型である．スピンを作用素として扱うという点で，これはより現実的なモデルといえる．実際，古典 Ising 模型と異なる興味深い性質を示す．例えば，温度を固定しても横磁場の強さを変化させせることによって相転移を起こす．これに関する数学的な結果は Björnberg [3] によって得られている．その論文では，高次元の量子 Ising 模型において，温度を固定したときに相互作用係数や横磁場の強さを変化させせると帯磁率が平均場臨界指数に従って発散することが示されている．

その一方で，特に，講演者らは横磁場（量子効果）を加えたときにその高次元での振る舞いが古典系からどの程度ずれるかということに興味がある．問題設定としてはよく似ているものの，Björnberg の結果は温度を固定したときに相互作用係数や横磁場の強さを変化させた場合であって，温度変化は考慮されていない．古典系からのずれという観点からは相互作用係数を固定したときに温度や横磁場の強さを変化させた場合の応答を調べたい．講演者らは現在までに，ある条件の下，古典系の (3) に対応する不等式を得た．以下では量子 Ising 模型の詳しい定義を述べたあと，その不等式を証明する．

2　モデルの定義

有限格子を $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ とする．量子 Ising 模型の定義を述べる前に，次のテンソル積に関する記法を導入する：Pauli 行列

$$S^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

に対して，それらと単位行列 I によるテンソル積を

$$S_x^i := \underbrace{I \otimes \cdots \otimes I \otimes \overset{x}{\overbrace{S^i}} \otimes I \otimes \cdots \otimes I}_{|\Lambda|\text{ 個}} \qquad (i = 1, 3,\ x \in \Lambda),$$

$$S_x^i S_y^j := \underbrace{I \otimes \cdots \otimes I \otimes \overset{x}{\overbrace{S^i}} \otimes I \otimes \cdots \otimes I \otimes \overset{y}{\overbrace{S^j}} \otimes I \otimes \cdots \otimes I}_{|\Lambda|\text{ 個}} \qquad (i, j = 1, 3,\ x, y \in \Lambda)$$

と書く．このとき，量子 Ising 模型の Hamiltonian と分配関数を次のように定義する．

定義 1. $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ を有限格子とする．量子 Ising 模型の Hamiltonian 作用素とはテンソル空

間 $\bigotimes_{x\in\Lambda}\mathbb{C}^2$ 上の作用素

$$H=-\sum_{x,y\in\Lambda}J_{x,y}S_x^3S_y^3-h\sum_{x\in\Lambda}S_x^3-\delta\sum_{x\in\Lambda}S_x^1$$

である．ここで，$J_{x,y}\in\mathbb{R}$ を相互作用係数，$h>0$ を外部磁場の強さ，$\delta>0$ を横磁場の強さと呼ぶ．また，逆温度 $\beta\in(0,\infty]$ と $A\colon\bigotimes_{x\in\Lambda}\mathbb{C}^2\to\bigotimes_{x\in\Lambda}\mathbb{C}^2$ に対して，行列のトレースを用いて分配関数 Z と作用素 A の期待値 $\langle A\rangle_{\beta,\delta,h;\Lambda}$ を

$$Z(\beta,h,\delta)=\mathrm{Tr}\left[\mathrm{e}^{-\beta H}\right],\qquad \langle A\rangle_{\beta,\delta,h;\Lambda}=\frac{\mathrm{Tr}\left[A\mathrm{e}^{-\beta H}\right]}{Z(\beta,\delta,h)}$$

と定義する．

注意 2. 以下では有限格子 Λ に周期境界条件を課してトーラスとみなす．また，相互作用係数には並進対称性 $\{J_{x,y}\}_{x,y\in\Lambda}=\{J_{o,y-x}\}_{x,y\in\Lambda}$ を仮定し，常に $J_{x,y}>0$（強磁性）とする．なお，$\lambda\in\mathbb{R}$ について相互作用係数が特に $J_{x,y}=\lambda\mathbb{1}_{\{\|x-y\|_1=1\}}$ という形[5)]をしているとき，その $\{J_{x,y}\}_{x,y\in\Lambda}$ を最近接相互作用という．

古典 Ising 模型では自由エネルギーから熱力学的な量を定義する．量子 Ising 模型でもそれに倣って磁化と帯磁率を定義する．すなわち，自由エネルギーを

$$f(\beta,\delta,h)=\lim_{\Lambda\uparrow\mathbb{Z}^d}\frac{-1}{\beta|\Lambda|}\log Z(\beta,\delta,h)$$

とした上で，磁化と帯磁率をその微分によって，

$$m(\beta,\delta,h):=-\frac{\partial f(\beta,\delta,h)}{\partial h}\overset{\text{周期性}}{=}\lim_{\Lambda\uparrow\mathbb{Z}^d}\left\langle S_o^3\right\rangle_{\beta,\delta,h;\Lambda},\qquad \chi(\beta,\delta):=\left.\frac{\partial m(\beta,\delta,h)}{\partial h}\right|_{h=0}$$

と定義する．ただし，m の等号のところでは Λ の周期性を用いた．また，臨界点を $\beta_{\mathrm{c}}(\delta)=\inf\{\,\beta>0\mid\chi(\beta,\delta)=\infty\,\}$ で定義する．これらの量を定義する上で，極限の存在性や極限交換の正当性に関する議論が必要になるが，本稿では紙面の都合上割愛する[6)]．

3　主結果

3.1　準備

主結果の主張を述べる前に，必要な記号や先行研究の結果について述べる．

---

5) $x=(x_1,\dots,x_d)\in\mathbb{Z}^d$ に対して，$\|x\|_1=\sum_{i=1}^d|x_i|$ である．$\mathbb{1}_{\{\bullet\}}$ は $\bullet$ が真なら 1，偽なら 0 を返す定義関数である．

6) 実際に，ここで定義した $\chi(\beta,\delta)$ と下記の鈴木-Trotter 変換による表式とが一致することが証明できる．また，無限体積極限での自由エネルギーの存在性については [7] が参考になる．

3.1.1　鈴木-Trotter 変換

d 次元量子 Ising 模型は次の意味で $d+1$ 次元古典 Ising 模型と等価であることが知られている．以下では，長さ l のトーラスを $[l]=\{0,1,\dots,l-1\}$ と記す．

定理 3 ([15])**.** 有限格子 $\Lambda\subset\mathbb{Z}^d$ 上の量子 Ising 模型の分配関数 Z に対して，

$$Z(\beta,\delta,h)=\lim_{l\uparrow\infty}\left(\frac{1}{2}\sinh\frac{2\beta\delta}{l}\right)^{\frac{|\Lambda|l}{2}}\sum_{\boldsymbol{\sigma}\in\{-1,+1\}^{\Lambda\times[l]}}\mathrm{e}^{-H^{\mathrm{ST}}(\boldsymbol{\sigma})}$$

が成り立つ．ただし，$K_l=2^{-1}\log\coth(\beta\delta/l)$ とおいたとき，$\Lambda\times[l]$ 上の古典的な Hamiltonian 関数を次のように定義する：

$$H^{\mathrm{ST}}(\boldsymbol{\sigma})=-\sum_{x,y\in\Lambda}\sum_{t\in[l]}\frac{\beta J_{x,y}}{l}\sigma_{x,t}\sigma_{y,t}-\sum_{x\in\Lambda}\sum_{t\in[l]}K_l\sigma_{x,t}\sigma_{x,t+1}-\sum_{x\in\Lambda}\sum_{t\in[l]}\frac{\beta h}{l}\sigma_{x,t}.$$

実空間 Λ に新たに座標軸を加えた $\Lambda\times[l]$ を時空間と称する．時空間のスピン配置を $\boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_{x,t}\}_{x\in\Lambda,t\in[l]}\in\{-1,+1\}^{\Lambda\times[l]}$ とすると，定理 3 から，S_o^3 の期待値と帯磁率は

$$\left\langle S_o^3\right\rangle_{\beta,\delta,h;\Lambda}=\lim_{l\uparrow\infty}\langle\!\langle\sigma_{o,0}\rangle\!\rangle_{\beta,\delta,h;\Lambda,l}\coloneqq\lim_{l\uparrow\infty}\frac{\sum_{\boldsymbol{\sigma}}\sigma_{o,0}\mathrm{e}^{-H^{\mathrm{ST}}(\boldsymbol{\sigma})}}{\sum_{\boldsymbol{\sigma}}\mathrm{e}^{-H^{\mathrm{ST}}(\boldsymbol{\sigma})}},$$

$$\chi(\beta,\delta)=\lim_{\Lambda\uparrow\mathbb{Z}^d}\lim_{l\uparrow\infty}\chi_{\Lambda,l}(\beta,\delta)\coloneqq\beta\lim_{\Lambda\uparrow\mathbb{Z}^d}\lim_{l\uparrow\infty}\frac{1}{l}\sum_{(x,t)\in\Lambda\times[l]}\langle\!\langle\sigma_{o,0}\sigma_{x,t}\rangle\!\rangle_{\beta,\delta,0;\Lambda,l}$$

と，古典 Ising 模型の期待値 $\langle\!\langle\bullet\rangle\!\rangle$ で表せる．ただし，$\chi(\beta,\delta)$ の表式では周期性や高温相で磁化が 0 になることを用いている．

3.1.2　確率幾何的表現

まず，時空間の点 $X=(x,s)$, $Y=(y,t)\in\Lambda\times[l]$ に対して，改めて相互作用係数を

$$\tilde{J}_{X,Y}=\begin{cases}\beta J_{x,y}/l & [s=t];\\ K_l & [x=y\ \&\ t=s+1],\end{cases}$$

とおく．つぎに，ghost site と呼ばれる仮想的な格子点 g を導入して，時空間のボンド全体を $\mathbb{B}=\{\{X,Y\}\subset\Lambda\times[l]\mid J_{X,Y}>0\}$，ghost site とのボンド全体を $\mathbb{G}=\{\{X,g\}\mid X\in\Lambda\times[l]\}$ と書く．このとき，例えば，二点相関関数 $\langle\sigma_X\sigma_Y\rangle_{\beta,\delta,h;\Lambda,l}$ は

重みを $w(\boldsymbol{n})=\prod_{b\in\mathbb{B}}\frac{\tilde{J}_b^{n_b}}{n_b!}\prod_{b'\in\mathbb{G}}\frac{(\beta h/l)^{n_b}}{n_b!}$ として，　$\langle\!\langle\sigma_X\sigma_Y\rangle\!\rangle_{\beta,\delta,h;\Lambda,l}=\dfrac{\sum_{\boldsymbol{n}\colon\partial\boldsymbol{n}=\{X,Y\}}w(\boldsymbol{n})}{\sum_{\boldsymbol{n}\colon\partial\boldsymbol{n}=\varnothing}w(\boldsymbol{n})}$

と表せる．これをランダムカレント表現という．ただし，$\boldsymbol{n} \in \left(\{0\} \cup \mathbb{N}\right)^{\mathbb{B}\cup\mathbb{G}}$ をカレント，$\partial \boldsymbol{n} = \{V \in \Lambda \times [l] \cup \{g\} \mid \sum_{b \in \mathbb{B}\cup\mathbb{G}:\, b \ni V} n_b \text{ is odd}\}$ を源泉と呼ぶ．

補題 4 (Source switching lemma)**.** $X, Y \in \Lambda \times [l] \cup \{g\}$ が互いに $n_b > 0, \forall b \in \mathbb{B} \cup \mathbb{G}$ なるボンドで結ばれるとき，$X \overset{\boldsymbol{n}}{\longleftrightarrow} Y$ と書く．任意の実関数 $\psi(\boldsymbol{n})$ と $A \subset \Lambda \times [l]$ に対して，

$$\sum_{\substack{\boldsymbol{m}:\, \partial\boldsymbol{m}=A \\ \boldsymbol{n}:\, \partial\boldsymbol{n}=\{X,Y\}}} w(\boldsymbol{m})w(\boldsymbol{n})\psi(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}) = \sum_{\substack{\boldsymbol{m}:\, \partial\boldsymbol{m}=A\triangle\{X,Y\} \\ \boldsymbol{n}:\, \partial\boldsymbol{n}=\varnothing}} w(\boldsymbol{m})w(\boldsymbol{n})\mathbb{1}_{\{X \overset{\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}}{\longleftrightarrow} Y\}}\psi(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}).$$

この補題によって，古典 Ising 模型の相関関数を視覚的に捉えることが可能になる．例えば，スピン σ_X と σ_Y の相関を「X と Y が連結である」というパーコレーションの言葉に翻訳できる．詳しくは [12, 付録 A] などを参照されたい．

3.1.3 時空間の Ising 模型における相関不等式

以下では必要のない限り $\langle\!\langle \bullet \rangle\!\rangle$ の添え字を省略する．前節のランダムカレント表現から，相関不等式と呼ばれる様々な不等式が得られる．下記にその一部を列挙する．

Griffiths 第 1・第 2 不等式 [8, 9, 10] 任意の $A, B \subset \Lambda \times [l]$ と $X, Y \in \Lambda \times [l]$ に対して，

$$\left\langle\!\!\left\langle \prod_{X\in A} \sigma_X \right\rangle\!\!\right\rangle \geq 0, \quad \left\langle\!\!\left\langle \prod_{X\in A} \sigma_X ; \prod_{Y\in B} \sigma_Y \right\rangle\!\!\right\rangle \geq 0.$$

Lebowitz の不等式 [13] $W, X, Y, Z \in \Lambda \times [l]$ に対して，

$$\langle\!\langle \sigma_W\sigma_X ; \sigma_Y\sigma_Z \rangle\!\rangle \leq \langle\!\langle \sigma_W\sigma_Y \rangle\!\rangle \langle\!\langle \sigma_X\sigma_Z \rangle\!\rangle + \langle\!\langle \sigma_W\sigma_Z \rangle\!\rangle \langle\!\langle \sigma_Y\sigma_X \rangle\!\rangle.$$

Aizenman-Graham の不等式 [2] $W, X, Y, Z \in \Lambda \times [l]$ に対して，

$$\begin{aligned}\langle\!\langle \sigma_W\sigma_X ; \sigma_Y\sigma_Z \rangle\!\rangle \geq\ & \langle\!\langle \sigma_W\sigma_Y \rangle\!\rangle \langle\!\langle \sigma_X\sigma_Z \rangle\!\rangle + \langle\!\langle \sigma_W\sigma_Z \rangle\!\rangle \langle\!\langle \sigma_Y\sigma_X \rangle\!\rangle \\ & - \sum_{U,V\in\Lambda\times[l]} (\tanh \tilde{J}_{U,V}) \langle\!\langle \sigma_W\sigma_X ; \sigma_U\sigma_V \rangle\!\rangle \langle\!\langle \sigma_Y\sigma_V \rangle\!\rangle \langle\!\langle \sigma_Z\sigma_V \rangle\!\rangle \\ & - \langle\!\langle \sigma_W\sigma_X \rangle\!\rangle \langle\!\langle \sigma_W\sigma_Y \rangle\!\rangle \langle\!\langle \sigma_W\sigma_Z \rangle\!\rangle - \langle\!\langle \sigma_W\sigma_X \rangle\!\rangle \langle\!\langle \sigma_X\sigma_Y \rangle\!\rangle \langle\!\langle \sigma_X\sigma_Z \rangle\!\rangle.\end{aligned}$$

次の補題は Lebowitz の不等式の特別な場合である．すなわち，時間軸上の隣り合う点に対しては l^{-1} という因子が取り出せる．この事実は主結果を証明する上で重要である．

補題 5 (半田, K., 坂井)**.** $u, x \in \Lambda$ と $s, t \in [l]$ に対して，

$$\langle\!\langle \sigma_{o,0}\sigma_{x,t} ; \sigma_{u,s}\sigma_{u,s+1} \rangle\!\rangle \leq \frac{4\beta\delta}{l}\Big(\langle\!\langle \sigma_{o,0}\sigma_{u,s} \rangle\!\rangle \langle\!\langle \sigma_{x,t}\sigma_{u,s+1} \rangle\!\rangle + \langle\!\langle \sigma_{o,0}\sigma_{u,s+1} \rangle\!\rangle \langle\!\langle \sigma_{u,s}\sigma_{x,t} \rangle\!\rangle \Big).$$

証明の要旨． ランダムカレント表現によって，$\langle\!\langle \sigma_{o,0}\sigma_{x,t} ; \sigma_{u,s}\sigma_{u,s+1} \rangle\!\rangle$ は「$\{(o,0) \overset{\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}}{\longleftrightarrow} (u,s)\}$ かつ $\{(u,s+1) \overset{\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}}{\longleftrightarrow} (x,t)\}$ が起こり互いに素」または「$\{(o,0) \overset{\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}}{\longleftrightarrow} (u,s+1)\}$

かつ $\{(u,s) \xleftrightarrow{m+n} (x,t)\}$ が起こり互いに素」であることと同値である．これを大きく押さえるとボンド $\{(u,s),(u,s+1)\}$ 上のカレントが 0 であることがわかる．このとき，$n_{\{(u,s),(u,s+1)\}}$ を無理矢理偶数にすると，余分な $(\cosh K_l)^{-1}$ という因子が出る．この因子を上から押さえて，題意の不等式を得る． □

3.2　主結果の主張

時空間のバブルと呼ばれる量を $B_{\Lambda,l} \coloneqq l^{-1}\sum_{(x,t)\in\Lambda\times[l]}\langle\!\langle\sigma_{o,0}\sigma_{x,t}\rangle\!\rangle^2_{\beta,\delta;\Lambda,l}$ と定義する．このとき，帯磁率に対して，古典 Ising 模型の (3) に対応する次の不等式評価が成り立つ．この定理によって，ある条件下では $\gamma = 1$ であることがわかる．

定理 6 (半田，K.，坂井)．最近接強磁性量子 Ising 模型において，$B_{\Lambda,l} \ll 1$ かつ $\delta \ll 1$ とする[7)]．このとき，$0 < \beta < \beta_{\mathrm{c}}(\delta)$ に対して，$C(\beta, B_{\Lambda,l}) \in (0,\infty)$ が存在して，

$$\frac{\beta}{4d(\beta_{\mathrm{c}}-\beta)} \le \chi(\beta,\delta) \le \frac{C(\beta,B_{\Lambda,l})}{\beta_{\mathrm{c}}-\beta}.$$

3.3　証明

まず，有限体積での帯磁率 $\chi_{\Lambda,l}(\beta,\delta)$ に対して，次の微分不等式を示す．すなわち，$C_1, C_2 \in (0,\infty)$ が存在して

$$0 \le\ C_1\left(\frac{\chi_{\Lambda,l}(\beta,\delta)}{\beta}\right)^2 \le \frac{\partial}{\partial\beta}\frac{\chi_{\Lambda,l}(\beta,\delta)}{\beta} \le C_2\left(\frac{\chi_{\Lambda,l}(\beta,\delta)}{\beta}\right)^2 \tag{4}$$

を満たすことを示す．実際，この両辺を $(\chi_{\Lambda,l}(\beta,\delta)/\beta)^2$ で割って，$0<\beta_1<\beta_{\mathrm{c}}<\beta_2$ なる β_1 から β_2 まで積分すると，

$$C_1(\beta_2-\beta_1) \le \frac{\beta_1}{\chi_{\Lambda,l}(\beta_1,\delta)} - \frac{\beta_2}{\chi_{\Lambda,l}(\beta_2,\delta)} \le C_2(\beta_2-\beta_1)$$

となる．極限 $\Lambda\uparrow\mathbb{Z}^d$ および $l\uparrow\infty$ をとれば，β_2 の定義と $\chi_{\Lambda,l}(\beta,\delta)$ の広義単調性によって主結果の不等式を得る．

3.3.1　微分不等式の上界

帯磁率の微分は

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{\chi_{\Lambda,l}(\beta,\delta)}{\beta} = \sum_{\substack{u,v,x\in\Lambda\\ s,t\in[l]}}\frac{J_{u,v}}{l^2}\langle\!\langle\sigma_{o,0}\sigma_{x,t};\sigma_{u,s}\sigma_{v,s}\rangle\!\rangle + \sum_{\substack{u,x\in\Lambda\\ s,t\in[l]}}\frac{1}{l}\frac{\partial K_l}{\partial\beta}\langle\!\langle\sigma_{o,0}\sigma_{x,t};\sigma_{u,s}\sigma_{u,s+1}\rangle\!\rangle \tag{5}$$

7) 相互作用係数やバブルの仮定は鏡映正値性との兼ね合いに依る．

と書ける．ここで，$\partial K_l/\partial\beta = -\delta/(l\sinh(2\beta\delta/l))$ であるから，第 2 項は負になることに注意されたい．(5) の第 1 項に Lebowitz の不等式を，第 2 項に Griffths 第 2 不等式を適用すると，

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{\chi_{\Lambda,l}(\beta,\delta)}{\beta} \le \sum_{\substack{u,v,x\in\Lambda\\ s,t\in[l]}} \frac{J_{u,v}}{l^2}\Big(\langle\!\langle\sigma_{o,0}\sigma_{u,s}\rangle\!\rangle\langle\!\langle\sigma_{x,t}\sigma_{v,s}\rangle\!\rangle + \langle\!\langle\sigma_{o,0}\sigma_{v,s}\rangle\!\rangle\langle\!\langle\sigma_{u,s}\sigma_{x,t}\rangle\!\rangle\Big)$$
$$\overset{\text{対称性}}{=} \sum_{\substack{u,v,x\in\Lambda\\ s,t\in[l]}} \frac{2J_{u,v}}{l^2}\langle\!\langle\sigma_{o,0}\sigma_{u,s}\rangle\!\rangle\langle\!\langle\sigma_{x,t}\sigma_{v,s}\rangle\!\rangle \overset{\text{最近接}}{=} 4d\left(\frac{\chi_{\Lambda,l}(\beta,\delta)}{\beta}\right)^2$$

となって，(4) の上界を得る．ただし，2 番目の等号では並進対称性や周期性も使った．　□

3.3.2　微分不等式の下界

(5) の第 1 項に Aizenman-Graham の不等式を適用して，Schwarz の不等式を用いると，

$$\sum_{\substack{u,v,x\in\Lambda\\ s,t\in[l]}} \frac{J_{u,v}}{l^2}\langle\!\langle\sigma_{o,0}\sigma_{x,t};\sigma_{u,s}\sigma_{v,s}\rangle\!\rangle$$
$$\ge \underbrace{\sum_{\substack{u,v,x\in\Lambda\\ s,t\in[l]}} \frac{J_{u,v}}{l^2}\Big(\langle\!\langle\sigma_{o,0}\sigma_{u,s}\rangle\!\rangle\langle\!\langle\sigma_{x,t}\sigma_{v,s}\rangle\!\rangle + \langle\!\langle\sigma_{o,0}\sigma_{v,s}\rangle\!\rangle\langle\!\langle\sigma_{v,s}\sigma_{x,t}\rangle\!\rangle\Big)}_{=4d\chi_{\Lambda,l}(\beta,\delta)^2/\beta^2}$$
$$- \sum_{\substack{u,v,x\in\Lambda\\ s,t\in[l]}} \frac{J_{u,v}}{l^2}\sum_{X,Y\in\Lambda\times[l]}(\tanh\tilde{J}_{X,Y})\langle\!\langle\sigma_{o,0}\sigma_{x,t};\sigma_X\sigma_Y\rangle\!\rangle\langle\!\langle\sigma_{u,s}\sigma_Y\rangle\!\rangle\langle\!\langle\sigma_{v,s}\sigma_Y\rangle\!\rangle$$
$$\underbrace{- \sum_{\substack{u,v,x\in\Lambda\\ s,t\in[l]}} \frac{J_{u,v}}{l^2}\Big(\langle\!\langle\sigma_{o,0}\sigma_{x,t}\rangle\!\rangle\langle\!\langle\sigma_{o,0}\sigma_{u,s}\rangle\!\rangle\langle\!\langle\sigma_{o,0}\sigma_{v,s}\rangle\!\rangle + \langle\!\langle\sigma_{o,0}\sigma_{x,t}\rangle\!\rangle\langle\!\langle\sigma_{x,t}\sigma_{u,s}\rangle\!\rangle\langle\!\langle\sigma_{x,t}\sigma_{v,s}\rangle\!\rangle\Big).}_{\le 4dB_{\Lambda,l}\chi_{\Lambda,l}(\beta,\delta)/\beta}$$

この右辺第 3 項は $X=(w,s')$, $Y=(y,t')$ の値に応じて分類する．すなわち，$s'=t'$ のときには等式 (5) を用いて

$$\frac{1}{l}\sum_{\substack{w,x,y\in\Lambda\\ t,s'\in[l]}} \underbrace{\tanh\frac{\beta J_{w,y}}{l}}_{\le\beta J_{w,y}/l}\langle\!\langle\sigma_{o,0}\sigma_{x,t};\sigma_{w,s'}\sigma_{y,s'}\rangle\!\rangle \underbrace{\sum_{\substack{u,v\in\Lambda\\ s\in[l]}}\frac{J_{u,v}}{l}\langle\!\langle\sigma_{u,s}\sigma_{y,s'}\rangle\!\rangle\langle\!\langle\sigma_{v,s}\sigma_{y,s'}\rangle\!\rangle}_{\le 2dB_{\Lambda,l}}$$
$$\le 2d\beta B_{\Lambda,l}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{\chi_{\Lambda,l}(\beta,\delta)}{\beta} - 2d\beta B_{\Lambda,l}\sum_{\substack{u,x\in\Lambda\\ s,t\in[l]}}\frac{1}{l}\frac{\partial K_l}{\partial\beta}\langle\!\langle\sigma_{o,0}\sigma_{x,t};\sigma_{u,s}\sigma_{u,s+1}\rangle\!\rangle \tag{6}$$

と評価し，$w=y$ かつ $t'=s'+1$ のときには $\tanh K_l=(1-\tanh(\beta\delta/l))/(1+\tanh(\beta\delta/l))$ を用いて

$$\underbrace{\frac{1-\tanh(\beta\delta/l)}{1+\tanh(\beta\delta/l)}}_{\leq 1}\frac{1}{l}\sum_{\substack{x,y\in\Lambda\\ s',t\in[l]}}\langle\!\langle\sigma_{o,0}\sigma_{x,t};\sigma_{y,s'}\sigma_{y,s'+1}\rangle\!\rangle\underbrace{\sum_{\substack{u,v\in\Lambda\\ s\in[l]}}\frac{J_{u,v}}{l}\langle\!\langle\sigma_{u,s}\sigma_{y,s'+1}\rangle\!\rangle\langle\!\langle\sigma_{v,s}\sigma_{y,s'+1}\rangle\!\rangle}_{\leq 2dB_{\Lambda,l}} \tag{7}$$

と評価する．(5) の第 2 項と，(6) と (7) の残りの因子は補題 5 によって，例えば

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{u,x\in\Lambda\\ s,t\in[l]}}\frac{1}{l}\frac{\partial K_l}{\partial\beta}\langle\!\langle\sigma_{o,0}\sigma_{x,t};\sigma_{u,s}\sigma_{u,s+1}\rangle\!\rangle=-\sum_{\substack{u,x\in\Lambda\\ s,t\in[l]}}\frac{\delta}{l^2\sinh(2\beta\delta/l)}\langle\!\langle\sigma_{o,0}\sigma_{x,t};\sigma_{u,s}\sigma_{u,s+1}\rangle\!\rangle\\ &\geq -\frac{4\beta\delta^2}{l^3\sinh(2\beta\delta/l)}\sum_{\substack{u,x\in\Lambda\\ s,t\in[l]}}\Big(\langle\!\langle\sigma_{o,0}\sigma_{u,s}\rangle\!\rangle\langle\!\langle\sigma_{x,t}\sigma_{u,s+1}\rangle\!\rangle+\langle\!\langle\sigma_{o,0}\sigma_{u,s+1}\rangle\!\rangle\langle\!\langle\sigma_{u,s}\sigma_{x,t}\rangle\!\rangle\Big)\\ &=-\frac{8\beta\delta^2}{l\sinh(2\beta\delta/l)}\left(\frac{\chi_{\Lambda,l}(\beta,\delta)}{\beta}\right)^2\geq -4\delta\left(\frac{\chi_{\Lambda,l}(\beta,\delta)}{\beta}\right)^2\end{aligned}$$

となる．以上の評価を整理すれば，

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{\chi_{\Lambda,l}(\beta,\delta)}{\beta}\geq\frac{4\big(d-(5d\beta B_{\Lambda,l}+1)\delta\big)\left(\frac{\chi_{\Lambda,l}(\beta,\delta)}{\beta}\right)^2-4dB_{\Lambda,l}\frac{\chi_{\Lambda,l}(\beta,\delta)}{\beta}}{1+2d\beta B_{\Lambda,l}}$$

となって，(4) の下界を得る． □

4 まとめと今後の課題

主結果によると，$B_{\Lambda,l}\ll 1$ かつ $\delta\ll 1$ という条件下では量子 Ising 模型が平均場臨界現象を示すことがわかる．しかしながら，バブルが小さくなること自体は鏡映正値性やレース展開を使う必要がある．鏡映正値性による証明は古典系での計算を参考に現在進行中である．レース展開は未だ作られていないので，最終的にはその導出も目指している．

また，量子 Ising 模型を古典 Ising 模型とみなし，そこでの確率幾何的表現から相関不等式を導くことは既に [4] や [5] で行われている．しかし，それらの表現は先に時間軸を連続化している．本研究の手法は離散化したまま古典系の表現を適用する点で異なる．この点は量子 Ising 模型におけるレース展開を導出する上でも役に立つと講演者は予想している．

参考文献

[1] M. Aizenman. Geometric analysis of ϕ^4 fields and Ising models. *Commun. Math. Phys.* **86** (1982): 1–48.

[2] M. Aizenman and R. Graham. On the renormalized coupling constant and the susceptibility in ϕ_4^4 field theory and the Ising model in four dimensions. *Nucl. Phys.* **B225** [FS7] (1983): 261–288.

[3] J.E. Björnberg. Infrared bound and mean-field behaviour in the quantum Ising model. *Commun. Math. Phys.* **323** (2013): 329–366.

[4] J.E. Björnberg and G.R. Grimmett. The phase transition of the quantum Ising model is sharp. *J. Stat. Phys.* **136** (2009): 231–273.

[5] N. Crawford and D. Ioffe. Random current representation for transverse field Ising model. *Commun. Math. Phys.* **296** (2010): 447–474.

[6] J. Frölich, B. Simon and T. Spencer. Infrared bounds, phase transitions and continuous symmetry breaking. *Commun. Math. Phys.* **50** (1976): 79–85.

[7] C. Goldschmidt, D. Ueltschi, P. Windridge, Quantum Heisenberg models and their probabilistic representations. *Commun. Contemp. Math.* **552** (2011): 177–224.

[8] R.B. Griffiths. Correlations in Ising ferromagnets I. *J. Math. Phys.* **8** (1967): 478–483.

[9] R.B. Griffiths. Correlations in Ising ferromagnets II. *J. Math. Phys.* **8** (1967): 484–489.

[10] R.B. Griffiths. Correlations in Ising ferromagnets III. *Commun. Math. Phys.* **6** (1967): 121–127.

[11] S. Handa, Y. Kamijima and A. Sakai. Quantum effect on the divergence around the critical temperature of the Ising susceptibility. In preparation.

[12] 原隆，田崎晴明『相転移と臨界現象の数理』（共立出版株式会社，2015 年）

[13] J.L. Lebowitz. GHS and other inequalities. *Commun. Math. Phys.* **35** (1974): 87–92.

[14] A. Sakai. Lace expansion for the Ising model. *Comm. Math. Phys.* **272** (2007): 283–344.

[15] M. Suzuki. Relationship between d-Dimensional Quantal Spin Systems and $(d+1)$-Dimensional Ising Systems: Equivalence, Critical Exponents and Systematic Approximants of the Partition Function and Spin Correlations. *PTP.* **56** (1976): 1454–1469.