数理解析研究所講究録 第2118巻 2019年 17-25

ある Banach 環上の Hermite 作用素と Lumer's method

新潟大学大学院自然科学研究科数理物質科学専攻　木伏 智則
Tomonori Kibushi
Graduate School of Science and Technology, Niigata University

1　はじめに

Lipschitz 関数や連続的微分可能関数からなる Banach 環、さらにはそのベクトル値版を対象とし、そのような Banach 環上の単位的全射等距離写像がどのような形をしているかを Lumer's method による記述をすることをめざした。Lumer's method とは等距離写像を決定する次のような方法のことである。対象とする Banach 環上の等距離写像の形を決定するためにまず、その Banach 環上の Hermite 作用素を決定する。多くの場合 Hermite 作用素は Banach 環の要素のパラメータにより表現できる。決定しようとする全射線形等距離写像による共役変換はまた Hermite 作用素であるため、Banach 環の要素によりパラメータ表示される。最初の Hermite 作用素のパラメータと共役変換後の Hermite 作用素のパラメータの関係を記述することにより該当の等距離写像を記述するのが Lumer's method である。

2　対象とする空間と定義

対象とする空間は以下の二つである。

- $\mathrm{lip}_\alpha(X, C(Y))$

- $\bar{C}^1([0,2\pi], C(Y))$

定義 1. (X,d) をコンパクト距離空間とし、$0<\alpha\leq 1$ とする。Y をコンパクト Hausdorff 空間とする。ここで、$F\in C(X,C(Y))$ に対して

$$L_\alpha(F)=\sup\left\{\frac{\|F(x_1)-F(x_2)\|_{\infty(Y)}}{d(x_1,x_2)^\alpha} : x_1,x_2\in X \quad (x_1\neq x_2)\right\}$$

を定義する。
$\mathrm{Lip}_\alpha(X,C(Y))$ は次のように定義される。

$$\mathrm{Lip}_\alpha(X,C(Y))=\left\{\ F\in C(X,C(Y))\ : L_\alpha(F)<\infty\right\}$$

ここで、$\|F\|_{L_\alpha}=\|F\|_\infty+L_\alpha(F)$ をノルムとすると、$(\mathrm{Lip}_\alpha(X,C(Y)),\|\cdot\|_{L_\alpha})$ は Banach 環となる。

定義 2 (little Lipschitz 環)**.** (X,d) をコンパクト距離空間とし、$0<\alpha<1$ とする。Y をコンパクト Hausdorff 空間とする。ここで、$\mathrm{lip}_\alpha(X,C(Y))$ は次のように定義される。

$$\mathrm{lip}_\alpha(X,C(Y))=\left\{\ F\in \mathrm{Lip}_\alpha(X,C(Y))\ :\ \lim_{x\to x_0}\frac{\|F(x)-\ F(x_0)\|_{\infty(Y)}}{d(x,x_0)^\alpha}=0\ (\forall x_0\in X)\right\}$$

ここで、$\|F\|_{l_\alpha}=\|F\|_\infty+L_\alpha(F)$ をノルムとすると、$(\mathrm{lip}_\alpha(X,C(Y)),\|\cdot\|_{l_\alpha})$ は Banach 環である。これを little Lipschitz 環という。

$\mathrm{lip}_\alpha(X,\mathbb{C})$ を単に $\mathrm{lip}_\alpha(X)$ と表記する。$F \in \mathrm{lip}_\alpha(X, C(Y))$ とする。また、$F(x,y) = (F(x))(y)$ とすることで、F は $X \times Y$ 上の複素数値連続関数と考える。これにより、$\mathrm{lip}_\alpha(X, C(Y)) \subset C(X \times Y)$ とする。

定義 3. Y をコンパクト Hausdorff 空間とする。ここで $\bar{C}^1([0,2\pi], C(Y))$ を以下のように定義する。

$$\bar{C}^1([0,2\pi], C(Y)) = \Big\{ F \in C([0,2\pi], C(Y)) : \ F|_{[0,\pi]} \in C^1([0,\pi], C(Y)) \Big\}$$

ここで、$\|F\|_{\bar{C}^1} = \|F\|_\infty + \|(F|_{[0,\pi]})'\|_\infty$ をノルムとすると、$(\bar{C}^1([0,2\pi], C(Y)), \|\cdot\|_{\bar{C}^1})$ は Banach 環となる。

$\bar{C}^1([0,2\pi],\mathbb{C})$ を単に $\bar{C}^1([0,2\pi])$ と表記する。また、$F \in \bar{C}^1([0,2\pi], C(Y))$ とする。$F(x,y) = (F(x))(y)$ とすることで、F は $[0,2\pi] \times Y$ 上の複素数値連続関数と考える。これにより、$\bar{C}^1([0,2\pi], C(Y)) \subset C([0,2\pi] \times Y)$ とする。

定義 4 (テンソル積 tensor product)**.** X をコンパクト距離空間、Y をコンパクト Hausdorff 空間とする。$f \in \mathrm{lip}_\alpha(X)$, $g \in C(Y)$ に対して、f と g のテンソル積 $f \otimes g \in \mathrm{lip}_\alpha(X, C(Y))$ を以下のように定義する。

$$(f \otimes g)(x,y) = f(x)g(y), \qquad (x,y) \in X \times Y \tag{1}$$

$f \in \bar{C}^1([0,2\pi])$, $g \in C(Y)$ に対して、f と g のテンソル積 $f \otimes g \in \bar{C}^1([0,2\pi], C(Y))$ を以下のように定義する。

$$(f \otimes g)(x,y) = f(x)g(y), \qquad (x,y) \in [0,2\pi] \times Y \tag{2}$$

定義 5 (semi-inner product)**.** E を Banach 空間とする。写像 $[\cdot,\cdot] : E \times E \to \mathbb{C}$ が次の条件をすべて満たすとき、 写像 $[\cdot,\cdot]$ を E 上の semi-inner product という。任意の $x, y, z \in E, \alpha \in \mathbb{C}$ に対して、

(1) $[x+y, z] = [x,z] + [y,z]$
(2) $[\alpha x, y] = \alpha[x,y]$
(3) $[x,x] > 0$ また、$[x,x] = 0 \Leftrightarrow x = 0$
(4) $|[x,y]|^2 \leq [x,x][y,y]$

また、semi-inner product $[\cdot,\cdot]$ が任意の $x \in E$ に対して、$[x,x] = \|x\|^2$ となるとき、semi-inner product $[\cdot,\cdot]$ はノルムと互換性があるという。
注. 一般に Banach 空間 E のノルムに対して互換性がある semi-inner product は一つとは限らない。

定義 6 (Hermite 作用素)**.** E を Banach 空間とし、T を E 上の有界線形作用素とする。E のノルムに対して互換性のある semi-inner product で、任意の $x \in E$ に対して $[T(x), x] \in \mathbb{R}$ となるものが存在するとき、T を E 上の Hermite 作用素という。

定義 7 (Hermite element)**.** B を Banach 環、B^* を B の Banach 空間としての双対空間とする。Banach 環 B の単位元を $\mathbf{1}$ とする。$x \in B$ に対する algebraic numerical range は

$$V(x) = \Big\{ \phi(x) \ : \ \phi \in B^* \ , \ \|\phi\| = \phi(\mathbf{1}) = 1 \Big\}$$

であり、$V(x) \subset \mathbb{R}$ となるとき、$x \in B$ は Hermite element であるという。B の Hermite element 全体を $H(B)$ とする。

Banach 環 $(B, \|\cdot\|_B)$ において $x \in H(B)$ であることと任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $\|\exp(itx)\|_B = 1$ となることが同値であることが知られている [1, 8]。また、$T \in H(\mathbf{B}(B))$ であることと、$T \in \mathbf{B}(B)$ が B 上の Hermite 作用素であることが同値であることが知られている [8, Theorems 5.2.6 and 6.2.1]。

定義 8 (corresponding multiplication operator)**.** B を単位的 Banach 環とし、$a \in B$ をとる。ここで corresponding multiplication operator $M_a : B \to B$ は以下のように定義される：

$$M_a(x) = ax, \qquad x \in B.$$

3 Hermite 作用素の決定

以下の命題 1、命題 2、補題 1、定理 1 は Hatori and Oi [12] により得られた。

命題 1. B を単位的 Banach 環とし、$a \in B$ とする。以下は同値である。

(1) a は B 内の Herimite element である。
(2) corresponding multiplication operator M_a が B 上の Hermite 作用素である。

Hatori and Oi [12, Lemma 2] より以下の補題 1 を得る。

補題 1. B を単位的 Banach 環とし、T を B 上の Hermite 作用素とする。このとき、$T\mathbf{1}$ は B 内の Hermite element である。

Hatori and Oi [12, Proposition 3] より以下の命題 2 を得る。

命題 2. B を単位的 semi-simple 可換 Banach 環とし、T を B 上の有界線形作用素とする。このとき、以下は同値である。

(1) $T = M_{T(\mathbf{1})}$ である。
(2) 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して、$\exp(it(T - M_{T(\mathbf{1})}))$ が multiplicative である。

Hatori and Oi [12, Theorem 4] より以下の定理 1 を得る。

定理 1. B を単位的 semi-simple 可換 Banach 環とし、T を B 上の有界線形作用素とする。すべての単位的全射等距離写像は multiplicative であると仮定すると、以下は同値である。

(1) T は B 上の Hermite 作用素である。
(2) $T(\mathbf{1})$ は B 内の Hermite element であり、$T = M_{T(\mathbf{1})}$ である。

定理 2 ($\mathrm{lip}_\alpha(X, C(Y))$ 内の Hermite element)**.**
以下は同値である。

(1) $F \in H(\mathrm{lip}_\alpha(X, C(Y)))$ である。
(2) ある $f \in C_{\mathbb{R}}(Y)$ に対して $F = 1 \otimes f$ である。

証明. ((1) $\Rightarrow$ (2))
仮定より、任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $\|\exp(itF)\|_{l_\alpha} = 1$ であるので、任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $\|\exp(itF)\|_\infty \leq 1$

である。ここで、任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $\|\exp(itF)\|_\infty = 1$ である。それを示すために F が $X \times Y$ 上の実数値関数であることを示す。 $\mathrm{Im}\, F(x,y) \neq 0$ となる $(x,y) \in X \times Y$ が存在すると仮定する。$\mathrm{Im}\, F(x,y) > 0$ のとき、$|\exp(-iF(x,y))| > 1$ となるので、任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $\|\exp(itF)\|_\infty = 1$ であることに矛盾する。逆に、$\mathrm{Im}\, F(x,y) < 0$ のとき、$|\exp(iF(x,y))| > 1$ となり、矛盾する。よって、$\mathrm{Im}\, F(x,y) = 0$ となり、F は $X \times Y$ 上の実数値関数である。ここで、任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $L_\alpha(\exp(itF)) = 0$ であるので、ある $f \in C(Y)$ に対して $F = 1 \otimes f$ となる。また、F は実数値関数であるので、$f \in C_{\mathbb{R}}(Y)$ よって、ある $f \in C_{\mathbb{R}}(Y)$ に対して $F = 1 \otimes f$ である。
$((1) \Leftarrow (2))$
仮定より、任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $\|\exp(itF)\|_\infty = 1$ であり、$L_\alpha(\exp(itF)) = 0$ であるので、任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $\|\exp(itF)\|_{l_\alpha} = \|\exp(itF)\|_\infty + L_\alpha(\exp(itF)) = 1$ である。よって、F は $\mathrm{lip}_\alpha(X, C(Y))$ 内の Hermite element である。 □

定理 3 ($\bar{C}^1([0,2\pi], C(Y))$ 内の Hermite element)**.**
以下は同値である。

(1) $\mathcal{H} \in H(\bar{C}^1([0,2\pi], C(Y)))$ である。
(2) $\mathcal{H} \in C_{\mathbb{R}}([0,2\pi] \times Y)$ であり、ある $f \in C_{\mathbb{R}}(Y)$ に対して $\mathcal{H}|_{[0,\pi]} = 1 \otimes f$ である。

証明. $((1) \Rightarrow (2))$
仮定より、任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $\|\exp(itF)\|_{\bar{C}^1} = 1$ であるので、$\|\exp(itF)\|_\infty \leq 1$ である。しかし、実際に定理 2 と同様の議論より、$\|\exp(itF)\|_\infty = 1$ がわかる。ここで、任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $\|\big(\exp(itF)|_{[0,\pi]}\big)'\|_\infty = 0$ であるので、ある $f \in C(Y)$ に対して $F|_{[0,\pi]} = 1 \otimes f$ となる。また、任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $\|\exp(itF)\|_\infty = 1$ より、F は実数値関数であるので、$f \in C_{\mathbb{R}}(Y)$ である。よって、$F \in C_{\mathbb{R}}([0,2\pi] \times Y)$ であり、ある $f \in C_{\mathbb{R}}(Y)$ に対して $F|_{[0,\pi]} = 1 \otimes f$ である。
$((1) \Leftarrow (2))$
仮定より、任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $\|\exp(itF)\|_\infty = 1$ であり、$\|\big(\exp(itF)|_{[0,\pi]}\big)'\|_\infty = 0$ であるので、任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $\|\exp(itF)\|_{\bar{C}^1} = \|\exp(itF)\|_\infty + \|\big(\exp(itF)|_{[0,\pi]}\big)'\|_\infty = 1$ である。よって、F は $\bar{C}^1([0,2\pi], C(Y))$ 内の Hermite element である。 □

Jarosz の定理 [13, Theorem] を以下のように適用することで次の系 1 と系 2 を得る。
X_1, X_2 をコンパクト距離空間とし、Y_1, Y_2 をコンパクト Hausdorff 空間とする。

$$U:\ \mathrm{lip}_\alpha(X_1, C(Y_1)) \to \mathrm{lip}_\alpha(X_2, C(Y_2))$$

を単位的全射等距離写像とする。$\mathrm{lip}_\alpha(X_1, C(Y_1))$, $\mathrm{lip}_\alpha(X_2, C(Y_2))$ は単位的 semi-simple 可換 Banach 環であるので Jarosz の命題 [13, Proposition 2] より、それぞれ $C(X_1 \times Y_1)$, $C(X_2 \times Y_2)$ の regular subspace [13, p.67] である。$\|\cdot\|_{l^\alpha} = \|\cdot\|_\infty + L_\alpha(\cdot)$ が p-norm [13, p.67] であり、U は単位的であるので Jarosz の定理 [13, Theorem] より、T は $(\mathrm{lip}_\alpha(X_1, C(Y_1)), \|\cdot\|_\infty)$ から $(\mathrm{lip}_\alpha(X_2, C(Y_2)), \|\cdot\|_\infty)$ への等距離写像でもある。よって次の系を得る。

系 1. X_1, X_2 をコンパクト距離空間とし、Y_1, Y_2 をコンパクト Hausdorff とする。U が $\mathrm{lip}_\alpha(X_1, C(Y_1))$ から $\mathrm{lip}_\alpha(X_2, C(Y_2))$ への単位的全射等距離写像であるとき、U は sup ノルムに関しても等距離写像である。

Y_1, Y_2 をコンパクト Hausdorff 空間とする。

$$U:\ \bar{C}^1([0,2\pi], C(Y_1)) \to \bar{C}^1([0,2\pi], C(Y_2))$$

を単位的全射等距離写像とする。$\bar{C}^1([0,2\pi], C(Y_1))$, $\bar{C}^1([0,2\pi], C(Y_2))$ は単位的 semi-simple 可換 Banach 環であるので Jarosz の命題 [13, Proposition 2] より、それぞれ $C([0,2\pi]\times Y_1)$, $C([0,2\pi]\times Y_2)$ の regular subspace である。$\|F\|_{\bar{C}^1} = \|F\|_\infty + \|F|_{[0,\pi]}{}'\|_\infty$ $(F \in \bar{C}^1([0,2\pi], C(Y_j))(j=1,2))$ が p-norm であり、U は単位的であるので Jarosz の定理 [13, Theorem] より、T は $\bar{C}^1([0,2\pi], C(Y_1)), \|\cdot\|_\infty)$ から $(\bar{C}^1([0,2\pi], C(Y_2)), \|\cdot\|_\infty)$ への等距離写像でもある。よって次の系を得る。

系 2. Y_1, Y_2 をコンパクト Hausdorff 空間とする。U が $\bar{C}^1([0,2\pi], C(Y_1))$ から $\bar{C}^1([0,2\pi], C(Y_2))$ への単位的全射等距離写像であるとき、U は sup ノルムに関しても等距離写像である。

定理 4 ($\mathrm{lip}_\alpha(X, C(Y))$ 上の Hermite 作用素)**.**
以下は同値である。

(1) T は $\mathrm{lip}_\alpha(X, C(Y))$ 上の Hermite 作用素である。
(2) $T = M_{\mathbf{1}\otimes f}$ となる $f \in C_{\mathbb{R}}(Y)$ が存在する。

証明. ((1) $\Leftarrow$ (2))
$f \in C_{\mathbb{R}}(Y)$ とする。定理 2 より、$\mathbf{1}\otimes f$ は $\mathrm{lip}_\alpha(X, C(Y))$ 内の Hermite element である。ここで命題 1 より、$M_{\mathbf{1}\otimes f}$ は $\mathrm{lip}_\alpha(X, C(Y))$ 上の Hermite 作用素である。
((1) $\Rightarrow$ (2))
T は $\mathrm{lip}_\alpha(X, C(Y))$ 上の Hermite 作用素であると仮定すると補題 1 より $T(\mathbf{1})$ は $\mathrm{lip}_\alpha(X, C(Y))$ 内の Hermite element である。また、ここで命題 2 より $T(\mathbf{1}) = \mathbf{1}\otimes f$ となる $f \in C_{\mathbb{R}}(Y)$ が存在する。すべての $\mathrm{lip}_\alpha(X, C(Y))$ 上の単位的全射等距離写像が multiplicative であることを示す。それが示せれば定理 1 より $T = M_{T(\mathbf{1})}$ となる。まず、U :$\mathrm{lip}_\alpha(X, C(Y)) \to \mathrm{lip}_\alpha(X, C(Y))$ を単位的全射等距離写像とする。このとき系 1 より U は $C(X\times Y)$ 内の $\mathrm{lip}_\alpha(X, C(Y))$ の uniform closure $\overline{\mathrm{lip}_\alpha(X, C(Y))}$ 上のある単位的全射等距離写像 U^∞ へ一意に拡張できる。ここで $\overline{\mathrm{lip}_\alpha(X, C(Y))}$ は $X\times Y$ 上の関数環であることと、Nagasawa [16] の定理から U^∞ は $\overline{\mathrm{lip}_\alpha(X, C(Y))}$ の極大イデアル空間上の自己同相写像によって定義される合成作用素である。よって U^∞ は multiplicative であるので U も multiplicative である。 □

定理 5 ($\bar{C}^1([0,2\pi], C(Y))$ 上の Hermite 作用素)**.**
以下は同値である。

(1) T は $\bar{C}^1([0,2\pi], C(Y))$ 上の Hermite 作用素である。
(2) $T = M_{\mathcal{H}}$ となる $\mathcal{H} \in H(\bar{C}^1([0,2\pi], C(Y)))$ が存在する。

証明. ((1) $\Leftarrow$ (2))
命題 1 より $M_{\mathcal{H}}$ は $\bar{C}^1([0,2\pi], C(Y))$ 上の Hermite 作用素である。
((1) $\Rightarrow$ (2))
T を $\bar{C}^1([0,2\pi], C(Y))$ 上の Hermite 作用素と仮定する。補題 1 より $T(\mathbf{1})$ は $\bar{C}^1([0,2\pi], C(Y))$ 内の Hermite element であるので $T(\mathbf{1}) = \mathcal{H}$ ($\mathcal{H} \in H(\bar{C}^1([0,2\pi], C(Y)))$) となる。すべての $\bar{C}^1([0,2\pi], C(Y))$ 上の単位的全射等距離写像が multiplicative であることを示す。それが示せれば定理 1 より $T = M_{T(\mathbf{1})}$ となる。まず、U :$\bar{C}^1([0,2\pi], C(Y)) \to \bar{C}^1([0,2\pi], C(Y))$ を単位的全射等距離写像とする。このとき系 2 より U は

$C([0,2\pi]\times Y)$ 内の $\bar{C}^1([0,2\pi],C(Y))$ の uniform closure $\overline{\bar{C}^1([0,2\pi],C(Y))}$ 上のある単位的全射等距離写像 U^∞ へ一意に拡張できる。ここで $\overline{\bar{C}^1([0,2\pi],C(Y))}$ は $[0,2\pi]\times Y$ 上の関数環であることと、Nagasawa [16] の定理から U^∞ は $\overline{\bar{C}^1([0,2\pi],C(Y))}$ の極大イデアル空間上の自己同相写像によって定義される合成作用素である。よって U^∞ は multiplicative であるので U も multiplicative である。 □

4 主定理

定理 6 ($\mathrm{lip}_\alpha(X,C(Y))$ 上の単位的全射等距離写像)**.**
以下は同値である。

(1) U が $\mathrm{lip}_\alpha(X,C(Y))$ 上の単位的全射等距離写像である。

(2) $UF(x,y)=F(\phi(x,y),\tau(y))$ $(x\in X\ ,\ y\in Y)$, $\quad F\in\mathrm{lip}_\alpha(X,C(Y))$ となる連続写像 $\phi: X\times Y\to X$ で、任意の $y\in Y$ に対して $\phi(\cdot,y):X\to X$ が全射等距離写像であるもの、同相写像 $\tau:Y\to Y$ が存在する。

証明. (1)⇒ (2) の証明の中で $(U(F))(x,y)=F(\phi(x,y),\tau(y))$ となることを示した後、任意の $y\in Y$ に対して $\phi(\cdot,y)$ は X 上の等距離写像であることを示す。今回はその部分の一方の不等式の証明を与える。逆側の不等式については容易に示せるので省略する。

まず、$x_1,x_2\in X$, $y\in Y$ をとる。$\alpha<\beta<1$ とし、$f^\beta:X\to\mathbb{C}$ を $f^\beta(x)=d(x,\phi(x_2,y))^\beta$ と定義する。さらにここで、$s,t\in X$ とすると、

$$\begin{aligned}\frac{|f^\beta(s)-f^\beta(t)|}{d(s,t)^\alpha}&=\frac{|d(s,\phi(x_2,y))^\beta-d(t,\phi(x_2,y))^\beta|}{d(s,t)^\alpha}\\&\leq\frac{d(s,t)^\beta}{d(s,t)^\alpha}\\&=d(s,t)^{\beta-\alpha}\end{aligned}\tag{3}$$

となる。 X はコンパクトなので $\sup_{s,t\in X}d(s,t)<\infty$ である。$M=\sup_{s,t\in X}d(s,t)$ とおく。(3) より、$L_\alpha(f^\beta\otimes 1)\leq M^{\beta-\alpha}$ なので、$\lim_{s\to t}\frac{|f^\beta(s)-f^\beta(t)|}{d(s,t)^\alpha}=0$ である。よって、$f^\beta\otimes 1\in\mathrm{lip}_\alpha(X,C(Y))$ である。また、U は $\|\cdot\|_{l_\alpha}$ に関して、等距離写像であり、$\|\cdot\|_{\infty(X\times Y)}$ でも等距離写像であることから、任意の $F\in\mathrm{lip}_\alpha(X,C(Y))$ に対して $L_\alpha(U(F))=L_\alpha(F)$ である。

次に、

$$\begin{aligned}d(\phi(x_1,y),\phi(x_2,y))^\beta&=|(f^\beta\otimes 1)(\phi(x_1,y),\tau(y))\ -\ (f^\beta\otimes 1)(\phi(x_2,y),\tau(y))|\\&=|(U(f^\beta\otimes 1))(x_1,y)\ -\ (U(f^\beta\otimes 1))(x_2,y)|\\&\leq L_\alpha(U(f^\beta\otimes 1))d(x_1,x_2)^\alpha\\&=L_\alpha(f^\beta\otimes 1)d(x_1,x_2)^\alpha\\&\leq M^{\beta-\alpha}d(x_1,x_2)^\alpha\end{aligned}\tag{4}$$

となる。ここで、(4) で $\beta\to\alpha$ とすると、$d(\phi(x_1,y),\phi(x_2,y))^\alpha\leq d(x_1,x_2)^\alpha$ を得る。よって、

$$d(\phi(x_1,y),\phi(x_2,y))\leq d(x_1,x_2)\ (\ \forall x_1,x_2\in X,y\in Y\ )$$

となる。 □

定理 7. Y をコンパクト Hausdorff 空間とする。以下は同値である。

(1) U が $C^1([0,\pi],C(Y))$ 上の単位的全射等距離写像である。

(2) $UF(x,y) = F(\phi(x,y),\tau(y))$ $(x \in [0,\pi]$, $y \in Y)$, $F \in C^1([0,\pi],C(Y))$ となる連続写像 ϕ : $[0,\pi] \times Y \to [0,\pi]$ で、任意の $y \in Y$ に対して $\phi(\cdot,y) : [0,\pi] \to [0,\pi]$ が全射等距離写像であるもの、同相写像 $\tau : Y \to Y$ が存在する。

定理 8 ($\bar{C}^1([0,2\pi],C(Y))$ 上の単位的全射等距離写像)**.**
U が $\bar{C}^1([0,2\pi],C(Y))$ 上の単位的全射等距離写像となるとき、ある連続写像 $\phi_1 : [0,2\pi] \times Y \to [0,2\pi]$, $\phi_2 : [0,2\pi] \times Y \to Y$ と、連続写像 $\phi : [0,\pi] \times Y \to [0,\pi]$ で任意の $y \in Y$ に対して $\phi(\cdot,y) : [0,\pi] \to [0,\pi]$ が全射等距離写像であるもの、同相写像 $\tau : Y \to Y$ が存在して、$(x,y) \in [0,2\pi] \times Y$, $F \in \bar{C}^1([0,2\pi],C(Y))$ に対して

$$UF(x,y) = \begin{cases} F(\phi(x,y),\tau(y)) & (0 \le x \le \pi) \\ F(\phi_1(x,y),\phi_2(x,y)) & (\pi \le x \le 2\pi) \end{cases} \tag{5}$$

となる。また $0 \le x \le \pi$ のとき $0 \le \phi_1(x,y) = \phi(x,y) \le \pi$ であり、$\pi \le x \le 2\pi$ のとき $\pi \le \phi_1(x,y) \le 2\pi$ である。

証明. 仮定より U は $\bar{C}^1([0,2\pi],C(Y))$ 上の単位的全射等距離写像であるので、系 2 より U は sup ノルムに関しても等距離写像である。ここで Stone-Wierstrass の定理より $\bar{C}^1([0,2\pi],C(Y))$ は $C([0,2\pi] \times Y)$ 内で uniformly dense であるので sup ノルムに関して単位的全射等距離写像となる U の一意な拡張 U^∞ : $C([0,2\pi] \times Y) \to C([0,2\pi] \times Y)$ を得る。ここで、Banach-Stone の定理より、自己同相写像 $\Phi : [0,2\pi] \times Y \to [0,2\pi] \times Y$ で任意の $F \in C([0,2\pi] \times Y)$ に対して $U^\infty(F) = F \circ \Phi$ となるものが存在する。また任意の $(x,y) \in [0,2\pi] \times Y$ に対して Φ は $\Phi(x,y) = (\phi_1(x,y),\phi_2(x,y))$ となる連続写像 $\phi_1 : [0,2\pi] \times Y \to [0,2\pi]$, $\phi_2 : [0,2\pi] \times Y \to Y$ で表される。これにより任意の $(x,y) \in [0,2\pi] \times Y$, $F \in \bar{C}^1([0,2\pi],C(Y))$ に対して $UF(x,y) = F(\phi_1(x,y),\phi_2(x,y))$ となる。次に $0 \le x \le \pi$ のとき任意の $y \in Y$ に対して $0 \le \phi_1(x,y) \le \pi$ であることを示す。任意の $x \in [0,\pi]$, $y \in Y$ をとると $UF(x,y) = F(\phi_1(x,y),\phi_2(x,y))$ であることと、$UF \in \bar{C}^1([0,2\pi],C(Y))$ から UF は $[0,\pi]$ で微分可能であることより、$0 \le \phi_1(x,y) \le \pi$ である。さらに $U^{-1}F = F \circ \Phi^{-1}$ であり、同様に $[0,\pi]$ で微分可能なことから $UF|_{[0,\pi]\times Y} : [0,\pi] \times Y \to [0,\pi] \times Y$ が全射であり、もう一方で $UF|_{[\pi,2\pi]\times Y} : [\pi,2\pi] \times Y \to [\pi,2\pi] \times Y$ も全射である。次に $\dot{}: C^1([0,\pi],C(Y)) \to \bar{C}^1([0,2\pi],C(Y))$ を任意の $(x,y) \in [0,2\pi] \times Y$, $G \in C^1([0,\pi],C(Y))$ に対して

$$\dot{G}(x,y) = \begin{cases} G(x,y) & (0 \le x < \pi のとき) \\ G(\pi,y) & (\pi \le x \le 2\pi のとき) \end{cases}$$

と定義する。ここで $\widetilde{U} : C^1([0,\pi],C(Y)) \to C^1([0,\pi],C(Y))$ を任意の $G \in C^1([0,\pi],C(Y))$ に対して

$$\widetilde{U}(G) = U(\dot{G})|_{[0,\pi]}$$

と定義する。ここで $\widetilde{U}$ は $C^1([0,\pi],C(Y))$ 上の単位的全射等距離写像である。定理 7 から $(\widetilde{U}(F|_{[0,\pi]}))(x,y) = F(\phi(x,y),\tau(y))$ $(x \in [0,\pi]$, $y \in Y)$, となる連続写像 $\phi : [0,\pi] \times Y \to [0,\pi]$ で、任意の $y \in Y$ に対して $\phi(\cdot,y) : [0,\pi] \to [0,\pi]$ が全射等距離写像であるもの、同相写像 $\tau : Y \to Y$ が存在する。$UF|_{[0,\pi]\times Y} : [0,\pi] \times Y \to [0,\pi] \times Y$ であることから、任意の $x \in [0,\pi]$, $y \in Y$ に対して

$$UF|_{[0,\pi]\times Y}(x,y) = (\widetilde{U}(F|_{[0,\pi]}))(x,y) = F(\phi(x,y),\tau(y))$$

である。$x \in [\pi, 2\pi]$, $y \in Y$ に対しては自由に値をとり、

$$UF|_{[\pi,2\pi]\times Y}(x,y) = F(\phi_1(x,y), \phi_2(x,y))$$

となる。 □

参考文献

[1] **F. F. Bonsall, J. Duncan**, Complete Normed Algebras, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 80, Springer-Verlag, NewYork, 1973.

[2] **F. Botelho, R. Fleming, J. Jamison**, Extreme points and isometries on vector-valued Lipschitz spaces, J. Math. Anal. Appl. 381 (2011) 821-832.

[3] **F. Botelho, J. Jamison**, Homomorphisms on a class of commutative Banach algebras, Rocky Mountain J. Math. 43 (2013) 395-416.

[4] **F. Botelho, J. Jamison, A. Jiménez-Vargas, M. Villegas-Vallecillos**, Hermitian Operators on Lipschitz function spaces, Studia Math. 215 (2013) 127-137.

[5] **F. Botelho, J. Jamison, A. Jiménez-Vargas, M. Villegas-Vallecillos**, Hermitian operators on Banach algebras of Lipschitz functions, Proc. Amer. Math. Soc. 142 (2014) 3469-3481

[6] **A. Browder**, Introduction to Fuction Algebras, W. A. Benjamin, INc., New York-Amsterdam 1969

[7] **R. J. Fleming, J. E. Jamison** , Hermitian operators on C(X,E) and the Banach-Stone theorem, Math. Z. 170 (1980) 77-84.

[8] **R. J. Fleming, J. E. Jamison**, Isometries on Banach Spaces, Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, vol. 129, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2003, x+197 pp.

[9] **T. W. Gamelin**, Uniform algebras, Prentice-Hall, INc., Englewood Cliffs, N.J., 1969

[10] **O. Hatori, A. Jiménez-Vargas, M. Villegas-Vallecillos**, Maps which preserve norms of non-symmetrical quotients between groups of exponentials of Lipschitz functions, J. Math. Anal. Appl. 415 (2014) 825-845.

[11] **O. Hatori, S. Oi, H. Takagi**, Peculiar homomorphisms on algebras of vector-valued functions, 2016, submitted for publication.

[12] **O. Hatori, S. Oi**, Hermitian operators on Banach algebras of vector-valued Lipschitz maps, J. Math. Anal. appl. 452 (2017) 378-387.

[13] **K. Jarosz**, Isometries in semisimple, commutative Banach algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 94 (1985) 65-71.

[14] **D. Koehler, P. Rosenthal**, On isometries of normed linear spaces, Studia Math. 34 (1970) 213-216.

[15] **G. Lumer**, Semi-inner product of bounded maps into Banach space, Trans. Amer. Math. Soc. 100 (1961) 26-43.

[16] **M. Nagasawa**, Isomorphisms between commutative Banach algebras with an application to rings of analytic functons, Kōdai Math. Sem. Rep. 11 (1959) 182-188.

[17] **S. Oi**, Homomorphisms between algebras of Lipschitz functions with the values in function algebras, J. Math. Anal. Appl. 444 (2016) 210-229.

[18] **L. Ranjbar-Motlagh**, A note on isometries of Lipschitz spaces, J. Math. Anal. Appl. 411 (2014) 555-558.

[19] **D. Sherbert**, Banach algebras of Lipschitz functions, Pacific J. Math. 13 (1963) 1387-1399.

[20] **G. F. Simmons**, Introduction to topology and modern analysis, Krieger Publishing Company (1963)

[21] **I. M. Singer, J. Wermer**, Derivations on commutative normed algebras, Math. Ann. 129 (1955) 260-264.

[22] **I. Vidav**, Eine metrische Kennzeichnung der selbstadjungierten Operatoren, Math. Z. 66 (1956) 121-128.