数理解析研究所講究録 第2118巻 2019年 26-32

Isometries of the Zygmund F-algebra

東海大学・理学部　植木 誠一郎*
Sei-ichiro Ueki
Faculty of Science,
Tokai University

Abstract

N 次元複素ユークリッド空間内の単位球上の正則関数からなる Zygmund F-algebra の線形な等距離作用素および乗法的な等距離作用素の特徴付けについての結果を紹介する.

1 Zygmund F-algebra

N 次元複素ユークリッド空間 $\mathbb{C}^N$ 内の単位球を $\mathbb{B}$, その境界を $\mathbb{S}$ で表す. $\alpha > 0$ に対して定数 γ_α を $\gamma_\alpha = e^\alpha$ $(\alpha > 1)$, $\gamma_\alpha = e$ $(\alpha \leq 1)$ と定める. 区間 $[0, \infty)$ 上の非負凸関数 $\varphi_\alpha(t) := t\{\log(\gamma_\alpha + t)\}^\alpha$ に対して, 次のような $\mathbb{B}$ 上の正則関数の関数空間 $N\log^\alpha N$ を考える：

$$N\log^\alpha N := \left\{ f \in H(\mathbb{B}) : \sup_{0\leq r<1} \int_{\mathbb{S}} \varphi_\alpha(\log^+|f(r\zeta)|)d\sigma(\zeta) < \infty \right\}.$$

ここで, $H(\mathbb{B})$ は $\mathbb{B}$ 上の正則関数全体, $d\sigma$ は $\mathbb{S}$ 上の正規化された（$\sigma(\mathbb{S}) = 1$）回転不変な正値 Borel 測度を表し, $\log^+ x = \max\{0, \log x\}$ である. $x \geq 0$ に対して, 不等式：

$$\log^+ x \leq \log(1+x) \leq \log^+ x + \log 2$$

より, $f \in N\log^\alpha N$ であるための条件は,

$$\sup_{0\leq r<1} \int_{\mathbb{S}} \varphi_\alpha(\log(1+|f(r\zeta)|))d\sigma(\zeta) < \infty$$

と置き換えられることに注意しておく.

関数 $\varphi_\alpha(\log(1+x))$ は,

$$\varphi_\alpha(\log(1+x)) \leq (\log\gamma_\alpha)^\alpha x \qquad (x \geq 0) \tag{1}$$

を満たすので, Hardy 空間 H^1 に関して包含関係：$H^1 \subset N\log^\alpha N$ が成立する. より詳細には,

$$\bigcup_{p>0} H^p \subsetneq N\log^\alpha N \subsetneq N^* \subsetneq N$$

*本研究は科研費（課題番号：23740100, 17K05282）の助成を受けている.

が成立する．ここで, N は Nevanlinna クラス, N^* は Smirnov クラスである．すなわち,

$$N = \left\{ f \in H(\mathbb{B}) \, : \, \sup_{0 \le r < 1} \int_{\mathbb{S}} \log^+ |f(r\zeta)| d\sigma(\zeta) < \infty \right\},$$
$$N^* = \left\{ f \in N \, : \, \lim_{r \to 1^-} \int_{\mathbb{S}} \log^+ |f(r\zeta)| d\sigma(\zeta) = \sup_{0 \le r < 1} \int_{\mathbb{S}} \log^+ |f(r\zeta)| d\sigma(\zeta) \right\}.$$

したがって, 各 $f \in N \log^\alpha N$ は $\mathbb{S}$ の殆どすべての点 ζ で非接極限：$f^*(\zeta) = \lim_{r \to 1} f(r\zeta)$ を持つ．この非接極限 f^* を利用して, $N \log^\alpha N$ には距離関数が定義される：

$$|||f||| := \int_{\mathbb{S}} \varphi_\alpha(\log(1 + |f^*(\zeta)|)) \, d\sigma(\zeta),$$
$$d(f,g) := |||f - g|||.$$

O.M. Eminyan [2] は, この関数空間 $N \log^\alpha N$ が最初に扱われているのは A. Zygmund の本 [13] であると指摘している．また, Eminyan 自身が $N \log^\alpha N$ の位相線形空間としての性質を研究する中で, $N \log^\alpha N$ は上記の距離に関して完備距離空間となるだけでなく, スカラー倍と積に関しても閉じており, かつそれらの演算が連続になっている, すなわち, $N \log^\alpha N$ は F-algebra になっていることを明らかにした．このような背景のもと, $N \log^\alpha N$ を Zygmund F-algebra と呼んでいる．

2　等距離作用素

関数空間にまつわる問題として, その等距離作用素の構造決定の問題が古くからある．例えば, H. Royden [8] によれば, $[0,1]$ 上の Lebesgue 空間 $L^p[0,1]$ $(1 \le p < \infty, p \ne 2)$ の等距離作用素は荷重合成作用素の形で表現されるとある（Lamperti の定理）．解析関数空間の場合には, W. Rudin [9] もしくは F. Forelli [3] による Hardy 空間の等距離作用素, C. Kolaski [5, 6, 7] による Bergman 空間の等距離作用素, K. Stephenson [11] による Nevanlinna 空間の等距離作用素, J. Cima と W.R. Wogen [1] の Bloch 空間の等距離作用素についての研究が知られている．例えば, Hardy 空間 H^p $(0 < p < \infty,\ p \ne 2)$ の場合, H^p の線形な等距離作用素 T は, $\mathbb{S}$ 上の有界な Borel 関数 h に対して,

$$\int_{\mathbb{S}} h \, d\sigma = \int_{\mathbb{S}} (h \circ \Phi^*) \, |\Psi^*| \, d\sigma$$

を満たす $\mathbb{B}$ の内部写像（inner map）Φ と定数関数 1 の T による像 $\Psi = T(1)$ を使って, 必ず $T(f) = \Psi \cdot (f \circ \Phi)$ の形で表現される．さらに, 全射な線形等距離作用素は, $\mathbb{B}$ の双正則な自己準同形写像 Φ, $a := \Phi^{-1}(0)$, $c \in \mathbb{C}$ $(|c| = 1)$ により,

$$T(f)(z) = c \frac{(1 - |a|^2)^{N/p}}{(1 - \langle z, a \rangle)^{2N/p}} \cdot (f \circ \Phi)(z) \qquad (z \in \mathbb{B}) \tag{2}$$

と表される．また,

$$\varphi_a(z) := \frac{a - P_a(z)}{1 - \langle z, a \rangle} + \sqrt{1 - |a|^2} \frac{P_a(z) - z}{1 - \langle z, a \rangle}, \quad P_a(z) := \frac{\langle z, a \rangle}{|a|^2} a$$

とするとき, カルタンの定理により $\mathbb{B}$ の双正則な自己準同形写像 Φ は $\mathbb{C}^N$ のユニタリー変換 $\mathcal{U}$ を使って $\Phi = \mathcal{U}\varphi_a$ と一意的に表現されるので, 全射な線形等距離作用素の表現 (2) は,

$$T(f)(z) = c\,\frac{(1-|a|^2)^{N/p}}{(1-\langle z,a\rangle)^{2N/p}} \cdot (f \circ \mathcal{U} \circ \varphi_a)(z) \tag{3}$$

とより詳細な形で表現される.

Hardy 空間 H^p と Zygmund F-algebra $N\log^\alpha N$ との関連は, 先に述べた包含関係のみならず, それぞれがより一般的な Hardy-Orlicz 空間の特別な場合であるという共通の性質を持っていることから, $N\log^\alpha N$ の等距離作用素の構造はどうなっているのだろうかという素朴な疑問がこの研究の動機付けである. 他方, $N\log^\alpha N$ が H^p と大きく異なるのは, $N\log^\alpha N$ は積に関して閉じていることである. このことは乗法的汎関数や環準同形の決定問題と関係するが, 線形性を仮定しない乗法的等距離作用素の構造決定問題を自然に提起する.

以下では, $N\log^\alpha N$ の線形な等距離作用素と乗法的な等距離作用素と場合に分けて, 得られた結果について紹介していく.

3 Main result : Linear case

$N\log^\alpha N$ の等距離作用素 T に線形性, すなわち,

$$T(f+g) = T(f) + T(g), \qquad T(cf) = cT(f)$$

を仮定する.

定理 1 (Ueki [12]). T が $N\log^\alpha N$ の線形な等距離作用素であれば, $\mathbb{B}$ 上の内部関数 (inner function) Ψ と $\mathbb{B}$ の内部写像で, その非接極限写像 Φ^* が $\mathbb{S}$ 上で測度保存性の性質を持つものが存在し, $T(f) = \Psi \cdot (f \circ \Phi)$ の形で必ず表現される.

ここで, Φ^* が $\mathbb{S}$ 上で測度保存性を持つとは $\mathbb{S}$ の任意の Borel 集合 E に対して,

$$\sigma((\Phi^*)^{-1}(E)) = \sigma(E)$$

が成立することである.

この定理 1 を前述の Hardy 空間の場合と比べると, 重み関数 Ψ についての情報が $\Psi = T(1)$ だけしか得られていなかったのが, 定理 1 では Ψ は $\mathbb{B}$ 上の内部関数であるとより詳しい性質を持っていることがわかった. このことから内部写像 Φ の備える性質が測度保存性という, より幾何学的な性質となる. 測度保存性を持つ $\mathbb{B}$ の内部写像の例として φ_a がある.

定理 1 の証明には以下の 2 つの補題が効果的に使われる.

補題 1. $N\log^\alpha N$ の線形な等距離作用素 T の H^1 への制限 $T\big|_{H^1}$ は H^1 の距離に関して H^1 の線形な等距離作用素である.

補題 2. 区間 $[0,\infty)$ 上の有界な連続関数 θ_α と正定数 K_α が存在して,

$$\varphi_\alpha(\log(1+x)) = (\log\gamma_\alpha)^\alpha x - K_\alpha x^2 + x^3\,\theta_\alpha(x)$$

が成立する.

定理 1 の証明の概略： T の線形性と Lebesgue 収束定理などの基本定理により補題 1 は証明される. 補題 2 は $\varphi_\alpha(\log(1+x))$ に Taylor の定理を適用すればよい.

補題 1 により T を H^1 へ制限すれば T が H^1-等距離作用素になることがわかるので Rudin の結果より T が H^1 上で $T = \Psi C_\Phi$ の形で書ける. H^1 空間は $N\log^\alpha N$ の稠密な部分空間でもあるので, H^1 上での T の表現が $N\log^\alpha N$ へ自然に拡張される. 補題 2 を利用すると, Ψ について $\|\Psi\|_{H^1} = \|\Psi\|_{H^2} = 1$ が得られる. これは Hölder の不等式で等号成立を意味するので, 殆ど全ての点 $\zeta \in \mathbb{S}$ で $|\Psi^*(\zeta)| = 1$ が従う. つまり, $\Psi \in H^1$ と合わせて Ψ が内部関数であると証明され, 同時に Φ^* の測度保存性が示される.

T が全射である場合には, 定理 1 より次の結果が得られる.

系 1. T が $N\log^\alpha N$ の全射な線形等距離作用素であれば, $c \in \mathbb{C}$ $(|c| = 1)$, $\mathbb{C}^N$ のユニタリー変換 $\mathcal{U}$ を使って, $T(f) = c \cdot (f \circ \mathcal{U})$ の形で表現される.

T に全射性が仮定されれば, 定理 1 における内部写像 Φ が B の双正則な自己準同形写像であることが従う. Φ の各成分に平均値の定理を適用すると $\Phi(0) = 0$ が示されるので, これらのことから Φ はユニタリー変換となることがわかる. 他方, 重み関数 Ψ が絶対値が 1 である複素定数であることを示すのに, 次の $N\log^\alpha N$ に対する特徴付けを利用する.

補題 3. $f \in N$ に対して, 次の 2 条件は同値である：

(a) $f \in N\log^\alpha N$,

(b) $\varphi_\alpha(\log^+|f^*|) \in L^1(d\sigma)$ かつ

$$\varphi_\alpha(\log^+|f(z)|) \leq \int_{\mathbb{S}} P(z,\zeta)\, \varphi_\alpha(\log^+|f(\zeta)|)\, d\sigma(\zeta).$$

ここで, $P(z,\zeta)$ は $\mathbb{B}$ の Poisson 核を表す.

T が全射であるので, 定数関数 1 の原像 $f \in N\log^* N$ を使えば, $1/\Psi \in N\log^* N$ である. $1/\Psi$ に補題 3 (b) の不等式を使えば, $\mathbb{B}$ 上で $1/|\Psi| \leq 1$ となる. Ψ 自身, $\mathbb{B}$ 上の内部関数であったから Ψ は定数関数となる.

Hardy 空間 H^p の全射な等距離作用素 (2) または (3) の形を想起すれば, $N\log^\alpha N$ の場合は随分と単純な形になっていることがわかる.

4 Main result : Multiplicative case

この節で乗法的な等距離作用素というときには, 等距離作用素 T は

$$T(f\,g) = T(f)\,T(g)$$

のみを満たすこととし, 複素線形性はもちろん実線形性をも仮定しない.

定理2 (Hatori, Iida, Stević, Ueki [4]). T を $N\log^\alpha N$ の乗法的な等距離作用素とするとき, 非接極限写像 Φ^* が $\mathbb{S}$ 上で測度保存性をもつような $\mathbb{B}$ の内部写像 Φ が存在し,

$$T(f) = f \circ \Phi \qquad \text{もしくは} \qquad T(f) = \overline{f \circ \overline{\Phi}}$$

の何れかの形で表される.

ここで, Φ の各成分を Φ_j $(1 \leq j \leq N)$ とするとき, $\overline{\Phi} = (\overline{\Phi_1}, \cdots, \overline{\Phi_N})$ である.

定理2も, やはり H^1 への制限をすることで H^1-等距離作用素と, H^1 の $N\log^\alpha N$ における稠密性を利用して証明される. 定理1と異なり, T には線形性が仮定されていないので補題1を適用することはできない. 何か別の方法を使って T の H^1 への制限が H^1-等距離作用素になることを示さなければならない. さらに, 定理1で得られた等距離作用素の表現を利用するためには, T の線形性を保証しなければならない. 関数解析の一般論では, Mazur-Ulam の定理が知られている. それは, X, Y をノルム空間とし, $U : X \to Y$ が全射な等距離作用素で, $U(0) = 0$ ならば U は実線形作用素であることを保証する定理である. しかしながら, T に全射性を仮定していないことと, 考察の対象としている $(N\log^\alpha N, |||\cdot|||)$ がノルム空間ではないことにより, Mazur-Ulam の定理をここで適用することはできない. Mazur-Ulam の定理の代替となる別のアプローチとして, ノルム空間の uniformly convex 性を利用する.

$(L, \|\cdot\|)$ を実線形なノルム空間とする. 任意の $\epsilon > 0$ に対して,

$$\|a\| \leq 1,\ \|b\| \leq 1 \text{ である } a,\ b \in L \text{ が } \|a-b\| \geq \epsilon \text{ を満たすとき, } \|a+b\| \leq 2-\delta$$

が成り立つような $\delta > 0$ が存在するとき, L は uniformly convex であるという. Hilbert 空間はもちろん, L^p 空間 $(1 < p < \infty)$ などは何れも uniformly convex である.

補題4. L_1, L_2 を共に実線形なノルム空間とする. かつ L_2 は uniformly convex とする. $S : L_1 \to L_2$ が等距離作用素で $S(0) = 0$ であるならば, S は実線形作用素である.

定理2の証明の概略: T が乗法的等距離作用素であることから, $T(1) = 1$ が最初に示され, 順番に $T(0) = 0$, $T(-1) = -1$, $T(i)^2 = -1$ まで示される. したがって, $T(i) = i$ または $T(i) = -i$ となる.

一方で, T についての仮定と $\varphi_\alpha(\log(1+x))$ の増大度を考慮すると $T(1/2) = 1/2$ が示される. このことは T が 1/2-homogeneour (i.e. $T(f/2) = f/2$) を示し, 結果として, 任意の自然数 m, $f \in N\log^\alpha N$ に対して, $T(f/2^m) = T(f)/2^m$ が従う. これにより補題1の適用が可能となり, $T\big|_{H^1} : H^1 \to H^1$ であり, かつ $T\big|_{H^1}$ は H^1-等距離作用素であることが示される. この時点では T の線形性が導かれていないことに注意する.

次に, 補題2と同様にして, $\widetilde{\theta_\alpha}(0) \neq 0$,

$$x^2\, \widetilde{\theta_\alpha}(x) = (\log \gamma_\alpha)^\alpha\, x - \varphi_\alpha(\log(1+x))$$

を満たす $[0, \infty)$ 上の正値有界連続関数 $\widetilde{\theta_\alpha}$ を構成することで, T の H^2 への制限, $T\big|_{H^2}$ が H^2-等距離作用素であることがわかる. 最初に見たように $T(0) = 0$ であり, H^2 は uniformly convex であるので, 補題4により, T は H^2 上で実線形作用素であることが従う. H^2 は $N\log^\alpha N$ の稠密な部分空間なので, この実線形性は $N\log^\alpha N$ まで拡張される.

$T(i)=i$ の場合, T の実線形性と乗法的であることは T の複素線形を示す. すなわち, T は $N\log^\alpha N$ の線形等距離作用素となる. $T(1)=1$ と合わせて, 定理 1 により, Φ^* が $\mathbb{S}$ 上で測度保存性をもつような $\mathbb{B}$ の内部写像 Φ を使って, $T(f)=f\circ\Phi$ と表現される.

$T(i)=-i$ の場合, T は複素共役な線形性を持つ等距離作用素となる. そこで, $f\in N\log^\alpha N$ に対して,

$$\widetilde{f}(z_1,\cdots,z_N):=\overline{f(\overline{z_1},\cdots,\overline{z_N})}$$

と定め, $\widetilde{T}(f)=T(\widetilde{f})$ とすれば, $\widetilde{T}$ は $N\log^\alpha N$ の複素線形な等距離作用素となる. 再び定理 1 により, $\widetilde{T}(f)=f\circ\Phi$ となるから, $T(i)=-i$ の場合には, $T(f)=\overline{f\circ\overline{\Phi}}$ となる.

定理 2 の証明の後半部分において, 定理 1 の代わりに系 1 を適用することで次の結果が得られる.

系 2. T が $N\log^\alpha N$ の全射な乗法的等距離作用素である場合, 定理 2 における T の表現の内部写像 Φ は $\mathbb{C}^N$ のユニタリー変換となる.

References

[1] J. Cima and W.R. Wogen, On isometries of the Bloch spaces, Illinois J. Math., **24** (1980), 313–316.

[2] O.M. Eminyan, Zygmund F-algebras of holomorphic functions in the ball and in the polydisk, Doklady Math., **65** (2002), 353–355.

[3] F. Forelli, A theorem on isometries and the application of it to the isometries of $H^p(S)$ for $2<p<\infty$, Canad. J. Math., **25** (1973), 284–289.

[4] O. Hatori, Y. Iida, S. Stević and S. Ueki, Multiplicative isometries on F-algebras of holomorphic functions, Abstract and Applied Analysis, Vol.2012, Article ID 125987.

[5] C.J. Kolaski, Isometries of Bergman spaces over bounded Runge domains, Canad. J. Math., **33** (1981), 1157–1164.

[6] C.J. Kolaski, Isometries of weighted Bergman spaces, Canad. J. Math., **34** (1982), 910–915.

[7] C.J. Kolaski, Surjective isometries of weighted Bergman spaces, Proc. Amer. Math. Soc., **105** (1989), 652–657.

[8] H. Royden, Real Analysis, Second Edition, Collier Macmillan, 1968.

[9] W. Rudin, L^p-isometries and equimeasurability, Indiana Univ. Math. J., **25** (1976), 215–228.

[10] W. Rudin, Function Theory on the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$, Springer-Verlag, 1980.

[11] K. Stephenson, Isometries of the Nevanlinna class, Indiana Univ. Math. J., **26** (1977), 307–324.

[12] S. Ueki, Isometries of the Zygmund F-algebra, Proc. Amer. Math. Soc., **140** (2012), 2817–2824.

[13] A. Zygmund, Trigonometric series, vol.2, Cambridge University Press, 1959.

Sei-ichiro Ueki
Department of Mathematics,
Faculty of Science,
Tokai University,
4-1-1, Kitakaname, Hiratsuka, 259-1292 JAPAN
E-mail : sei-ueki@tokai.ac.jp