数理解析研究所講究録 第2118巻 2019年 58-62

半単純可換 BANACH 環の可換拡大について (COMMUTATIVE EXTENSIONS OF SEMISIMPLE COMMUTATIVE BANACH ALGEBRAS)

高橋眞映 (SIN-EI TAKAHASI)

(山形大学、数学・ゲーム工房)
(YAMAGATA UNIV., LAB. MATH. GAMES)

ABSTRACT. We introduce a concept of commutative extension for semisimple commutative Banach algebras and consider four concrete commutative extensions: multilpleir extension, Sherbert extension, BSE-extension and Birtel extension. Finally we propose some associated problems.

1. INTRODUCTION

半単純可換 Banach 環 A が与えられたとき、A を連続的に埋め込ませる可換 Bnach 環 B を A の可換拡大と呼ぶことにします：

$\exists\rho : A \to B\, which\, is\, continuously\, isomorphic\, into.$

つまり親を見て子供を知ろうと言う考え方であります。勿論これは昔からある考え方で、また数学に限らず日常生活に密着しています。ここでは A に関する 4 つの具体的な可換拡大を取り上げ、小考してみたい。

2. 4 つの可換拡大

1. Multilplier 拡大。

A からそれ自身への写像 T で $x(Ty) = (Tx)y$ $(\forall x, y \in A)$ を満たすものを A の multiplier (乗作用素) と呼びます。Multiplier は自動的に有界線形作用素となり、各分野で活躍する重要な概念です。関数解析的にみますと、A の multiliers 全体の集合 $M(A)$ は半単純可換 Banach 環をつくります。これは A の multiplier 環と呼ばれています。

各 $a \in A$ に対して、$L_a(x) = ax$ $(\forall x \in A)$ で定義される作用素 L_a は A の積作用素と呼ばれ、これは A の multiplier となっています。このとき $\rho(a) = L_a$ $(\forall a \in A)$ と置きますと、ρ は A から $M(A)$ への連続的同型写像を与えますので、 multiplier 環 $M(A)$ は A の一つの可換拡大となっています。

Date: May 31, 2018.

ここでは各 $T \in M(A)$ を次に述べます A の Gelfand 空間 Φ_A 上の関数 $\widehat{T}$ と同一視して、そのような関数の全体 $\widehat{M}(A)$ を A の一つの可換拡大と考えます。

2. BSE-拡大。

A 上の非零複素数値準同型全体を Φ_A で表し、それに相対弱*-位相 (所謂 Gelfand topology) を入れた空間を Gelfand 空間と呼びます。これは A の Banach dual space A^* の部分集合ですが、その線形包を $\mathrm{span}(\Phi_A)$ で表しますと、この線形包に属する任意の元 p は

$$p = \sum_{\varphi \in \Phi_A} \widehat{p}(\varphi)\varphi$$

と一意的に表現されます。ここに $\widehat{p}$ は有限な台を持つ Φ_A 上の複素数値関数を表します。

さて Φ_A 上で定義された複素数値関数 σ が条件

$$\exists \beta > 0 : \left| \sum_{\varphi \in \Phi_A} \widehat{p}(\varphi)\sigma(\varphi) \right| \leq \beta \|p\|_{A^*} \ (\forall p \in \mathrm{span}(\Phi_A))$$

を満たすとき、σ は BSE-関数であると言います。BSE-関数は必然的に有界関数になっています。また上述の条件を満たす $\beta > 0$ の下限を $\|\sigma\|_{BSE(A)}$ で表しますと、BSE-関数の全体 $D_{BSE}(\Phi_A)$ は norm $\|\cdot\|_{BSE(A)}$ のもとで半単純可換 Banach 環を作ります。また連続な BSE-関数の全体を $C_{BSE}(\Phi_A)$ で表しますと、これは $D_{BSE}(\Phi_A)$ の閉部分環であり、半単純となっています。更に A の Gelfand 変換は A から $C_{BSE}(\Phi_A)$ への連続的埋め込みとなっていますので、$C_{BSE}(\Phi_A)$ は A の一つの可換拡大になります。我々はこれを A の BSE-拡大と呼んでいます。

3. Sherbert 拡大

Gelfand 空間 Φ_A に以下で定義された距離を入れます：

$$\|\varphi - \psi\|_{A^*} = \sup\{|\varphi(a) - \psi(a)| : a \in A, \|a\| \leq 1\}.$$

このとき距離空間 Φ_A 上で定義された複素数値関数 σ が条件

$$\exists \beta > 0 : |\sigma(\varphi) - \sigma(\psi)| \leq \beta \|\varphi - \psi\|_{A^*} \ (\forall \varphi, \psi \in \Phi_A)$$

を満たすとき、σ は Φ_A 上の Lipschitz 関数であると言い、そのような $\beta > 0$ の下限を $L(\sigma)$ で表し、σ の Lipschitz 数と言います。Φ_A 上の全ての Lipschitz 関数の全体 $Lip(\Phi_A)$ は norm

$$\|\sigma\|_{Lip(\Phi_A)} = \|\sigma\|_\infty + L(\sigma) \ (\sigma \in Lip(\Phi_A))$$

のもとで半単純可換 Banach 環を作ります。ここで $\|\sigma\|_\infty$ は σ の supremum norm を表します。このとき A の Gelfand 変換は A から $Lip(\Phi_A)$ への連続的埋め込みとなっていますので、$Lip(\Phi_A)$ は A の一つの可換拡大になります。我々はこれを Sherbert 拡大と呼びます。

4. Birtel 拡大。

Banach dual space A^* の部分空間 span(Φ_A) の norm 閉包を A' で表し、その Banach dual space を A'' とします：$A'' = (A')^*$. このとき次式で定義される Arens 型積を考えます：

$$\langle a, f\cdot x\rangle = f(ax),\ \langle x, F\cdot f\rangle = F(f\cdot x) \text{ and } \langle f, F\cdot G\rangle = F(G\cdot f)$$
$$(x \in A, f \in A', F, G \in A'').$$

このとき A'' は半単純可換 Banach 環になることが分かり、A から A'' への自然な埋め込みは連続的となります。従って A'' は A の一つの可換拡大になります。我々はこれを Birtel 拡大と呼びます。

3. 4つの可換拡大の間の関係と応用

調和解析では、局所 compact 可換群 G 上の測度環の Fourier-Stieltjes 変換像を G の双対群上の所謂 BSE-関数で特徴づけた Bochner-Schoenberg-Eberlein の定理があります。これを可換 Banach 環の世界に焼き直せば、群環 $L^1(G)$ の multiplier 拡大と BSE-拡大は等しいことを述べています。高橋-羽鳥 [7] はそのような環を BSE-環と名付けました。これは

「優れた定理はそれ自身定義と成り得る」

という原理に従ったものです。

ところで古来、異種の間にある関係を見いだす事は一つの美意識でしょう。源平合戦では源氏の武将那須与一と扇を携えた平家の女官は一本の矢で結ばれ、そこに美を感じます。与一は自害を覚悟したそうで、一層の美を感じます。また数学の世界では指数関数と三角関数を虚数単位で結びつけた Euler の公式に最高の美を感じる数学者は少なくないでしょう。Bochner-Schoenberg-Eberlein の定理はそのような仲間に入るのではないかと思います。

その後井上純治先生の協力を得て BSE-環の研究が進みました (see [2, 3])。しかしながら先駆者はいるもので、高橋-羽鳥よりも 28 年も早く Birtel は前節で述べた Birtel 拡大を導入して埋め込み問題を扱い、BSE-関数と言う言葉こそ使わなかったものの、所謂 BSE 条件が半単純可換 Banach 環でも意味があることを示す結果の論文を書います (see [1])。この事は僕が知る限り、 BSE が世に出てから今日まで誰も指摘しませんでした。そして最近初めて井上純治先生から Birtel の事を教えて頂きました。ところでこの Birtel 拡大 A'' とは何者かを明確にしたものが次の命題です。

Proposition 3.1. *Let A be a semisimple commutative Banach algebra with Gelfand space Φ_A. Then A'' is isometrically isomorphi to $D_{BSE}(\Phi_A)$.*

従って半単純可換 Banach 環 $D_{BSE}(\Phi_A)$ に同型な Banach 環は predual を持つことになり、その重要性が窺われます。直ぐ分かることは Φ_A が離散的ならば、A の BSE-拡大は常に predual を持つことになります。

またそれ以外では、次の場合が考えられます。

(1) d 次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^d$ 上の $n-1$ 回連続微分可能で、ある種の Lipschitz 条件を満たす有界な複素数値関数全体の作る半単純可換 Banach 環 $C_b^{n-1,1}(\mathbf{R}^d)$ は predual を持ちます。これは、$\mathbf{R}^d$ 上の n 回連続微分可能でそれらが無限遠点で消える関数の作る半単純可換 Banach 環 $C_0^n(\mathbf{R}^d)$ の BSE-拡大が $C_b^{n-1,1}(\mathbf{R}^d)$ 及び $D_{BSE}(\Phi_{C_0^n(\mathbf{R}^d)})$ 一致することから分かります (see [4])。

(2) X を compact 距離空間、B を単位的有限次元可換 C*-環とし、A を X と B で構成される Lipschitz 環 $Lip(X, B)$ とします。このとき、$C_{BSE}(\Phi_A) = D_{BSE}(\Phi_A)$ が示されるので、A の Birtel 拡大と BSE-拡大は等距離同型となり、それらは predual を持ちます。

(3) 上の (2) で B に有限次元性を外した場合どうなるかは分かりません。

(4) 次の命題は上の (3) で B を Lipschitz 環にした場合を考察しています。

Proposition 3.2. *Let (X, d_X) and (Y, d_Y) be two compact metric spaces, and put $A = Lip(X, Lip(Y))$. If the natural embedding from $X \times Y$ to Φ_A is surjective, then the Birtel and BSE extensions of A are isometrically isomorphic.*

しかしながら「the natural embedding from $X \times Y$ to Φ_A is surjective」が成り立つかどうか分かりません。これは [5] で観察される Oi's method を使って見たのですが、norm 計算のところでどうもうまく行きませんでした。

4. 問題

半単純可換 Banach 環 A が与えられたとき、

(i) A の Birtel extension A'' と BSE-extension $C_{BSE}(\Phi_A)$ が Banach 環として等距離同型となるような A を決定せよ。

(ii) A の Birtel extension A'' と BSE-extension $C_{BSE}(\Phi_A)$ が Banach 環として同型となるような A を決定せよ。

(iii) 前節の (3), (4) を解け。

(iv) 4 つの可換拡大の関係を明確にせよ。

謝辞。This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, a Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

最後に

デンちゃんの愛称で親しまれた信州大教授の高木啓行先生が、昨年 11 月急逝されました。本来ならば、今年 2 月に開催された RIMS Conference: Researches on theory of isometries and preserver problems from a various point of view (主催：Osamu Hatori) に参加され、仲間と一緒に議論されたり、美味しいお酒を飲んで大いに人生をエンジョイされた事でしょう。本当に残念でなりません。

ここに改めて、「デンちゃん」のご冥福をお祈りすることをお許し下さい。

References

[1] F. T. Birtel, On a commutative extension of a Banach algebra, Proc. Amer. Math. Soc., **13**(1962), 815-822.

[2] J. Inoue and S.-E. Takahasi, On characterizations of the image of the Gelfand transform of commutative Banach algebras, Math.Nachr. **280** (2007), no.1-2,105-126.

[3] J. Inoue and S.-E. Takahasi, Segal algebras in commutative Banach algebras, Rocky Mountain J. Math. **44-2**(2014), 539-589.

[4] J. Inoue and S.-E.Takahasi, Banach function algebras of n-times continuously differentiable functions on $\mathbf{R}^d$ vanishing at infinity and thier BSE-extension, submitted.

[5] S. Oi, Homomorphisms between algebras of Lipschitz functions with the values in function algebras, J. Math. Anal. Appl., **444**(2016), 210-229.

[6] D. Sherbert, Banach algebras of Lipschitz functions, Pacific J. Math., **13**(1963), 1387-1399.

[7] S.-E. Takahasi and O. Hatori, Commutative Banach algebras which satisfy a Bochner-Schoenberg-Eberlein type-theorem, Proc. Amer. Math. Soc., **110-1**(1990), 149-158.