数理解析研究所講究録 1357 巻 2004 年 130-134

Brauer 対応とブロックコホモロジー環について

崇城大学　河合浩明　(Hiroaki Kawai)
Sojo University

1. 序論

G を有限群. k を標数 $p>0$ の体, ブロックと関係する結果では 1 の $|G|$ 乗根を含むとする。A, B を symmetric k-algebra, $Z(A)$ を A の中心とする. X を $A-B$-両側加群からなる bounded complex で片側加群として $_AX$, X_B は射影的とする. X の k-dual を X^* で表す. Linckelmann は [3] において以下の 3 つの概念を導入した.

(1) Hochschild コホモロジー の間の *transfer associated with X* と呼ばれる graded な線形写像 $t_X: HH^*(B) \to HH^*(A)$ が定義される. 定義はここでは略すが, X として $(kG)_H$, $_H(kG)$, $_x(kH)$ と取ることにより次の可換図式が成り立っている (ここで H は G の部分群, $(kG)_H$ は $kG-kH$-両側加群, x は G の元).

$$\begin{array}{ccc} H^n(H,k) & \xrightarrow{\mathrm{tr}_{H,G}} & H^n(G,k) \\ {\scriptstyle\delta_H}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\delta_G} \\ HH^n(kH) & \xrightarrow[t_{(kG)_H}]{} & HH^n(kG) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} H^n(G,k) & \xrightarrow{\mathrm{res}_{G,H}} & H^n(H,k) \\ {\scriptstyle\delta_G}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\delta_H} \\ HH^n(kG) & \xrightarrow[t_{H(kG)}]{} & HH^n(kH) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} H^n(H,k) & \xrightarrow{c_x} & H^n({}^xH,k) \\ {\scriptstyle\delta_H}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\delta_{({}^xH)}} \\ HH^n(kH) & \xrightarrow[t_{x(kH)}]{} & HH^n(k({}^xH)) \end{array}$$

ここで, δ_G, δ_H は群のコホモロジーから Hochschild コホモロジー への diagonal embeding ([3] 参照) であり, $\mathrm{tr}_{H,G}$, $\mathrm{res}_{G,H}$, c_x は群のコホモロジーにおける transfer, restriction, conjugation である (inflation に対応する X は解らない).
(2) $HH^n(A)$ の元を同型 $HH^n(A) = \mathrm{Ext}^n_{A\otimes A^o}(A,A) \cong \mathrm{Hom}_{K(A\otimes A^o)}(\mathscr{P}_A, \mathscr{P}_A[n])$ のもとで対応する chain map のホモトピー類とみなす (ここで, $\mathscr{P}_A$ は $A\otimes A^o$-加群としての A の projective resolusion, $[n]$ は次数の shift). このとき, $[\zeta] \in HH^*(A)$, $[\tau] \in HH^*(B)$ に対して, 次の図式が任意の n においてホモトピー可換となるとき $[\zeta]$ を *X-stable* と呼ぶ ($[\tau]$ は X^*-stable). また, X-stable な元全体は $HH^*(A)$ の部分環となり, それを $HH^*_X(A)$ と記す.

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{P}_A \otimes_A X & \xrightarrow{\simeq} & X \otimes_B \mathscr{P}_B \\ {\scriptstyle\zeta_n\otimes \mathrm{Id}_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{Id}_X\otimes\tau_n} \\ \mathscr{P}_A[n] \otimes_A X & \xrightarrow[\simeq]{} & X \otimes_B \mathscr{P}_B[n], \end{array}$$

ここで，図式の上下のホモトピー同値は同型 $A \otimes_A X \cong X \otimes_B B$ の X の projective resolution $\mathscr{P}_A \otimes_A X, X \otimes_B \mathscr{P}_B$ への lift. ζ_n, τ_n は $[\zeta]$, $[\tau]$ の次数 n の成分を表す.
(3) S を G のシロー p-部分群とする．次のことはよく知られている.

$$H^*(G,k) \cong \{\ [\zeta] \in H^*(S,k) \mid c_x \circ \mathrm{res}_{S,Q}[\zeta] = \mathrm{res}_{S,{}^xQ}[\zeta] \ \text{ for } {}^\forall Q \leq S,\ {}^\forall x \in G : {}^xQ \leq S\ \}$$

S をブロック b の不足群 D に，包含関係を b-Brauer pairs の包含関係に置き換えて，b の <u>*block cohomology algebra*</u> は次のように定義される.

$$H^*(G,b) = \{\ [\zeta] \in H^*(D,k) \mid c_x \circ \mathrm{res}_{D,Q}[\zeta] = \mathrm{res}_{D,{}^xQ}[\zeta] \ \text{ for } {}^\forall Q \leq D,\ {}^\forall x \in G : {}^x(Q,e_Q) \leq (D,e_D)\ \}$$

次に，後の節に関係する Linckelmann による結果をまとめておく.

定理 1.1.([3], [4]) 上の notation のもとで次が成り立つ.

(i) $t_X(1_B)$ を π_X とおく（t_X は $Z(A) \cong HH^0(A)$, $Z(B) \cong HH^0(B)$ をとおして $Z(B)$ から $Z(A)$ への写像とみる）. $\pi_X \in Z(A)$, $\pi_{X^*} \in Z(B)$ がともに可逆のとき,

$$T_X = \pi_X^{-1} t_X : \ HH^*_{X^*}(B) \cong HH^*_X(A) \quad \text{as } k\text{-algebras}.$$

ここで，元の対応は X-stable によって定まる元の対応によって与えられる，すなわち，(2) の notation を用いると $T_X([\tau]) = [\zeta]$.

(ii) diagonal embeding $\delta_G : \ H^*(G,k) \to HH^*(kG)$ のブロック版として次が成り立つ. i を block b の source idempotent ([2] 参照) とする．このとき π_{kGi}, $\pi_{(kGi)^*}$ は可逆となり,

$$T_{kGi} \circ \delta_D : \ H^*(G,b) \subseteq H^*(D,k) \to HH^*_{(kGi)^*}(kD) \to HH^*_{kGi}(kGb)$$

は中への 1 対 1 の環準同型となる.

(iii) G, H を有限群. b, c を共通の不足群 D をもつ G, H のブロックで，D の任意の部分群 Q に対し $E_G((Q,e_Q),(D,e_D)) = E_H((Q,f_Q),(D,f_D))$ とする（ここで，$E_G((Q,e_Q),(D,e_D)) = \{\ \varphi_x : Q \to D \mid \varphi_x$ は x-共役写像 for $x \in G$ s.t. ${}^x(Q,e_Q) \leq (D,e_D)\ \}$，ゆえに b, c の Brauer 圏は同値). さらに，X が kGb, kHc の splendid 同値，または森田型の stable 同値を導くとする（ともに Linckelmann の意味 ; [2], [4]). このとき次の可換図式が得られる.

$$\begin{array}{ccc}
H^*(G,b) & \xrightarrow{T_{kGi} \circ \delta_D} & HH^*_{X^*}(kGb) \\
\| & & \cong \downarrow T_X \\
H^*(H,c) & \xrightarrow[T_{kHj} \circ \delta_D]{} & HH^*_X(kHc)
\end{array}$$

ここで，i, j は b, c の source idempotents.

2. Brauer 対応と ブロックコホモロジー

b を不足群 D をもつ G の ブロック, c を $N = N_G(D)$ における b の Brauer 対応子とする. 次の結果がこの報告における以後の考察の動機づけとなった.

定理 2.1.(佐々木) $\quad H^*(G,b) \subseteq H^*(N,c)$

そこで Brauer 対応において定理 1.1 (iii) に類似する結果が得られないかが問題になる.

問題 次の可換図式が得られるための X は何か, また条件は何か.

$$\begin{array}{ccc} H^*(G,b) & \xrightarrow{T_{kGi} \circ \delta_D} & HH^*_{X^*}(kGb) \\ \iota \downarrow & & \cong \downarrow T_X \\ H^*(N,c) & \xrightarrow[T_{kNj} \circ \delta_D]{} & HH^*_X(kNc) \end{array}$$

ここで, ι は包含写像, i, j は b, c の source idempotents.

X として $ckGb$ を取る. このとき, より一般的な Brauer 対応において次のことが成り立つ.

命題 2.2. b を不足群 D をもつ G のブロック. H を $DC_G(D) \leq H \leq N_G(D)$ となる部分群, c を $c^G = b$ となる H のブロックとする. このとき,

$$T_X: \ HH^*_{X^*}(kGb) \cong HH^*_X(kHc) \qquad \text{as } k\text{-algebras.}$$

定理 1.1 (i) より π_X と π_{X^*} が可逆となることを示せばよい. まず, transfer t_X の一般論を用意する.

補題 2.3. (i) e を symmetric k-algebra A の central idempotent とする. k-algebra としての自然な同型 $HH^*(A) \cong HH^*(Ae) \oplus HH^*(A(1-e))$ において, $t_{Ae}: \ HH^*(Ae) \to HH^*(A)$ と $t_{eA}: \ HH^*(A) \to HH^*(Ae)$ は, この同型のもとで, それぞれ embeding と projection を与える.

(ii) H を G の部分群とする. $Z(kG) \cong HH^0(kG)$, $Z(kH) \cong HH^0(kH)$ をとおして次数 0 における $t_{H(kG)}$, $t_{(kG)H}$ を $Z(kG)$ と $Z(kH)$ の間の写像とみなす. このとき,

$$t_{H(kG)}(\alpha) = \eta_H(\alpha) \qquad \text{for } \alpha \in Z(kG)$$

ここで $\eta_H: \ kG \to kH$ は $\eta_H(x) = x$ for $x \in H$, $\eta_H(x) = 0$ for $x \in G - H$. 特に, $H = C_G(Q)$, Q は p-部分群, のときは $t_{H(kG)}$ は Brauer 準同型のことである. 一方,

$$t_{(kG)_H}(\beta) = \sum_{x\in[G/H]} x\beta x^{-1} = \mathrm{Tr}_H^G(\beta) \qquad \text{for } \beta \in Z(kH).$$

となる.

補題 2.3 (ii) と同様な同一視のもと，補題 2.3 と [3, Proposition 2.11] より，

$$\begin{aligned}\pi_X = t_{ckGb}(b) &= t_{ckH \otimes_{kH} H(kG) \otimes_{kG} kGb}(b) \\ &= t_{ckH} \circ t_{H(kG)} \circ t_{kGb}(b) \\ &= c\eta_H(b)\end{aligned}$$

同様にして，$\pi_{X^*} = b\mathrm{Tr}_H^G(c)$ が得られる．ところで，

$$c^G = b \quad \Leftrightarrow \quad c\eta_H(b) \text{ が可逆} \qquad \text{(e.g. [5, V, 補題 3.9] 参照)}.$$

さらに，b と c の不足群が同じであるから [1, Corollary 2.2.3] より，$b\mathrm{Tr}_H^G(c)$ も可逆となる．よって，定理 1.1 (i) より命題 2.2 が証明される.

先の問題において $X = ckGb$ としたとき，問題に対する一つの結果として次のことが示される.

定理 2.4. $X = ckGb$ とする．次の (i), (ii) は同値.

(i) $\delta_D(H^*(G,b)) \subseteq HH^*_{jkGb}(kD) = HH^*_{jkGi}(kD)$.

($jkGb$-stable for $kD - kGb$-加群 $jkGb$ $\Leftrightarrow$ $jkGi$-stable for $kD - kD$-加群 $jkGi$)

(ii) 次の可換図式が得られる，すなわち，$T_{kGi} \circ \delta_D(H^*(G,b)) \subseteq HH^*_{X^*}(kGb)$ と $T_X \circ T_{kGi} \circ \delta_D = T_{kNj} \circ \delta_D \circ \iota$ が成り立つ.

$$\begin{array}{ccc} H^*(G,b) & \xrightarrow{T_{kGi}\,\circ\,\delta_D} & HH^*_{X^*}(kGb) \\ {\scriptstyle\iota}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \cong\ T_X} \\ H^*(N,c) & \xrightarrow[T_{kNj}\,\circ\,\delta_D]{} & HH^*_X(kNc) \end{array}$$

ここで，ι は包含写像，i, j は b, c の source idempotents.

証明は他所にゆずるが，(i) $\Rightarrow$ (ii) は次の可換図式が得られることによる.

$$\begin{array}{ccc} HH^*_{jkGb}(kD) & \xrightarrow{T_{kGi}} & HH^*_{X^*}(kGb) \\ {\scriptstyle\iota}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \cong\ T_X} \\ HH^*_{jkNc}(kD) & \xrightarrow[T_{kNj}]{} & HH^*_X(kNc) \end{array}$$

次の場合に定理 2.4 (ii) の可換図式が得られる，すなわち，$\delta_D(H^*(G,b)) \subseteq HH^*_{jkGi}(kD)$ が成り立つ.

例 2.5. (i) b が主ブロック.

(ii) $E_G((Q,e_Q),(D,e_D)) = E_H((Q,f_Q),(D,f_D))$ for any $Q \leq D$ (定理 1.1 (iii) 参照). さらに, $ckGb$ の任意の直既約因子が $KHj \otimes_{kQ} ikG$ for some $Q \leq D$ の直既約因子と同型となる場合 (この条件は splendid 同値, または森田型の stable 同値における, いわゆる, Linckelmann の条件, [2] 又は [4] 参照).

3. X-stable

最後に X-stable に関する結果で [3] に記されていないことで重要と思われることを記しておく.

補題 3.1. (i) $A-A$-両側加群としての A について, $HH^*_A(A) = HH^*(A)$.

(ii) X, Y を 1 節のような bounden complex とする. X と Y がホモトピー同値のとき, $HH^*_X(A) = HH^*_Y(A)$.

k-algebras A, B が derived 同値のとき, それらの Hochschild コホモロジー環が同型になることは Rickard によって示されているが, 同型における元の対応は知られていないと思う. block algebra の場合は以下のことが解る. A, B が indecomposable, non-simple な symmetric k-algebra とする. X が A と B の derived 同値を導くとき [4, Proposition 5.2] より π_X, π_{X^*} が可逆. そこで補題 3.1, [3, Corollary 3.8] と定理 1.1 (i) より次を得る.

系 3.2. $T_X: HH^*(B) = HH^*_{X^*}(B) \cong HH^*_X(A) = HH^*(A)$ as k-algebras, ここで元の対応は X-stable によって定まる元の対応によって与えられる.

参考文献

[1] M. Broué: *Remarks on blocks and subgroups*, J. Algebra **51**, No. 1 (1978), 228–232.

[2] 河合浩明: *Varieties for modules over a block of a finite group I,II*, 数理解析研究所講究録 **1251** (2002), 46–56.

[3] M. Linckelmann: *Transfer in Hochschild cohomology of blocks of finite groups,* Algebras and Representation Theory **2** (1999), 107–135.

[4] M. Linckelmann: *Varieties in block theory* , J. Algebra **215** (1999), 460–480.

[5] 永尾汎, 津島行男: 有限群の表現, 裳華房, 1987.