数理解析研究所講究録 第2120巻 2019年 228-237

ON STRONG SECOND MAIN THEOREM TYPE CONJECTURE IN HIGHER DIMENSIONAL NEVANLINNA THEORY

KATSUTOSHI YAMANOI

1. はじめに

RIMS 研究集会「副有限モノドロミー，ガロア表現，および複素関数」においては、主に次の結果についてお話ししました。

> A をアーベル多様体，$D \subset A$ を豊富因子とする．このとき，$A - D$ は小林双曲的である．

この結果は、$A - D$ は Brody 双曲的であること、すなわち正則写像 $f : \mathbb{C} \to A - D$ は常に定数であることを証明した、Siu と Yeung の結果 [6] を発展させたものになっています。上記の結果について、詳しくは論文 [13] を参照していただくとして、本稿では少し違うテーマについて話題にしたいと思います。Siu と Yeung の結果 [6] は、いい方をかえると、アーベル多様体 A への定数でない正則写像 $f : \mathbb{C} \to A$ の像は、A の豊富因子 D と必ず交わる、という主張になっています。これを定量的に、どのくらい交わるか、と問うことにします。もちろん一般的には、無限個の点で交わるかもしれません。そこで、複素平面上で原点を中心とする半径 $r > 0$ の円板 $\mathbb{C}(r)$ を考えて、その像 $f(\mathbb{C}(r))$ と D が何回交わるかを数えて、その数にちょっとした細工をしたうえで、$r \to \infty$ での漸近挙動を考えることにします。これをしかるべき量で下から評価することが、高次元ネヴァンリンナ理論の問題となります。この問題に関しては、1990 年代後半に進展がありました（[2],[3],[5],[7]）。得られた結果を一言でいうと、「アーベル多様体 A への正則写像 $f : \mathbb{C} \to A$ の像 $f(\mathbb{C})$ と豊富因子 D は、高次元ネヴァンリンナ理論によって測られる f の複雑さから期待されるだけの交点を実際に持つ」、というものでした。その後さらに、$f(\mathbb{C})$ と D の交点は、ほとんどが横断的であることが証明されました（[10]）。ここまでの結果を定理の形にすると次のようになります。

定理 1. A をアーベル多様体，$D \subset A$ を被約な有効因子，$[D]$ を D に付随する A の直線束，L を A の豊富な直線束とする．$f : \mathbb{C} \to A$ を正則写像で，$f(\mathbb{C}) \subset A$ がザリスキー位相に関して稠密なものとする．このとき

$$T(r, f, [D]) \leq N^{(1)}(r, f, D) + o(T(r, f, L))$$

が $r \to \infty$ において，r に関する長さ有限の除外集合の外で成立する．

この主張では、正則写像 $f : \mathbb{C} \to A$ の像 $f(\mathbb{C}) \subset A$ がザリスキー位相に関して稠密と仮定しています。一般に像 $f(\mathbb{C}) \subset A$ のザリスキー閉包 X は A の部分アーベル多様体の平行移動になることが知られています。従って、A を X で置き換えれば、$f(\mathbb{C}) \subset A$ がザリスキー位相に関して稠密な状況が基本的になるわけです。

次に、定理の主張に登場するネヴァンリンナ理論の記号について、大雑把に説明します。正確な定義は 2 章をご参照ください。まず、$T(r, f, [D])$ および $T(r, f, L)$ は、それぞれ直線束 $[D]$ および L に関する曲線 $f : \mathbb{C} \to A$ の “次数” を測っています。また、$N^{(1)}(r, f, D)$ は因子 D と曲線 $f : \mathbb{C} \to A$ の重複度を考慮しない交点数を測っています。通常の交差理論では、因子と曲線の交点数は重複度込みで数えますが、あえて重複度を無視した交点数

を下から評価することで、横断的でない交点の数を上から評価しようとしています。歴史的な経緯から、このような形の評価式をネヴァンリンナ理論では第二主要定理型の評価式（Second main theorem type estimate）と言います。

さて、ここまでは 15 年以上前にできた話ですが、今後どのような問題が考えられるでしょうか。まず、ターゲットとなる多様体をアーベル多様体からより一般の射影多様体にすることが考えられます。これは、ずっと以前からある問題ですが、解決されていません。期待されている評価は以下のようなものです。

第二主要予想. X を滑らかな射影多様体、$D \subset X$ を単純正規交差因子、K_X を X の標準束、L を X の豊富な直線束とする。このとき、正則写像 $f : \mathbb{C} \to X$ で、$f(\mathbb{C}) \subset X$ がザリスキー位相に関して稠密なものに対して、

$$T(r, f, K_X(D)) \leq N^{(1)}(r, f, D) + o(T(r, f, L))$$

が $r \to \infty$ において，r に関する長さ有限の除外集合の外で成立する。

定理 1 によって、この予想は X がアーベル多様体の場合には正しいことが分かります。実際には、定理 1 では D に特異点の条件が付いていないため、定理 1 は予想がアーベル多様体と双有理同値なすべての射影多様体 X に対して成り立つことと同値になります（[12, Cor. 3.24]）。

定理 1 の言い換え. アーベル多様体と双有理同値なすべての射影多様体 X に対して第二主要予想は正しい.

第二主要予想の意義について、簡単にみておきましょう。まずは、その帰結の面白さの一例として、射影多様体が小林双曲的になるための代数的な判定条件が挙げられます。すなわち、射影多様体 X の（自分自身を含む）すべての部分代数多様体が一般型ならば X は小林双曲的であることが、第二主要予想から従います。これは、射影多様体がいつ小林双曲的か、という問題に対する魅力的な解答の候補になっています。また、Vojta[8] によって提起された、ネヴァンリンナ理論とディオファントス幾何の間の辞書によると、ネヴァンリンナ理論の評価式はディオファントス幾何における評価式に翻訳することができます。この翻訳で、第二主要予想に対応するディオファントス幾何の評価式は Vojta 予想とよばれ、ディオファントス幾何の問題に強い帰結を導くことが知られています。そのため、第二主要予想の成否は数論側から見ても興味深いように思われます。

さて、第二主要予想では正則写像 $f : \mathbb{C} \to X$ が扱われています。これは、Vojta の辞書によると、$\mathbb{Q}$ 上で定義された射影多様体の $\mathbb{Q}$-有理点のみを扱っている状況に対応しています。一方で、ディオファントス幾何においては、多様体が $\mathbb{Q}$ 上で定義されていても、有理点は代数体上で考えることがよくあります。ネヴァンリンナ理論でこの状況に対応するのは、$\mathbb{C}$ の有限次分岐被覆空間 $\pi_Y : Y \to \mathbb{C}$ からの正則写像 $f : Y \to X$ を考察する、というものです。ネヴァンリンナ理論ではこのような状況は、以前から考察されていました。Vojta の予想にはいくつかの形がありますが、一番強いのは [9, Conj. 2.3] で扱われているものだと思われます。本稿の標題にある、「strong second main theorem type conjecture」というのは、これのネヴァンリンナ理論における類似です。より具体的には、3 章の Conjecture 1 がこれにあたります。

強い形の第二主要予想（=Conjecture 1）. 第二主要予想の設定を、有限次分岐被覆空間 $\pi_Y : Y \to \mathbb{C}$ からの正則写像 $f : Y \to X$ に一般化すると、評価式を

$$T(r, f, K_X(D)) \leq N^{(1)}(r, f, D) + N_{\mathrm{ram}\,\pi_Y}(r) + o(T(r, f, L))$$

と置き換えたものが成立する。

つまり、有限次分岐被覆空間 $\pi_Y : Y \to \mathbb{C}$ に一般化すると、第二主要予想の評価式は、そのままの形でなく、$\pi_Y : Y \to \mathbb{C}$ の分岐点の数を測る $N_{\mathrm{ram}\,\pi_Y}(r)$ だけゆるめた形で成立することを主張します。Conjecture 1 は、アーベル多様体に対しても未解決です。つまり、定理 1 は、$\mathbb{C}$ の有限次分岐被覆空間 Y からの正則写像 $f : Y \to A$ には、望ましい形では一般化できていません。定理 1 の証明手法を正則写像 $f : Y \to A$ に適用すると、ある程度の結果を得ることはできますが（cf. [11]）、残念ながら Conjecture 1 で求められる形には到達できていないのが現状です。ただ、この分野のこれまでの進展をみると、アーベル多様体に対して、まず考察してみるのが有力な研究の方向性ではないかと思えます。なぜなら、アーベル多様体の持つ、特殊ではありますが、豊かな性質が、問題の解明に向けた大きな助けになると思われるからです。そして、Conjecture 1 を研究する上では、実はアーベル多様体とその双有理同値の場合を調べるだけで十分だ、ということを次章で示します。

命題（=Proposition 1）． アーベル多様体と双有理同値なすべての射影多様体に対して Conjecture 1 が成立すれば、任意の射影多様体に対して Conjecture 1 が成立する．

この命題の証明のポイントは、Conjecture 1 の評価式が、分岐被覆をとる操作と相性がよい、ということにあります。実際、次の generically finite な全射による図式で、一般の射影多様体 X と、同次元のアーベル多様体 A の間に対応を付け、X に関する評価式を、まず V に関する評価式、そして A に関する評価式へと帰着していきます。

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & A \\ \big\downarrow & & \\ X & & \end{array}$$

あとは細部に気を付けて、計算が実行できることを確認します。おそらく、Vojta 予想に関しても同様のことが言えると思いますので、ディオファントス幾何の専門家の間では、知られたことかもしれません。ただ、少なくてもネヴァンリンナ理論の文脈で、この事実を注意した文献をみたことがないように思うので、本稿に含めてみようと思った次第です。そのため、多少変則的ではありますが、第 1 章は日本語で、次章以降は英語で書きたいと思います。次章以降だけを読んでも、数学的には完結しているように留意しました。

ここまで読まれた方は、そもそも Conjecture 1 を数学的に正しい、と考える根拠は何か、と問われるかもしれません。仮に、Conjecture 1 が成り立たないとすると、ある曲線 $f : Y \to X$ は、Conjecture 1 の評価式を満たしません。実は、この曲線は、評価式を成り立たせない、つまり X の因子 D と特殊な接触状況にある、という条件下では、変形を許しません。像 $f(Y)$ がザリスキー位相で稠密、という超越的な対象が、同時にまったく変形を許さない特殊な情勢で存在する、というのは起こりそうにないように、筆者には感じられます。しかし、これは万人を納得させられる根拠としては希薄であることも事実です。一方で、Conjecture 1 の反例を（それが存在するとして）具体的に構成することは、それ自体、難しいことです。従って、それが達成されれば、興味深い、重要な発見になるはずです。[1]

最後に、個人的な話で恐縮ですが、筆者が高次元ネヴァンリンナ理論の研究を始めた頃（1990 年代後半）の思い出を少しだけ書かせていただきたいと思います。筆者は伊原康隆先生のご指導の下、1995 年からの 5 年間を数理解析研究所の大学院生として過ごしました。思い返すと、筆者が伊原先生に出会った頃、数学の専門書を読むだけで精一杯だった筆者には、とても自分に研究が出来るとは思えませんでした。大学院に入学する直前に、先生

[1] Conjecture 1 に懐疑的な方向の研究として、[1] が興味深い。[1, Thm 3] にあるような代数曲線の列を gonality を有界に保ったまま構成できるか、という問題は、Conjecture 1 の反例を構成する問題に近いように思われる。

にそのことをご相談したところ、先生は即座に、それは飛行機が離陸するようなもので、スピードを上げていけば、いつか研究を始められる、という趣旨のことをおっしゃってくださいました。修士論文は、先生から頂いたテーマで何とか書けたものの、博士課程に入ってからの 1、2 年は自分で研究テーマを見つけようとしても、なかなかうまくいかない時期が続きました。その当時、伊原先生から、「これでいいんだろうか、と悩んでいないで、これでいいんだ、と信じて前に進むことが大切」、と励ましていただいたことは、今も心に残っています。筆者の大学院生時代は、Vojta の本 [8] が世に出て、10 年くらいの時期でした。そこで提唱されていた、ネヴァンリンナ理論とディオファントス幾何の精密な類似性、という研究テーマは、新規性を保ちながらも、研究テーマとして確立されつつある時代だったと思います。結局のところ、その当時はまだ新しかった、Siu と Yeung の結果 [6] をネヴァンリンナ理論の枠組みで定量化することが筆者の研究の出発点となりました。その間、類似といいつつ実際のところ数論とは関係のない複素幾何の話題に、伊原先生は辛抱強く付き合ってくださいました。学位取得後も、ポスドク、助手、と大学院生時代からあわせると 10 年以上、公私にわたって先生のお世話になりました。伊原先生のお陰で、筆者の今日があるといっても過言ではありません。とても感謝しております。

2. Notations of higher dimensional Nevanlinna theory

We refer the readers to [4] for the detail of higher dimensional Nevanlinna theory. Let Y be a Riemann surface with a proper surjective holomorphic map $\pi_Y : Y \to \mathbb{C}$. For $r > 0$, we set $Y(r) = \pi_Y^{-1}(\{z;\ |z| < r\})$. We put

$$N_{\mathrm{ram}\,\pi_Y}(r) = \frac{1}{\deg \pi_Y}\int_1^r \left[\sum_{y\in Y(t)} \mathrm{ord}_y\,\mathrm{ram}\,\pi_Y\right]\frac{dt}{t},$$

where $\mathrm{ram}\,\pi_Y$ is the ramification divisor of π_Y.

Let X be a smooth projective variety. Let L be a line bundle on X. Let $||\cdot||$ be a smooth Hermitian metric on L. Let $f : Y \to X$ be a holomorphic curve. We set

$$T(r,f,L) = \frac{1}{\deg \pi_Y}\int_1^r \left[\int_{Y(t)} f^*c_1(L,||\cdot||)\right]\frac{dt}{t} + O(1),$$

where $c_1(L,||\cdot||)$ is the curvature form of the metrized line bundle $(L,||\cdot||)$. This definition is independent of the choice of $||\cdot||$ up to bounded function $O(1)$. Let D be an effective divisor of X. Assume that $f(Y) \not\subset \operatorname{supp} D$. The pull-back f^*D is a divisor on Y. We set

$$N(r,f,D) = \frac{1}{\deg \pi_Y}\int_1^r \left[\sum_{y\in Y(t)} \mathrm{ord}_y\, f^*D\right]\frac{dt}{t},$$

and for $k \in \mathbb{Z}_{>0}$,

$$N^{(k)}(r,f,D) = \frac{1}{\deg \pi_Y}\int_1^r \left[\sum_{y\in Y(t)} \min\{k, \mathrm{ord}_y\, f^*D\}\right]\frac{dt}{t}.$$

Then we have

$$N^{(1)}(r,f,D) \le N^{(2)}(r,f,D) \le \cdots \le N(r,f,D).$$

Denoting by $[D]$ the associated line bundle for D, we have the following

Nevanlinna inequality: $N(r,f,D) \le T(r,f,[D]) + O(1)$.

Proof. Let $||\cdot||$ be a smooth Hermitian metric on $[D]$ and let s_D be the associated section for D. Since X is compact, we may chose s_D such that $||s_D(x)|| \le 1$ for all $x \in X$. By the Poincaé-Lelong formula, we have

$$2dd^c \log(1/||s_D \circ f||) = -\sum_{y\in Y}(\mathrm{ord}_y f^*D)\delta_y + f^*c_1([D], ||\cdot||),$$

where δ_y is Dirac current suported on y. Integrating over $Y(t)$, we get

$$2\int_{Y(t)} dd^c \log(1/||s_D \circ f||) = -\sum_{Y(t)} \mathrm{ord}_y f^*D + \int_{Y(t)} f^*c_1([D], ||\cdot||)$$

Hence, we get

$$\begin{aligned}
-N(r,f,D) + T(r,[D]) &= \frac{2}{\deg \pi_Y}\int_1^r \frac{dt}{t}\int_{Y(t)} dd^c \log\left(\frac{1}{||s_D \circ f||}\right) \\
&= \frac{2}{\deg \pi_Y}\int_1^r \frac{dt}{t}\int_{\partial Y(t)} d^c \log\left(\frac{1}{||s_D \circ f||}\right) \\
&= m(r,f,D) - m(1,f,D),
\end{aligned}$$

where we set

$$m(t,f,D) = \frac{1}{\deg \pi_Y}\int_{\partial Y(t)} \log\left(\frac{1}{||s_D \circ f(y)||}\right)\frac{d\arg \pi_Y(y)}{2\pi}.$$

We have $m(r,f,D) \ge 0$. Since $m(1,f,D)$ is constant, we conclude the proof. $\square$

3. Main result

We introduce the following conjecture in higher dimensional Nevanlinna theory, which corresponds to a conjecture of Vojta [9, Conj. 2.3] in Diophantine geometry via analogy between Nevanlinna theory and Diophantine geometry (cf. [8]).

Conjecture 1. *Let X be a smooth projective variety. Let D be a simple normal crossing divisor on X, let L be an ample line bundle on X. Let Y be a Riemann surface with a proper surjective holomorphic map $\pi_Y : Y \to \mathbb{C}$ and $f : Y \to X$ be a holomorphic curve with Zariski dense image. Then we have*

$$T(r,f,K_X(D)) \le N^{(1)}(r,f,D) + N_{\mathrm{ram}\,\pi_Y}(r) + o(T(r,f,L)) \quad ||.$$

Here the symbol $||$ means that the stated estimate holds for $r > 0$ outside some exceptional interval with finite Lebesgue measure.

In higher dimensional Nevanlinna theory, several authors studied second main theorem type estimates for varieties which are related to abelian varieties ([2],[3],[5],[7], [10], [11], etc.). One reason for this seems that the structures of abelian varieties are suitable for the investigation of higher dimensional Nevanlinna theory. We state the following

Proposition 1. *If Conjecture 1 is true for all X which are birationally equivalent to abelian varieties, then Conjecture 1 is true in general.*

Before going to prove this proposition, we prepare several lemmas. For two line bundles L_1 and L_2 on a quasi-projective variety V, we denote $L_1 \le L_2$ if there exists a non-zero global section for $L_2 \otimes L_1^{-1}$.

Lemma 1. *Let V and W be smooth projective varieties, and let $p: V \to W$ be a generically finite, surjective morphism. Let $E \subset W$ be a simple normal crossing divisor. Then*

$$p^* K_W(E) \le K_V(p^{-1}(E)),$$

where we denote by $p^{-1}(E)$ a reduced divisor $(p^*E)_{\mathrm{red}}$.

Proof of Lemma 1. We take a Zariski open set $U \subset V$ such that the restriction $p^{-1}(E)|_U$ of $p^{-1}(E)$ on U is simple normal crossing and that the codimension of $V - U$ is greater than 1. By

$$\Gamma(U, K_V(p^{-1}(E)) \otimes p^* K_W(E)^{-1}) = \Gamma(V, K_V(p^{-1}(E)) \otimes p^* K_W(E)^{-1}),$$

it is enough to show $p^* K_W(E)|_U \le K_V(p^{-1}(E))|_U$. This follows from the logarithmic ramification formula. □

Lemma 2. *Let V, W, p, E be the same as in Lemma 1. Assume that $p^{-1}(E)$ is simple normal crossing and that p is finite étale outside E. Then there exists a birational modification*

$$\begin{array}{ccc} V & \xleftarrow{\ \psi\ } & \tilde{V} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{p}} \\ W & \xleftarrow[\ \varphi\ ]{} & \tilde{W} \end{array} \tag{3.1}$$

such that the following three conditions hold:

- *$\tilde{W}$ is smooth.*
- *$\varphi^{-1}(E)$ is simple normal crossing.*
- *$\psi^* K_V(p^{-1}(E)) \le \tilde{p}^* K_{\tilde{W}}(\varphi^{-1}(E))$.*

Moreover we may choose $\tilde{V}$ to be smooth.

Proof of Lemma 2. We take a birational modification (3.1) such that (1) $\tilde{p}$ is finite, (2) $\tilde{W}$ is smooth and $\varphi^{-1}(E)$ is simple normal crossing, (3) φ is isomorphism outside E, and (4) $\tilde{V}$ is normal. We take a Zariski open set $U \subset \tilde{V}$ such that U is smooth and the codimension of $\tilde{V} - U$ is greater than 1. Then the restriction $\tilde{p}|_U : U \to \tilde{W}$ is quasi-finite, and étale outside $\varphi^{-1}(E)$. Hence we have

$$\tilde{p}^* K_{\tilde{W}}(\varphi^{-1}(E))|_U = K_U(\tilde{p}^{-1}(\varphi^{-1}(E))|_U).$$

On the other hand, since $p^{-1}(E)$ is simple normal crossing, the logarithmic ramification formula yields

$$\psi^* K_V(p^{-1}(E))|_U \le K_U(\psi^{-1}(p^{-1}(E))|_U) = K_U(\tilde{p}^{-1}(\varphi^{-1}(E))|_U).$$

Hence we get

$$\psi^* K_V(p^{-1}(E))|_U \le \tilde{p}^* K_{\tilde{W}}(\varphi^{-1}(E))|_U.$$

Since $\tilde{V}$ is normal, we have

$$\Gamma(U, \tilde{p}^* K_{\tilde{W}}(\varphi^{-1}(E)) \otimes \psi^* K_V(p^{-1}(E))^{-1}) = \Gamma(\tilde{V}, \tilde{p}^* K_{\tilde{W}}(\varphi^{-1}(E)) \otimes \psi^* K_V(p^{-1}(E))^{-1}).$$

Hence $\psi^* K_V(p^{-1}(E)) \le \tilde{p}^* K_{\tilde{W}}(\varphi^{-1}(E))$. Finally we replace $\tilde{V}$ by its desingularization $\tilde{V}' \to \tilde{V}$, if necessary. Then $\tilde{V}$ is smooth. □

Lemma 3. *Let X be a smooth projective variety. Let $f : Y \to X$ be a holomorphic curve with Zariski dense image, where Y is a Riemann surface with a proper surjective holomorphic map $\pi_Y : Y \to \mathbb{C}$. Let L_1 and L_2 be line bundles on X.*

(1) Assume that $L_1 \leq L_2$. Then

$$T(r, f, L_1) \leq T(r, f, L_2) + O(1).$$

(2) Assume that L_2 is big. Then

$$T(r, f, L_1) = O(T(r, f, L_2)) + O(1).$$

Proof of Lemma 3. We first prove (1). Let D be an effective divisor which corresponds to a non-zero global section for $L_2 \otimes L_1^{-1}$. Then $[D] = L_2 \otimes L_1^{-1}$. By $f(Y) \not\subset \operatorname{supp} D$, Nevanlinna inequality yields

$$0 \leq N(r, f, D) \leq T(r, f, [D]) + O(1) = T(r, f, L_2) - T(r, f, L_1) + O(1)$$

for $r > 1$.

Next we prove (2). By Kodaira's lemma, there exists a positive integer n such that $L_1 \leq L_2^{\otimes n}$. Hence by (1), we have $T(r, f, L_1) \leq nT(r, f, L_2) + O(1)$. This proves (2). □

Remark. If Conjecture 1 is true for ample line bundles L, then the same is true for any big line bundle L. This follows from Lemma 3 (2).

Now we prove Proposition 1. In the following, we assume that Conjecture 1 is true for smooth projective varieties which are birationally equivalent to abelian varieties.

Step 1. We first consider the special case that X is a smooth projective variety with a generically finite, surjective morphism $p : X \to A$ onto an abelian variety A. Let $G \subset A$ be a reduced divisor such that $D \subset p^{-1}(G)$ and $p : X \to A$ is finite étale outside G. We take a birational modification

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "p"'] & \tilde{X} \arrow[l, "\psi"'] \arrow[d, "\tilde{p}"] \\ A & \tilde{A} \arrow[l, "\varphi"] \end{tikzcd}$$

such that (1) both $\tilde{X}$ and $\tilde{A}$ are smooth, (2) both $\psi^{-1}(p^{-1}(G))$ and $\varphi^{-1}(G)$ are simple normal crossing, (3) the modification is isomorphism outside G. We apply Lemma 2 for a generically finite, surjective morphism $\tilde{p} : \tilde{X} \to \tilde{A}$ and a simple normal crossing divisor $\varphi^{-1}(G) \subset \tilde{A}$ to get a birational modification

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[d, "\tilde{p}"] & \tilde{\tilde{X}} \arrow[l, "\tilde{\psi}"'] \arrow[d, "\tilde{\tilde{p}}"] \\ \tilde{A} & \tilde{\tilde{A}} \arrow[l, "\tilde{\varphi}"] \end{tikzcd}$$

such that both $\tilde{\tilde{A}}$ and $\tilde{\tilde{X}}$ are smooth, $\tilde{\varphi}^{-1}(\varphi^{-1}(G))$ is simple normal crossing, and

$$\tilde{\psi}^* K_{\tilde{X}}(\psi^{-1}(p^{-1}(G))) \leq \tilde{\tilde{p}}^* K_{\tilde{\tilde{A}}}(\tilde{\varphi}^{-1}(\varphi^{-1}(G))). \tag{3.2}$$

Now let $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$ and $\tilde{\tilde{f}} : Y \to \tilde{\tilde{X}}$ be the lifting of f. Then by (3.2), Lemma 3 (1) yields

$$T(r, \tilde{f}, K_{\tilde{X}}(\psi^{-1}(p^{-1}(G)))) \leq T(r, \tilde{\tilde{p}} \circ \tilde{\tilde{f}}, K_{\tilde{\tilde{A}}}(\tilde{\varphi}^{-1}(\varphi^{-1}(G)))) + O(1).$$

Applying Conjecture 1 for $\tilde{\tilde{p}} \circ \tilde{\tilde{f}} : Y \to \tilde{\tilde{A}}$, we get (cf. Remark after Lemma 3)

$$T(r, \tilde{\tilde{p}} \circ \tilde{\tilde{f}}, K_{\tilde{\tilde{A}}}(\tilde{\varphi}^{-1}(\varphi^{-1}(G)))) \leq N^{(1)}(r, \tilde{\tilde{p}} \circ \tilde{\tilde{f}}, \tilde{\varphi}^{-1}(\varphi^{-1}(G))) + N_{\mathrm{ram}\,\pi_Y}(r) + o(T(r, f, L)) \quad ||.$$

Using $N^{(1)}(r, \tilde{\tilde{p}} \circ \tilde{\tilde{f}}, \tilde{\varphi}^{-1}(\varphi^{-1}(G))) = N^{(1)}(r, \tilde{f}, \psi^{-1}(p^{-1}(G)))$, we get

$$T(r, \tilde{f}, K_{\tilde{X}}(\psi^{-1}(p^{-1}(G)))) \leq N^{(1)}(r, \tilde{f}, \psi^{-1}(p^{-1}(G))) + N_{\mathrm{ram}\,\pi_Y}(r) + o(T(r, f, L)) \quad ||.$$

We write $\psi^{-1}(p^{-1}(G)) = \psi^{-1}(D) + F$. Then we have

$$T(r, \tilde{f}, K_{\tilde{X}}(\psi^{-1}(D))) \leq T(r, \tilde{f}, K_{\tilde{X}}(\psi^{-1}(p^{-1}(G)))) - T(r, \tilde{f}, [F]) + O(1).$$

Hence we get

$$\begin{aligned} T(r, \tilde{f}, K_{\tilde{X}}(\psi^{-1}(D))) \leq N^{(1)}(r, \tilde{f}, \psi^{-1}(p^{-1}(G))) - T(r, \tilde{f}, [F]) \\ + N_{\mathrm{ram}\,\pi_Y}(r) + o(T(r, f, L)) \quad || \end{aligned}$$

We have

$$\begin{aligned} N^{(1)}(r, \tilde{f}, \psi^{-1}(p^{-1}(G))) &\leq N^{(1)}(r, \tilde{f}, \psi^{-1}(D)) + N^{(1)}(r, \tilde{f}, F) \\ &\leq N^{(1)}(r, \tilde{f}, \psi^{-1}(D)) + N(r, \tilde{f}, F) \\ &= N^{(1)}(r, f, D) + N(r, \tilde{f}, F). \end{aligned}$$

By Nevanlinna inequality, we get

$$T(r, \tilde{f}, K_{\tilde{X}}(\psi^{-1}(D))) \leq N^{(1)}(r, f, D) + N_{\mathrm{ram}\,\pi_Y}(r) + o(T(r, f, L)) \quad ||.$$

Since D is simple normal crossing, Lemmas 1 and 3 (1) yield

$$T(r, f, K_X(D)) \leq T(r, \tilde{f}, K_{\tilde{X}}(\psi^{-1}(D))) + O(1).$$

Hence we have

$$T(r, f, K_X(D)) \leq N^{(1)}(r, f, D) + N_{\mathrm{ram}\,\pi_Y}(r) + o(T(r, f, L)) \quad ||.$$

We get the estimate of Conjecture 1 for $f : Y \to X$.

Step 2. Next we prove the general case. Let A be an abelian variety such that $\dim A = \dim X$. Then by considering a subvariety of $X \times A$ and taking a resolution of singularities, we conclude that there exists a smooth projective variety V such that there exist generically finite, surjective morphisms $p : V \to A$ and $q : V \to X$. We take a birational modification

$$\begin{array}{ccc} V & \xleftarrow{\psi} & \tilde{V} \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{q}} \\ X & \xleftarrow[\varphi]{} & \tilde{X} \end{array}$$

such that (1) both $\tilde{V}$ and $\tilde{X}$ are smooth, (2) there exists $G \subset \tilde{X}$ such that G is simple normal crossing and $\varphi^{-1}(D) \subset G$, (3) $\tilde{q}^{-1}(G)$ is simple normal crossing, (4) $\tilde{q}$ is finite étale outside G. Let $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$ be the lifting of f. We take a lifting $\tilde{f}' : Y' \to \tilde{V}$ from a Riemann surface Y' with a proper surjective map $\pi : Y' \to Y$ such that

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{\tilde{f}'} & \tilde{V} \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\tilde{q}} \\ Y & \xrightarrow[\tilde{f}]{} & \tilde{X} \end{array}$$

Then we claim

$$N^{(1)}(r, \tilde{f}', \tilde{q}^{-1}(G)) + N_{\mathrm{ram}\,\pi_Y \circ \pi}(r) - N_{\mathrm{ram}\,\pi_Y}(r) = N^{(1)}(r, \tilde{f}, G) \tag{3.3}$$

Indeed for each $y \in Y'$, we have

$$\min(1, \mathrm{ord}_y \pi^*(\tilde{f}^* G)) + \mathrm{ord}_y(\mathrm{ram}\ \pi) = (\deg_y \pi) \min(1, \mathrm{ord}_{\pi(y)} \tilde{f}^* G)), \tag{3.4}$$

where $\deg_y \pi$ is the local degree around y, hence $\deg_y \pi = \mathrm{ord}_y(\mathrm{ram}\ \pi) + 1$. This is trivial if $y \notin \mathrm{ram}\ \pi$. Suppose $y \in \mathrm{ram}\ \pi$. Then since $\tilde{q}$ is unramified outside G, we have $\tilde{f}'(y) \in \tilde{q}^{-1}(G)$. Hence letting $x = \pi(y)$, we get

$$\min(1, \mathrm{ord}_y \pi^*(x)) + \mathrm{ord}_y(\mathrm{ram}\ \pi) = \mathrm{ord}_y \pi^*(x)$$

from which we obtain (3.4). From (3.4), we get

$$N^{(1)}(r, \tilde{f}', \tilde{q}^{-1}(G)) + \frac{1}{(\deg \pi) \times (\deg \pi_Y)} \int_1^r \sum_{y \in Y'(t)} \mathrm{ord}_y(\mathrm{ram}\ \pi) \frac{dt}{t} = N^{(1)}(r, \tilde{f}, G)$$

We have

$$\mathrm{ram}\ (\pi_Y \circ \pi) = \pi^*(\mathrm{ram}\ \pi_Y) + \mathrm{ram}\ \pi,$$

hence

$$N_{\mathrm{ram}\,\pi_Y \circ \pi}(r) = N_{\mathrm{ram}\,\pi_Y}(r) + \frac{1}{(\deg \pi) \times (\deg \pi_Y)} \int_1^r \sum_{y \in Y'(t)} \mathrm{ord}_y(\mathrm{ram}\ \pi) \frac{dt}{t}.$$

Thus we get (3.3).

Now we apply the result of step 1. Then we get (cf. Remark after Lemma 3)

$$T(r, \tilde{f}', K_{\tilde{V}}(\tilde{q}^{-1}(G))) \leq N^{(1)}(r, \tilde{f}', \tilde{q}^{-1}(G)) + N_{\mathrm{ram}\,\pi_Y \circ \pi}(r) + o(T(r, f, L)) \quad ||.$$

Since G is simple normal crossing, Lemmas 1 and 3 (1) yield

$$T(r, \tilde{f}, K_{\tilde{X}}(G)) \leq T(r, \tilde{f}', K_{\tilde{V}}(\tilde{q}^{-1}(G))) + O(1).$$

By (3.3), we get

$$T(r, \tilde{f}, K_{\tilde{X}}(G)) \leq N^{(1)}(r, \tilde{f}, G) + N_{\mathrm{ram}\,\pi_Y} + o(T(r, f, L)) \quad ||.$$

By $\varphi^{-1}(D) \subset G$, a similar argument as in step 1 implies

$$T(r, \tilde{f}, K_{\tilde{X}}(\varphi^{-1}(D))) \leq N^{(1)}(r, \tilde{f}, \varphi^{-1}(D)) + N_{\mathrm{ram}\,\pi_Y} + o(T(r, f, L)) \quad ||.$$

Since D is simple normal crossing, Lemmas 1 and 3 (1) yield

$$T(r, f, K_X(D)) \leq T(r, \tilde{f}, K_{\tilde{X}}(\varphi^{-1}(D))) + O(1).$$

Hence by

$$N^{(1)}(r, \tilde{f}, \varphi^{-1}(D)) = N^{(1)}(r, f, D),$$

we get our assertion. $\square$

Example. Let X be a smooth projective variety which is birationally equivalent to an abelian variety. Then Conjecture 1 holds for X in the special case that f is an entire holomorphic curve $f : \mathbb{C} \to X$ with Zariski dense image (cf. [10], [12, Cor. 3.24]). In this case, the following estimate holds:

$$T(r, f, K_X(D)) \leq N^{(1)}(r, f, D) + o(T(r, f, L)) \quad ||.$$

A generalization of this estimate for the setting $f : Y \to X$ is discussed in [11].

References

[1] P. Autissier, A. Chambert-Loir, C. Gasbarri, *On the canonical degrees of curves in varieties of general type*, Geom. Funct. Anal. **22** (5), (2012), 1051–1061.

[2] R. Kobayashi, *Holomorphic curves in Abelian varieties: The second main theorem and applications*, Japan. J. Math. **26** (2000), no.1, 129-152.

[3] M. McQuillan, *A toric extension of Faltings' "Diophantine approximation on abelian varieties"*, J. Differential Geom. **57** (2001), no. 2, 195–231.

[4] J. Noguchi and J. Winkelmann, *Nevanlinna Theory in Several Complex Variables and Diophantine Approximation*, Springer, 2013.

[5] J. Noguchi, J. Winkelmann and K. Yamanoi, *The second main theorem for holomorphic curves into semi-Abelian varieties*, Acta Math. **188**, (2002), No.1, 129-161.

[6] Y.-T. Siu and S.-K. Yeung, *A generalized Bloch's theorem and the hyperbolicity of the complement of an ample divisor in an Abelian variety*, Math. Ann. **306** (1996), 743-758.

[7] Y.-T. Siu and S.-K. Yeung, *Defects for ample divisors of Abelian varieties, Schwarz lemma, and hyperbolic hypersurfaces of low degrees*, Amer. J. Math. **119** (1997), 1139-1172.

[8] P. Vojta, *Diophantine approximations and value distribution theory*, Lecture Notes in Math. 1239, Springer, 1987.

[9] P. Vojta, *A more general ABC conjecture*, International Mathematics Research Notices, 1998.

[10] K. Yamanoi, *Holomorphic curves in abelian varieties and intersections with higher codimensional subvarieties*, Forum Math. **16** (2004), no.5, 749–788.

[11] K. Yamanoi, *Holomorphic curves in algebraic varieties of maximal albanese dimension*, Internat. J. Math. **26** no. 6 (2015).

[12] K. Yamanoi, *Kobayashi Hyperbolicity and Higher-dimensional Nevanlinna Theory*, Geometry and Analysis on Manifolds, Progress in Mathematics, Vol. 308, (2015) 209–273, Springer.

[13] K. Yamanoi, *Kobayashi hyperbolicity of the complements of ample divisors in abelian varieties*, preprint. (Available from: https://sites.google.com/site/yamanoimath/)

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka University, Toyonaka, Osaka 560-0043, Japan

E-mail address: `yamanoi@math.sci.osaka-u.ac.jp`