数理解析研究所講究録 第2124巻 2019年 103-111

ベイズ推測におけるリスク不等式の漸近的な比較

筑波大学・数理物質系　小池健一
Ken-ichi Koike
Department of Mathematics,
Faculty of Pure and Applied Sciences,
University of Tsukuba

概要

ベイズ推測において，2 乗損失関数の下でのベイズリスクの下界を与える不等式には様々なものがある (例えば，van Trees and Bell (2007))．本稿では，それらのうちのいくつかについて漸近的な比較を行う．まず，未知母数が一変量の場合に，Abu-Shanab and Veretennikov (2015) の Cramér-Rao 型の不等式に対する結果が，Koike (2006) の Bhattacharyya 型の下界に対しても成立することを示す．次に，未知母数が一変量の場合に，Gill and Levit (1996) の不等式に対する，漸近的に最適な選択を示す．最後に，多変量の場合の応用例として，攪乱母数がある場合の下界を与える不等式を示し，漸近的に最適な下界の選択について示す．

1　はじめに

Cramér-Rao 型の下界の応用として，van Trees [13], Borovkov and Sakhanenko [3], Brown and Gajek [4] は，2 乗損失関数の下でのベイズリスクの下界を与えた．彼らは，ミニマックスリスクに対する下界についても議論している (Prakasa Rao [11], Ghosh [5], Sato and Akahira [12], Koike [9], Hashimoto and Koike [7] 等も参照)．多変量の場合においても，van Trees [13], Prakasa Rao[11], Gill and Levit [6] 等により，ベイズリスクに関する下界が得られている．

しかしながら，これらの下界が常に達成可能であるとは限らない．一方，不偏推定量の分散に対して，Bhattacharyya 型の下界が Cramér-Rao 型の下界を改良することが知られている．このことを利用して， Koike [9]，Hashimoto and Koike [7] では，ベイズリスクに対する Cramér-Rao 型の下界の改良が示されている．

最近，Abu-Shanab and Veretennikov [1] は， Borovkov-Sakhanenko の下界が van Trees の下界を漸近的に優越し，漸近的に最適であることを示した．

本稿では，漸近有効性の観点から，ベイズリスクに対するいくつかの下界の比較を行う．2 節では，一変量の場合に，Abu-Shanab and Veretennikov [1] の結果が Bhattacharyya 型の下界 Koike [9] でも成立することを示す．3 節では，多変量の場合に，Gill and Levit [6] の下界における漸近的に最適な選択について論じる．4 節では，攪乱母数がある場合の下界を与え，その漸近的

に最適な選択について論じる．

2 一変量の場合

ここでは未知母数が $\mathbb{R}$ の区間である場合を考える．

$X_1,\ldots,X_n$ を，互いに独立にいずれも (σ-有限測度 μ に関する) 密度関数 $f_1(x\,|\,\theta)$ ($\theta \in \Theta$) をもつ確率分布に従う確率変数列とする．ただし，Θ は端点が a, b ($-\infty \le a < b \le \infty$) である $\mathbb{R}$ の区間とする．

このとき，$X := (X_1,\ldots,X_n)$ の同時確率密度関数は $f(x\,|\,\theta) := \prod_{i=1}^n f_1(x_i\,|\,\theta)$ となる．ただし，$x = (x_1,\ldots,x_n)$ とする．$\lambda(\theta)$ を θ の (Lebesgue 測度に関する) 事前密度関数とする．$\theta \in \Theta$ の関数 $g = g(\theta)$ の台を $\mathrm{supp}(g)$ と表す．θ の関数 $\psi(\theta)$ を 2 乗損失関数 $L(\theta, a) = (a - \psi(\theta))^2$ の下でベイズ推測する．

次を仮定する．

(A1) ほとんどすべての x に対して，$f_1(x\,|\,\theta)$ は θ に関して 2 回微分可能．

(A2) Fisher 情報量

$$I(\theta) = E_\theta\left[\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log f_1(X_1\,|\,\theta)\right\}^2\right] = \int \frac{\{\frac{\partial}{\partial\theta} f_1(x\,|\,\theta)\}^2}{f_1(x\,|\,\theta)} d\mu$$

が存在し，任意の $\theta \in \Theta$ に対して $0 < I(\theta) < \infty$ を満たす．

(A3) 事前密度関数 λ は 2 回微分可能で，$\mathrm{supp}(\lambda) \subset \Theta$ を満たす．

(A4) $I(\theta)$ は連続微分可能で，(A2) の右辺において θ に関する偏微分が積分記号下で行える．

以降では，簡単のため，関数の変数を省略することがある．

$\psi(\theta)$ の推定量を $\hat{\psi} = \hat{\psi}(X)$ とする．h を，$\mathrm{supp}(h) \subset \mathrm{supp}(\lambda)$ を満たす微分可能な関数とする．いま，ほとんど全ての x に対して，$\theta = a, b$ において $h(t) f_1(x \mid \theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\{h(\theta) f_1(x \mid \theta)\} = 0$ が成り立つとする．

Koike [9] は Bhattacharyya 型の下界

$$E\left\{\left(\hat{\psi} - \psi\right)^2\right\} \ge \left(E\left(\frac{\psi' h}{\lambda}\right), -E\left(\frac{\psi'' h}{\lambda}\right)\right) V^{-1} \left(E\left(\frac{\psi' h}{\lambda}\right), -E\left(\frac{\psi'' h}{\lambda}\right)\right)' \tag{1}$$

を示した．ただし，$S_i = \{f(x|\theta)\lambda(\theta)\}^{-1} (\partial^i/\partial t^i)\{f(x|\theta)h(\theta)\}$ ($i = 1, 2$) とし，$V =$

$\{E(S_iS_j)\}_{i,j=1,2}$ は 2×2 行列で，その成分は

$$
\begin{aligned}
E\left(S_1^2\right) =& nE\left(\frac{h^2 I}{\lambda^2}\right)+E\left\{\left(\frac{h'}{\lambda}\right)^2\right\},\\
E\left(S_1S_2\right) =& n\left[E\left\{\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 E_t\left(\frac{f_1'f_1''}{f_1^2}\right)\right\}+2E\left(\frac{Ihh'}{\lambda^2}\right)\right]+E\left(\frac{h'h''}{\lambda^2}\right),\\
E\left(S_2^2\right) =& 2n^2 E\left\{\left(\frac{Ih}{\lambda}\right)^2\right\}+n\left[E\left\{\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 E_t\left(\frac{f_1''}{f_1}\right)^2\right\}-2E\left\{\left(\frac{Ih}{\lambda}\right)^2\right\}\right.\\
&\left.+4E\left(\frac{Ih'^2}{\lambda^2}\right)+4E\left\{\frac{hh'}{\lambda^2}E_t\left(\frac{f_1'f_1''}{f_1^2}\right)\right\}\right]+E\left\{\left(\frac{h''}{\lambda}\right)^2\right\}.
\end{aligned}
$$

で与えられる．

Koike [9] は，(1) の (2) に対する漸近的優越性を示し，それらの間の関係式を示した．(1) の下界の n に関する漸近展開は

$$
n^{-1}\frac{\left\{E\left(\psi' h/\lambda\right)\right\}^2}{E\left(h^2 I/\lambda^2\right)}+o\left(\frac{1}{n}\right)\quad (n\to\infty).
$$

(Koike [9]) となる．

Borovkov [2] は，仮定 (A1) – (A4) の下で，

$$
E\left\{\left(\hat{\psi}-\psi\right)^2\right\}\geq\frac{\left\{E\left(\frac{\psi' h}{\lambda}\right)\right\}^2}{E\left(S_1^2\right)}, \tag{2}
$$

が成り立つことを示した．ただし，$S_1=\{f(x\,|\,\theta)\lambda(\theta)\}^{-1}\,(\partial/\partial t)\{f(x\,|\,\theta)h(\theta)\}$,

$$
E\left(S_1^2\right) =nE\left(\frac{h^2 I}{\lambda^2}\right)+E\left\{\left(\frac{h'}{\lambda}\right)^2\right\}
$$

とする．そこで，n^{-1} の係数

$$
\frac{\left\{E\left(\psi' h/\lambda\right)\right\}^2}{E\left(h^2 I/\lambda^2\right)} =: G(h)\quad \text{(say)}
$$

を h を変えることで最大化するのは自然である．

定理 1. $h_0=(\psi'\lambda/I)$ とすると， 仮定を満たす任意の h に対して

$$
G(h_0)=E\left(\frac{\psi'^2}{I}\right)\geq G(h)
$$

が成り立つ．

Abu-Shanab and Veretennikov [1] は, Cramér-Rao 型のベイズ不等式の族において, Borovkov-Sakhanenko の下界が漸近的に最適であることを示している．定理 1 は，Abu-Shanab and

Veretennikov [1] の結果が，Bhattacharyya 型のベイズ不等式においても成立していることを示している．

Borovkov の不等式 [2] において $h = h_0 = (\psi'\lambda/I)$ とすると， Borovkov-Sakhanenko の不等式 [3] を得る：

$$
\begin{aligned}
E\left\{\left(\hat{\psi}-\psi\right)^2\right\} \geq & \frac{\left\{E\left(\dfrac{\psi'^2}{I}\right)\right\}^2}{nE\left(\dfrac{\psi'^2}{I}\right)+E\left[\left\{\dfrac{(\psi'\lambda/I)'}{\lambda}\right\}^2\right]} \\
= & \frac{E\left(\psi'^2/I\right)}{n}\left\{1-n^{-1}\frac{E\left[\left\{\frac{(\psi'\lambda/I)'}{\lambda}\right\}^2\right]}{E\left(\psi'^2/I\right)}+O(n^{-2})\right\} \quad (n\to\infty). \qquad (3)
\end{aligned}
$$

一方，Borovkov の不等式 [2] において $h = \lambda$ とすると，van Trees の不等式 [13] を得る：

$$
\begin{aligned}
E\left\{\left(\hat{\psi}-\psi\right)^2\right\} \geq & \frac{\{E(\psi')\}^2}{nE(I)+E\{\left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^2\}} \\
= & \frac{\{E(\psi')\}^2}{nE(I)}\left\{1-\frac{E(\lambda'/\lambda)^2}{nE(I)}+O(n^{-2})\right\} \quad (n\to\infty). \qquad (4)
\end{aligned}
$$

従って，Borovkov-Sakhanenko の不等式は，van Trees の不等式より漸近的に優れていて，最適な下界であることが分かる．また，Koike [9] において，$h = \lambda$ とすると，同様の不等式を得る．これは標本の大きさを固定した場合でも Borovkov-Sakhanenko の不等式を優越するが ([9])，漸近的には Borovkov-Sakhanenko の不等式と同等となることが分かる．

3　多変量の場合

多変量の場合にも，ベイズリスクの下界を与える不等式には様々なものがある．その中でも Gill and Levit [6] は極めて一般的な不等式を示しているので，本稿ではこれについて論じる．

$X_1,\ldots,X_n$ を，互いに独立にいずれも (σ-有限測度に関する) 密度関数 $f_1(x\,|\,\theta)$ $(\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_s)^\top \in \Theta \subset \mathbb{R}^s)$*1に従う確率変数列とする． ただし，$\Theta$ は $\mathbb{R}^s$ における矩形とする．このとき $X := (X_1,\ldots,X_n)$ の同時確率密度関数は，確率密度関数 $f(x\,|\,\theta) := \prod_{i=1}^n f_1(x_i\,|\,\theta)$ に従う．ただし，$x = (x_1,\ldots,x_n)$ とする．$\lambda(\theta)$ を，θ の (Lebesgue 測度に関する) 密度関数とする．いま，θ の $\mathbb{R}^p$ 値関数 $\psi = \psi(\theta) = (\psi_1(\theta),\ldots,\psi_p(\theta))^\top$ について，推定量 $\hat{\psi}_n = (\hat{\psi}_{n1},\ldots,\hat{\psi}_{np})^\top$ を用いたとき，ある行列で重み付けされた損失関数 $L(\theta,\hat{\psi}_n) = (\hat{\psi}_n-\psi)^\top B(\theta)^{-1}(\hat{\psi}_n-\psi)$ を考える．ただし，$B(\theta)$ は正値対称行列で $B(\theta) = A(\theta)^\top A(\theta)$ ($A(\theta)$: $p\times p$ 正則行列) と表せるとする．ψ の導関数行列を $\partial\psi/\partial\theta = (\partial\psi_i/\partial\theta_j)$ と表す．Fisher 情報行列

$$
I(\theta) = E_\theta\left[\left(\frac{\partial \log f_1(X_1,\theta)}{\partial\theta}\right)^\top\left(\frac{\partial \log f_1(X_1,\theta)}{\partial\theta}\right)\right]
$$

*1 $\top$ は行列の転置を表す．

は正値対称で，ある正則行列 $P(\theta)$ があって $I(\theta)=P(\theta)P(\theta)^\top$ と表せるとする．ここでは，f,λ 等に関する正則条件として，Gill and Levit [6] で課されているものを仮定する．このとき，次の不等式が成り立つ ([6])

$$\int_\Theta E_\theta\left\{(\hat{\psi}_n-\psi)^\top B(\theta)^{-1}(\hat{\psi}_n-\psi)\right\}\lambda(\theta)d\theta \geq \frac{\left[\int_\Theta \mathrm{tr}\left\{C(\theta)(\partial\psi/\partial\theta)^\top\right\}\lambda(\theta)d\theta\right]^2}{n\int_\Theta \mathrm{tr}\{B(\theta)^\top C(\theta)I(\theta)C(\theta)^\top\}\lambda(\theta)d\theta+\tilde{I}(\lambda)}. \tag{5}$$

ただし，$C(\theta)=(C_{ij}(\theta))$ は [6] の条件を満たす $p\times s$ 行列，また，

$$\tilde{I}(\lambda)=\int_\Theta\left(\sum_{i,j,k,l}B_{i,j}(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta_k}\{C_{ik}(\theta)\lambda(\theta)\}\frac{\partial}{\partial\theta_l}\{C_{jl}(\theta)\lambda(\theta)\}\right)\frac{1}{\lambda(\theta)}d\theta$$

とする．(5) の右辺の漸近展開は

$$\frac{\left[\int_\Theta \mathrm{tr}\left\{C(\theta)(\partial\psi/\partial\theta)^\top\right\}\lambda(\theta)d\theta\right]^2}{\int_\Theta \mathrm{tr}\{B(\theta)^\top C(\theta)I(\theta)C(\theta)^\top\}\lambda(\theta)d\theta}n^{-1}+o(n^{-1})=H_1(C)+o(n^{-1}) \quad \text{(say)}$$

となる．ここで，(5) はベイズリスクの下界であるので，$H_1(C)$ の値は大きいほど良い下界となる．C の選択について，次の定理を得る．

定理 2. $C^{(1)}=B(\theta)^{-1}(\partial\psi/\partial\theta)I(\theta)^{-1}$ とおく．このとき，[6] の条件を満たす任意の C に対して

$$H_1(C^{(1)})=\int \mathrm{tr}\left\{B(\theta)^{-1}(\partial\psi/\partial\theta)I(\theta)^{-1}(\partial\psi/\partial\theta)^\top\right\}\lambda(\theta)d\theta\geq H_1(C)$$

が成り立つ．

B を固定した場合，C には様々な選択肢がある．しかし，定理 2 によれば，$C=C^{(1)}$ が漸近的に最適なものである．Gill and Levit [6] においては，B や C について様々なものが提案されている．例えば，$p=s$, $B=E$ (単位行列) のとき, $C=E$ として，多変量 *van Trees* の不等式

$$\begin{aligned}\int E_\theta\|\hat{\psi}_n-\psi(\theta)\|^2\lambda(\theta)d\theta \geq& \frac{\left\{\int \mathrm{div}(\psi)\lambda d\theta\right\}^2}{n\int \mathrm{tr}(I)\lambda d\theta+\mathrm{tr}\{\mathcal{I}(\lambda)\}}\\ =&\frac{\left\{\int \mathrm{div}(\psi)\lambda d\theta\right\}^2}{n\int \mathrm{tr}(I)\lambda d\theta}\left\{1-\frac{\mathrm{tr}\{\mathcal{I}(\lambda)\}}{n\int \mathrm{tr}(I)\lambda d\theta}+O(n^{-2})\right\} \quad (n\to\infty)\end{aligned} \tag{6}$$

が導かれる．ただし, $\|\cdot\|$ はユークリッドノルムを表し, $\mathrm{div}(\psi)=\sum_i\partial\psi_i/\partial\theta_i=\mathrm{tr}(\partial\psi/\partial\theta), \mathcal{I}(\lambda)$ は λ に対する情報行列とする． さらに，$p=s$, $B=E$ (単位行列) のとき, $C=(\partial\psi/\partial\theta)I(\theta)^{-1}$

として, 多変量 *Borovkov-Sakhanenko* 不等式

$$\begin{aligned}
&\int E_\theta ||\hat{\psi}_n - \psi(\theta)||^2 \lambda(\theta) d\theta \\
\geq & \frac{\left\{\int \mathrm{tr}\left\{(\partial\psi/\partial\theta) I(\theta)^{-1} (\partial\psi/\partial\theta)^\top\right\} \lambda d\theta\right\}^2}{n\int \mathrm{tr}\left\{(\partial\psi/\partial\theta) I(\theta)^{-1} (\partial\psi/\partial\theta)^\top\right\} \lambda d\theta + \tilde{\mathcal{I}}(\lambda)} \\
= & \frac{\int \mathrm{tr}\left\{(\partial\psi/\partial\theta) I(\theta)^{-1} (\partial\psi/\partial\theta)^\top\right\} \lambda d\theta}{n} \\
& \cdot \left\{1 - \frac{\tilde{\mathcal{I}}(\lambda)}{n\int \mathrm{tr}\left\{(\partial\psi/\partial\theta) I(\theta)^{-1} (\partial\psi/\partial\theta)^\top\right\} \lambda d\theta} + O(n^{-2})\right\} \quad (n \to \infty) \qquad (7)
\end{aligned}$$

が導かれる．ただし,

$$\tilde{\mathcal{I}}(\lambda) = \int \sum_{i,k,l} \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial}{\partial\theta_k} C_{ik}\lambda\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta_l} C_{il}\lambda\right) d\theta$$

とする．定理 2 より，(7) は漸近的に最適であり， (6) を優越することが分かる.

$B = (\partial\psi/\partial\theta)I(\theta)^{-1}(\partial\psi/\partial\theta)^T$, $B = \mathrm{diag}((\partial\psi/\partial\theta)I(\theta)^{-1}(\partial\psi/\partial\theta)^T)$ のとき, Gill and Levit [6] では $C = B(\theta)^{-1}(\partial\psi/\partial\theta)I(\theta)^{-1}$ を選択しているが, 定理 2 より，これらは漸近的に最適なものとなっていることが分かる.

例 1 ([10])**.** θ を与えたとき，確率変数列 $X_1, \ldots, X_n$ が，互いに独立にいずれも平均ベクトル θ, 分散共分散行列が単位行列 E の s 変量正規分布 normal distribution $N_s(\theta, E)$ に従うとする．θ の事前分布は s 変量正規分布 $N_s(0, \tau^2 E)$ ($\tau > 0$: 既知) とする．損失関数としてユークリッドノルムを用いて，θ のベイズ推定を行う．このとき，Fisher 情報行列 $I(\theta)$ は $I(\theta) = E$ となる．いま，(5) において $B = E$ としているので，　定理 2 から，$C = C^{(1)} = (\partial\psi/\partial\theta)I(\theta)^{-1} = E$ が漸近的に最適な選択となる．よって，多変量 Borovkov-Sakhanenko 不等式が多変量 van Trees 不等式に一致し, その下界は

$$\int E_\theta \|\hat{\theta} - \theta\|^2 \lambda d\theta \geq \frac{\{\int \mathrm{div}(\psi)\lambda d\theta\}^2}{n\int \mathrm{tr}(I)\lambda d\theta + \tilde{I}(\lambda)} = \frac{s^2}{ns + \frac{s}{\tau^2}}$$

で与えられる．一方，θ のベイズ推定量は $\hat{\theta}_B = \frac{\tau^2}{(1/n)+\tau^2}\bar{X}$ で与えられ, そのベイズリスクは上記の下界に一致する. 従って, $\hat{\theta}_B$ は漸近的かつ exact に下界を達成する.

4　攪乱母数がある場合

ここでは，攪乱母数がある場合を考える.

いま，母数 $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^s$ が，$\theta = \begin{pmatrix}\theta^1 \\ \theta^2\end{pmatrix}$ と分割され, $\theta^1 \in \mathbb{R}^p$ は興味の対象の母数，$\theta_2 \in \mathbb{R}^{s-p}$ は攪乱母数とする． θ^1 のベイズ推定を，ユークリッドノルムの損失関数 $L(\theta, \hat{\theta}^1) = \left\|\hat{\theta}^1 - \theta^1\right\|^2$ で行う ($\hat{\theta}^1$: θ^1 の推定量)．$C = (C_{ij})$ は，[6] の仮定を満たす $p \times s$ 行列とし，$C = (C^{11}\, C^{12})$ と

分割表示できるとする．ただし，C^{11}, C^{12} は，それぞれ $p\times p, p\times(s-p)$ 行列とする．J を全ての成分が 1 である $s\times s$ 行列とし，

$$\Lambda = \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\theta_1}(C_{11}\lambda) & \cdots & \frac{\partial}{\partial\theta_s}(C_{1s}\lambda) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial\theta_1}(C_{p1}\lambda) & \cdots & \frac{\partial}{\partial\theta_s}(C_{ps}\lambda) \end{pmatrix}$$

と表す．このとき，(5) から次を得る．

定理 3.

$$\int_\Theta E_\theta \left\|\hat{\theta}^1 - \theta^1\right\|^2 \lambda d\theta \geq \frac{\left\{\int_\Theta \mathrm{tr}\left(C^{11}\right)\lambda d\theta\right\}^2}{n\int_\Theta \mathrm{tr}\left(CIC^\top\right)\lambda d\theta + \int_\Theta \mathrm{tr}\left(\Lambda J\Lambda^\top\right)\lambda d\theta}. \tag{8}$$

I の逆行列 I^{-1} が $I^{-1} = \begin{pmatrix} I^{11} & I^{12} \\ I^{21} & I^{22}\end{pmatrix}$ と分割表示できるとする．ただし，C^{11}, C^{12} は，それぞれ $p\times p, p\times(s-p)$ 行列とする．$\underline{I} = (I^{11}\, I^{12})$ とおく．$C = \underline{I}$ とすると，

$$\int_\Theta E_\theta \left\|\hat{\theta}^1 - \theta^1\right\|^2 \lambda d\theta \geq \frac{\left\{\int_\Theta \mathrm{tr}\left(I^{11}\right)\lambda d\theta\right\}^2}{n\int_\Theta \mathrm{tr}\left(I^{11}\right)\lambda d\theta + \int_\Theta \mathrm{tr}\left(\Lambda J\Lambda^\top\right)\lambda d\theta} \tag{9}$$

を得る．ただし，(9)の分母のΛ は，$C = \underline{I}$ に対応するものとする．

(8) の右辺の漸近展開は

$$\frac{\left(\int_\Theta \mathrm{tr}(C^{11})\lambda d\theta\right)^2}{\int_\Theta \mathrm{tr}\{CIC^\top\}\lambda d\theta} n^{-1} + o(n^{-1}) = H_2(C) + o(n^{-1}) \quad \text{(say)} \tag{10}$$

となる．ここで，$H_2(C)$ の値はベイズリスクの評価式としては大きい値ほど良いものとなる．

漸近的に最適な C の選択法として, 次の定理を得る．

定理 4. Gill and Levit [6] の条件を満たす任意の $p\times s$ 行列 C に対して

$$H_2(\underline{I}) = \int \mathrm{tr}(I^{11})\lambda d\theta \geq H_2(C)$$

が成り立つ．

定理 3,4 の応用例として，$\theta = (\theta_1, \theta_2)^\top \in \Theta \subset \mathbb{R}^2$ の場合を考える．θ_1 を推定量 $\hat{\theta}_1$ で推定する．定理 3 から，

$$\begin{aligned}\int E_\theta\left\{\left(\hat{\theta}_1 - \theta_1\right)^2\right\} &\geq \frac{\left(\int_\Theta C_{11}\lambda d\theta\right)^2}{n\int_\Theta \mathrm{tr}\left(CIC^\top\right)\lambda d\theta + \int_\Theta \mathrm{tr}\left\{\Lambda\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Lambda^\top\right\}\lambda d\theta} \\ &= \frac{\left(\int_\Theta C_{11}\lambda d\theta\right)^2}{\int_\Theta \mathrm{tr}\left(CIC^\top\right)\lambda d\theta} n^{-1} + O(n^{-2})\end{aligned} \tag{12}$$

となる．ただし，$C=(C_{ij})$ は Gill and Levit [6] の条件を満たす 2×2 行列とする．さらに，定理 4 から, 下界 (12) の n^{-1} の係数 は，C が I^{-1} の $(1,1)$ 成分 I^{11} に等しいとき最大になり，最大値は $\int I^{11}\lambda d\theta$ となる．

例 2. θ を与えたとき，確率変数列 $X_1,\ldots,X_n$ は，互いに独立にいずれも，平均 μ, 分散 σ の正規分布 $N(\mu,\sigma)$ に従うとする．$\theta=(\mu,\sigma)$ とし，μ は興味の対象の母数，σ は撹乱母数とする．λ を θ の事前分布の密度関数とし，σ の周辺分布がガンマ分布 $Ga(a,b)(a>2,b>0)$ であるとする．このとき，Fisher 情報行列 I は

$$I=\begin{pmatrix}1/\sigma & 0\\ 0 & 1/(2\sigma^2)\end{pmatrix}$$

となる．I の逆行列の $(1,1)$ 成分は $I^{11}=\sigma$ なので,

$$\lim_{n\to\infty}\int E_\theta\left\{(\hat{\mu}-\mu)^2\right\}\lambda d\theta \geq \int I^{11}\lambda d\theta = ab$$

となる．$\hat{\mu}=\bar{X}$ はこの漸近的な下界を達成する．

参考文献

[1] Abu-Shanab, R. and Veretennikov, A.Yu. (2015). On asymptotic Borovkov-Sakhanenko inequality with unbounded parameter set. *Thory Probab. Math. Statist.*, **90**, 1–12.

[2] Borovkov, A. A. (1998). *Mathematical Statistics*. Gordon and Breach.

[3] Borovkov, A. A. and Sakhanenko, A. U. (1980). On estimates of the expected quadratic risk (in Russian). *Probab. Math. Statist.*, **1**, 185–195.

[4] Brown, L. D. and Gajek, L. (1990). Information inequalities for the Bayes risk. *Ann. Statist.*, **18**, 1578–1594.

[5] Ghosh, J. K. (1994). *Higher Order Asymptotics*. NSF-CBMS Regional Conference Series in Probability and Statistics, Vol.4, Inst. of Math. Statist., Hayward.

[6] Gill, R.D. and Levit, B.Y. (1995). Applications of the van Trees inequality: A Bayesian Cramér-Rao bound. *Bernoulli*, **1**, 59–79.

[7] Hashimoto, S. and Koike, K. (2015). Bhattacharyya type information inequality for the Bayes risk, *Commun. Statist.–Theory Meth.*, **44**, 5213–5224.

[8] Koike, K. (1999). A lower bound for the Bayes risk in the sequential case. *Commun. Statist.–Theory Meth.* **28**, 857–871.

[9] Koike, K. (2006). An integral Bhattacharyya type bound for the Bayes risk. *Commun. Statist.–Theory Meth.* **35**, 2185–2195.

[10] Lehmann, E.L. and Casella, G. (1998). *Theory of Point Estimation, 2nd. ed.*, Springer, New York.

[11] Prakasa Rao, B. L. S. (1992). Cramer-Rao type integral inequalities for estimators of multidimensional parameter. *Sankhyā Ser. A*, **54**, 53–73.

[12] Sato, M. and Akahira, M. (1996). An information inequality for the Bayes risk. *Ann. Statist.*, **24**, 2288–2295.

[13] van Trees, H.L. (1968). *Detection, Estimation, and Modulation Theory, Part I*, Wiley, New York.

[14] van Trees, H.L. and Bell, K.L. (Eds.)(2007). *Bayesian Bounds for Parameter Estimation and Nonlinear Filtering/Tracking.* Wiley-IEEE Press, Piscataway, New Jersey.