数理解析研究所講究録 1358 巻 2004 年 98-109

多次元領域における単純化された走化性方程式系の爆発解の挙動

宮崎大学・工学部　仙葉　隆 (Takasi Senba)
Faculty of Engineering, University of Miyazaki

1 序

Keller と Segel [6] は、細胞性粘菌が自分自身から生成される化学物質に引き寄せられる性質 (**走化性**) によって起きる集中現象を記述する方程式系を導出した。その後、Nanjundiah [12] によって方程式系の単純化がなされた。それが以下の方程式系である。

$$
\text{(KS)}\qquad
\begin{cases}
u_t = \nabla\cdot(\nabla u - u\nabla v), & x\in\Omega,\ t>0,\\
v_t = \Delta v - \gamma v + u, & x\in\Omega,\ t>0,\\
\dfrac{\partial u}{\partial\nu} = \dfrac{\partial v}{\partial\nu} = 0, & x\in\partial\Omega,\ t>0,\\
u(\cdot,0) = u_0, & x\in\Omega.
\end{cases}
$$

我々は方程式系 (KS) を **Keller-Segel 系** と呼ぶ。

ここで、Ω は $\mathbf{R}^N$ $(N=1,2,3,\cdots)$ の中の有界な領域でその境界 $\partial\Omega$ は滑らかとし、ν は境界の外向き単位法線ベクトルとする。u_0 と v_0 は非負で滑らかな関数とする。

$u(x,t)$ と $v(x,t)$ はそれぞれ 場所 x、時刻 t における粘菌の密度と粘菌によって生成される化学物質の濃度を表す。

第1の方程式は粘菌の密度の時間変化を表し、$\mathcal{F} = -\nabla u + u\nabla v$ がその流れを表している。$-\nabla u$ は拡散による流れを表し、$u\nabla v$ は粘菌が化学物質の濃度勾配を感知して濃度の高いほうに移動しようとするために生じる流れを表している。

第2の方程式は化学物質の時間変化を表している。$-v+u$ は化学物質が粘菌によって生成され一定の割合で分解している事を表している。

Keller-Segel 系の解について以下の事が成立する。

(i) 唯一つの古典解 (u,v) が時間局所的に存在する。以下、古典解の最大存在時刻を T_{max} と書く。

(ii) 解は $\overline{\Omega}\times(0,T_{max})$ 上で、滑らかな正の関数となる。

(iii) 任意の $t\in[0,T_{max})$ に対して $\|u(x,t)\|_1=\|u_0\|_1$ が成り立つ。

ここで、任意の $1\le p\le\infty$ に対して $\|\cdot\|_p$ を L^p ノルムとする。

本稿では、(KS) 並びに (KS) を単純化した系の解の爆発について知られている結果と新たに得られた結果について述べる。

ここで (KS) の解 u が $\limsup_{t\to T}\|u(\cdot,t)\|_\infty=\infty$ を満たすとき、時刻 T で解が **爆発** すると言う。そして、$\lim_{n\to\infty}(q_n,t_n)=(q,T)$、$\lim_{n\to\infty}u(q_n,t_n)=+\infty$ を満たす数列 $\{q_n\}\subset\overline{\Omega}$ と $\{t_n\}\subset[0,T_{max})$ があるとき点 q を**爆発点** と呼ぶ。また、**爆発点の集合** を $\mathcal{B}$ で表す。

また、(u,v) を (KS) の解とし、$T_{max}<\infty$ が成り立つならば

$$\lim_{t\to T_{max}}\|u(\cdot,t)\|_\infty=\lim_{t\to T_{max}}\|v(\cdot,t)\|_\infty=\infty.$$

を満たす。従って、T_{max} ならば T_{max} は **爆発時刻** となる。

解の爆発条件や爆発解の挙動は、領域の次元によって異なる。現在知られている結果は大きく分けて、1次元、2次元、3次元以上と3つの場合に分けられる。本稿では、1次元と2次元の領域を「低次元領域」と呼び、3次元以上の領域を「多次元領域」と呼ぶこととする。

2節では、低次元領域において知られている結果について紹介する。3節では、多次元領域における知られている結果と問題点、そしてその部分的な解答について述べる。

2 低次元領域のおける結果

本節では、Ω を低次元の有界領域で、その境界 $\partial\Omega$ は滑らかとする。また、u_0 と v_0 は $\overline{\Omega}$ 上の滑らかな非負関数で $u_0 \neq 0$ を満たすものとする。

領域が1次元の場合は (KS) 系の解は爆発しない。つまり、以下が成り立つ。

定理 1 $\Omega = (a, b)$ $(-\infty < a < b < \infty)$ とする。そのとき、*(KS)* の解は時間大域的に存在し、有界である。

従って、解の爆発と言う切り口では1次元の場合の (KS) の解は興味がない。

一方、領域が2次元の場合は解の L^1 ノルムと爆発現象の間に密接な関係があることがわかっている。

定理 2 ([1], [11]) 以下の *(i)* 又は *(ii)* が成り立つとせよ。

(i) Ω は *2*次元の有界領域であり、u_0 は $\displaystyle\int_\Omega u_0 dx < 4\pi$ を満たす。

(ii) Ω は原点を中心とする有界な *2*次元の開円盤であり、u_0

と v_0 は球対称で $\int_\Omega u_0 dx < 8\pi$ が成り立つ。

そのとき、*(KS)* の解は時間大域的に存在し、有界となる。

序の (iii) より解の L^1-ノルムは時間に依らず一定であることがわかるが、定理 2 は解の L^1 ノルムが十分小さければ時間大域的に解が存在し、有界である事を主張している。さらに、以下の定理から定理 2 の中に現れる 4π や 8π という量が爆発解の挙動と関係している事がわかる。

定理 3 ([4]) Ω は *2* 次元の有界な開円盤とする。そのとき、以下を満たす *(KS)* の球対称な爆発解が存在する。

$$u(\cdot,t) \rightharpoonup 8\pi\delta_0 + f \qquad as\ t \to T_{max}(<\infty) \qquad in\ \mathcal{M}(\overline{\Omega}).$$

ここで、f は $L^1(\Omega)\bigcap C(\overline{\Omega}\backslash\{0\})$ に属する球対称な非負関数であり、δ_0 は原点をサポートに持つデルタ関数である。

このとき、定理 3 の解は、半円盤 $\Omega_+ = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \,||x| < 1,\ x_2 > 0\}$ 上の解でもある。そのとき、その解は

$$u(\cdot,t) \rightharpoonup 4\pi\delta_0 + f \qquad \text{as } t \to T_{max} \qquad \text{in } \mathcal{M}(\overline{\Omega_+})$$

を満たす。従って、定理 2 に現れる 4π、8π と定理3 の解が持つ特異性に関係があると予想できる。

次に述べる定理がこの事の肯定的な証拠と考えられる。

定理 4 ([10]) Ω を *2* 次元の有界領域とせよ。(u,v) を有限時刻 T_{max} で爆発する *(KS)* の解とし、その爆発点は有限個であるとする。そのとき、以下の事が成立する。

$$u(\cdot,t) \rightharpoonup \sum_{q\in\mathcal{B}} m(q)\delta_q + f \qquad as\ \ t \to T_{max} \quad \mathcal{M}(\overline{\Omega}).$$

ただし、f は $L^1(\Omega)\bigcap C(\overline{\Omega}\backslash\mathcal{B})$ に属する非負関数であり、$m(q)$ は

$$m(q) \geqq m_*(q) \equiv \begin{cases} 8\pi & if\ q\in\Omega, \\ 4\pi & if\ q\in\partial\Omega \end{cases}$$

を満たす定数である。

我々は、(KS) の解が有限時刻で爆発するときその爆発点は常に有限個であると予想している。この予想は次に述べる (N) の解について示す事ができる。

$$\text{(N)} \qquad \begin{cases} u_t = \nabla\cdot(\nabla u - u\nabla v), & x\in\Omega,\ t>0, \\ 0 = \Delta v - \gamma v + u, & x\in\Omega,\ t>0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial\nu} = \dfrac{\partial v}{\partial\nu} = 0, & x\in\partial\Omega,\ t>0, \\ u(\cdot,0) = u_0, & x\in\Omega. \end{cases}$$

(N) は、Nagai [8] によって (KS) を単純化することにより導出された方程式系であり、その解の構造は (KS) とよく似ていると予想している。その意味で、以下の定理は (KS) の爆発解の爆発点が常に有限個であると言う予想の肯定的な証拠となっている。

定理 5 ([13]) Ω を *2* 次元の有界領域とし、(u,v) を有限時刻 T_{max} で爆発する *(N)* の解とする。そのとき、爆発点は有限個であり、以下の事が成立する。

$$u(\cdot,t) \rightharpoonup \sum_{q\in\mathcal{B}} m(q)\delta_q + f \qquad as\ \ t\to T_{max} \quad \mathcal{M}(\overline{\Omega}).$$

ただし、f は $L^1(\Omega)\bigcap C(\overline{\Omega}\backslash\mathcal{B})$ に属する非負関数であり、$m(q)$ は $m(q)\geqq m_*(q)$ を満たす定数である。

さらに最近、鈴木 貴 氏（大阪大・基礎工）により $m(q) = m_*(q)$ であることが報告された。

ここまで述べた定理は、有限時刻で爆発する解の挙動に関する結果である。

以下の定理は、解が有限時刻で爆発すための初期値についての十分条件を与えている。

定理 6 ([9]) Ω を *2*次元の有界領域とし、u_0 は以下の *(i)* または *(ii)* を満たしているとする。

(i) $\int_\Omega u_0(x)dx > 8\pi$ であり、領域上のある点 q に対し $\int_\Omega u_0(x)|x-q|^2 dx \ll 1$ が成り立っている。

(ii) $\int_\Omega u_0(x)dx > 4\pi$ であり、境界上のある点 q の近傍で境界が線分となっていて $\int_\Omega u_0(x)|x-q|^2 dx \ll 1$ が成り立っている。

そのとき、*(N)* の解は有限時刻で爆発する。

定理 5 より定理 6 で得られた爆発解の挙動が定理 5 で述べられている挙動を示す事がわかる。

また、u_0 が定理 6 の (2) を満たしていて、$\|u_0\|_1 \in (4\pi, 8\pi)$ を満たしているとする。そのとき、定理 5 より境界上に 1 点だけ爆発点が現れる事がわかる。

3 多次元領域における結果

本節では、$L \in (0,\infty)$ とし、$\Omega = \{x \in \mathbf{R}^N | |x| < L\}$ $(N \geq 3)$ とする。また、u_0 と v_0 は $\overline{\Omega}$ 上の滑らかな非負関数で $u_0 \neq 0$

を満たすものとする。

以下の結果は、Nagai [8] の結果の 3 次元以上の部分を取り出したものである。この定理より、2 次元領域における定理に現れた 4π、8π 等の爆発と時間大域的存在を分離する L^1-量が存在しない (、または多次元領域の場合のその量が 0 である) 事がわかる。

定理 7 ([8]) λ を任意の正の数とせよ。そのとき、$\|u(\cdot,t)\| = \lambda$ を満たすような有限時刻で爆発する球対称解が存在する。

次の方程式系も (KS) を単純化したモデルとして、Jäger と Luckhaus [5] によって導出された方程式系であり、この系の爆発解の挙動も (KS) のそれと似ていると予想している。

$$
\text{(JL)} \qquad \begin{cases} u_t = \nabla \cdot (\nabla u - u\nabla v) \text{ in } \Omega \times [0,\infty), \\ 0 = \Delta v - \mu + u \text{ in } \Omega \times [0, T_{max}), \\ \displaystyle\int_\Omega v dx = 0 \text{ in } [0, T_{max}), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \text{ in } \partial\Omega \times [0, T_{max}), \\ u(\cdot, 0) = u_0 \text{ in } \Omega. \end{cases}
$$

ここで、μ は非負定数である。

次の定理は定理 7 の補足として、任意の L^1-量に対してその量を重さとするデルタ関数が現れるような (JL) の爆発解が存在する事を主張している。さらに上記で述べた我々の立場に立てば、(KS) の解もその性質を持つ事が予想される。

定理 8 ([2]) $\Omega = \mathbf{R}^3$ せよ。任意の $\lambda > 0$ と $T_{max} > 0$ に対して、T_{max} で爆発し以下を満たす *(JL) with* $\mu = 1$ の球対称な爆発解がある。

$$
u(\cdot, t) \rightharpoonup \lambda\delta_0 + f \quad as\ t \to T_{max} \quad in\ \mathcal{M}(\mathbf{R}^3).
$$

ただし、f は $L^1(\Omega)\bigcap C(\overline{\Omega}\backslash\{0\})$ に属する非負球対称関数である。

次の定理は、多次元領域上の (JL) 系はデルタ関数的な特異性を持たない爆発解がある事を主張している。その事は、(KS) も同様の爆発解を持つ事を示唆している。

定理 9 ([3]) $\Omega = \mathbf{R}^3$ とせよ。$\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ *with* $\lim_{n\to\infty}\lambda_n = 2$ があって、任意の $T_{max} > 0$ に対して T_{max} で爆発し、以下を満たす *(JL) with* $\mu = 0$ の爆発解が存在する。

$$u_n(\cdot,t) \rightharpoonup u_{*n} \quad as\ t \to T_{max} \quad in\ \mathcal{M}(\mathbf{R}^3),$$
$$u_{*n}(x) \sim \frac{\lambda_n}{|x|^2} \quad as\ x \sim 0.$$

定理 8、9 から、多次元領域における走化性方程式並びにそれを単純化した方程式の爆発解は、低次元の場合に現れなかった特異性を持つ事がわかる。

そこで、「爆発解が持つ特異性の中で最も弱いものは何か。」、そして「それぞれの特異性は安定であるか。」と言う問題が起こる。

ここでは、「特異性の強弱」や「特異性の安定性」の定義を明確に述べていないが、以下の定理を述べることでそれら定義も含めて説明していきたい。

以後、$N \geqq 3$、$L \in (0,\infty)$ とし、$\Omega = \{x \in \mathbf{R}^N||x| < L\}$ とする。また、$\omega_N = |S^{N-1}|$ とおく。

定理 10 $M \in (0, 2\omega_N)$、$k > 0$ とする。u_0 を球対称な非負関数で

$$\int_{|x|<r}(u_0(x) - \frac{\lambda}{|B_R|})dx \leq Mkr^N/(1+kr^2) \quad for\ 0 < r < L.$$

そのとき、*(JL) with* $\mu=\lambda/|\Omega|$ の解は時間大域的に存在し、有界である。

定理 11 $M>(2N-2)\omega_N/(N-2)$ とせよ。このとき、以下を満たす $k\gg 1$ と $0<\varepsilon\ll 1$ が存在する。
『$\displaystyle\int_{|x|<r} u_0(x)dx \geq Mkr^N/(1+kr^2)$ *for* $0\leq r\leq\varepsilon$ ならば、*(JL) with* $\mu=\lambda/|\Omega|$ の解は爆発する。』

ここで、定理 10、11 の u_0 の仮定において $k\to\infty$ とおいてみる。そのとき、定理 10、11 は大まかに言って $\frac{1}{r^{N-2}}\int_{|x|<r}u_0(x)dx$ の係数が十分小さければ解が時間大域的に存在し、逆にそれが十分大きければ解は爆発する事を主張している。

また $\int_{|x|<r}\frac{1}{|x|^2}dx=\frac{\omega_N}{N-2}r^{N-2}$ が成り立つ事より、大まかに言って u_0 は $1/|x|^2$ の定数倍に対応していると言える。

これらの事から、$1/|x|^2$ 型の特異性が爆発解の持つ特異性の中で最も弱いものであると考えられる。また、球対称な状況下で爆発解の持つ特異性の強弱は爆発点 (原点) の近傍にどれだけ L^1-量が集中しているかが一つの指標となると考えられる。つまり、$\int_{|x|<r}u(x,T_{max})dx$ の $r=0$ の近傍での大小が一つの指標となると考えられる。

定理 12 $N\geqq 37$、$\|u_0\|_1\in\left(\frac{2N-2}{N-2}\omega_N,4\omega_N\right)$ とする。さらに、$0<\varepsilon\ll 1$ と $k\gg 1$ に対して

$$\frac{Mk^2r^4}{1+k^2r^4}\leq\frac{1}{r^{N-2}}\int_{|x|<r}u_0(x)dx\leq\frac{4\omega_N kr^2}{4(N-2)+kr^2}\quad \textit{for}\ 0<r<\varepsilon$$

が成り立っているとする。このとき、解は $T_{max}\equiv 1/k$ で爆発し、以下が成立する。

$$M\leqq\frac{1}{r^{N-2}}\int_{|x|<r}u(x,T_{max})dx\leqq 4\omega_N.$$

定理 11の後に述べた立場に立つと、定理 12 で得られた爆発解は大まかに言って $1/|x|^2$ 型の爆発解であると言える。その意味で、上の定理の不等式を満たす初期関数に対する解は $1/|x|^2$ 型の爆発解であると言える。従って、その意味で $1/|x|^2$ 型の爆発解は安定であると言える。

さらに、以下の定理では $1/|x|^2$ 型の爆発解と自己相似解の間に密接な関係がある事を示唆している。 ここで、$(\overline{u}, \overline{v})$ が (JL) with $\mu = 0$ の自己相似解であるとは、任意の正の数 T に対して

$$\begin{cases} u(x,t) = \dfrac{1}{T-t}\overline{u}\left(\dfrac{r}{\sqrt{T-t}}\right) \\ v(x,t) = \overline{v}\left(\dfrac{r}{\sqrt{T-t}}\right) \end{cases} \tag{1}$$

が (JL) with $\mu = 0$ の解になる事を言う。そのとき、以下の定理が成立する。

定理 13 *(i)* $3 \leqq N \leqq 9$ の時、無限個の *(JL) with* $\mu = 0$ の自己相似解が存在し、*(1)* で定義された解は $1/|x|^2$ 型の爆発をする。

(ii) $10 \leqq N$、少なくとも 1 個の *(JL) with* $\mu = 0$ の自己相似解が存在し、*(1)* で定義された解は $1/|x|^2$ 型の爆発をする。

参考文献

[1] H. Gajewski and K. Zacharias, *Global behaviour of a reaction - diffusion system modelling chemotaxis*, Math. Nachr. **195** (1998) 77-114.

[2] M.A. Herrero, E. Medina and J.J.L. Velázquez, *Finite-time aggregation into a single point in a reaction-diffusion system*, Nonlinearity **10** (1997) 1739-1754.

[3] M.A. Herrero, E. Medina and J.J.L. Velázquez, *Self-similar blow-up for a reaction-diffusion system*, J. Comp. Appl. Math. **97** (1998) 99-119.

[4] M.A. Herrero and J.J.L. Velázquez, *A blow-up mechanism for a chemotaxis model*, Ann. Scoula Norm. Sup. Pisa IV **35** (1997) 633-683.

[5] W. Jäger, and S. Luckhaus, *On explosions of solutions to a system of partial differential equations modelling chemotaxis*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 329 (1992), 819-824.

[6] E.F. Keller and L.A. Segel, *Initiation of slime mold aggregation viewd as an instability*, J. Theor. Biol. **26** (1970) 399-415.

[7] J. Moser, *A sharp form of an inequality by N. Trudinger*, Indiana Univ. Math. J. **20** (1971) 1077-1092.

[8] T. Nagai, *Blow-up of radially symmetric solutions to a chemotaxis system*, Adv. Math. Sci. Appl. **5** (1995) 581-601.

[9] T. Nagai, *Blow-up of nonradial solutions to parabolic-elliptic systems modeling chemotaxis in two-dimensional domains*, J. Inequal. Appl., Vol. 6 (2001), 37-55.

[10] T. Nagai, T, Senba, and T. Suzuki, *Chemotacitc collapse in a parabolic system of chemotaxis*, Hiroshima Math. J., **30** (3) (2000), 463–498.

[11] T. Nagai, T. Senba, and K. Yoshida, *Application of the Trudinger-Moser inequality to a parabolic system of chemotaxis*, Funckcial. Ekvac. **40** (1997) 411-433.

[12] V. Nanjundiah, *Chemotaxis, signal relaying, and aggregation morphology*, J. Theor. Biol. **42** (1973) 63-105.

[13] T. Senba and T. Suzuki, *Chemotactic collapse in a parabolic-elliptic system of mathematical biology*, Adv. Differential Equations, Vol. 6 (2001), 21-50.