

二人零和ロバストゲームの Nash 均衡の存在性について

(An existence of Nash equilibrium of robust two-person zero-sum game)

齋藤裕^{*}, 加藤志織, 荒谷洋輔[†], 木村寛[‡]

秋田県立大学システム科学技術学部

Yutaka Saito^{*}, Shiori Kato, Yousuke Araya[†], Yutaka Kimura[‡],
Faculty of Systems Science and Technology, Akita Prefectural University

1 はじめに

事象に不確実性があるとき、その不確実性によってもたらされる最悪の状況を想定し制御することで、事象の結果に何らかの保証を与えることができる。不確実性を変数として数理最適化に導入した手法に、不確実性の変数が常に最悪の状態を与えると仮定して最適化モデルを設計するロバスト最適化がある。ロバスト最適化で得られる最適値は不確実性による最悪の状態であるため、観測される値はそれよりも悪くなることはない。この性質をロバストネスと呼ぶ。

ロバストネスをゲームに導入した場合のゲームの解については Aghassi, Bertsimas([1]) 等で提案されている。西村、林、福島 ([2]) は N 人非協力ゲームモデルにロバストネスを導入した N 人非協力ロバストゲームとその均衡点について論じている。[2] では不確実性の入れ方を

- (a) ゲームの損失（利得）関数が不確実性をもつ
- (b) プレイヤーの戦略が不確実性をもつ

の二つの概念に分けて (a) と (b) それぞれに独立した不確実性変数を用意し、ゲームのモデルを表している。

本稿では二人零和ゲームに (a) の不確実性を導入した二人零和ロバストゲームについて、最適応答を用いたゲームの解（均衡点、鞍点）を定義し、二人非協力ロバストゲームの均衡点（ロバスト Nash 均衡点）との関係について述べ、どのようなときにその均衡点が存在するかを考察する。

^{*}yutakasai@akita-pu.ac.jp

[†]y-araya@akita-pu.ac.jp

[‡]yutaka@akita-pu.ac.jp

2 二人非協力ロバストゲーム

2.1 二人非協力ゲームとゲームの解

二人のプレイヤー P_X, P_Y がいて、各プレイヤーはそれぞれ戦略集合 X, Y をもつとする。各プレイヤーが自身の戦略集合から選択した戦略のペア $(x, y) \in X \times Y$ によって、各プレイヤーの損失が損失関数 $f_X, f_Y : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ によって定まる。各プレイヤーは自身の損失を最小にするように戦略を決定する。このようなゲームを二人非協力ゲームと呼ぶ。

プレイヤー P_X がプレイヤー P_Y の戦略 \bar{y} を知っていたとすると、プレイヤー P_X の選択する最適の選択を \bar{y} に対する P_X の最適応答と呼ぶ。 \bar{y} に対する P_X の最適応答全体の集合を集合写像

$$\operatorname{argmin}_{x \in X} f_X(x, \bar{y}) := \{\bar{x} \in X \mid f_X(\bar{x}, \bar{y}) \leq f_X(x, \bar{y}), x \in X\}$$

の形で定める。プレイヤー P_Y の最適応答全体の集合についても同様に

$$\operatorname{argmin}_{y \in Y} f_Y(\bar{x}, y) = \{\bar{y} \in Y \mid f_Y(\bar{x}, \bar{y}) \leq f_Y(\bar{x}, y), y \in Y\}$$

と書ける。最適応答を用いたゲームの解として次の Nash 均衡点が広く知られている。

定義 2.1 (二人非協力ゲームの Nash 均衡点) 戦略ペア $(\hat{x}, \hat{y}) \in X \times Y$ が Nash 均衡点であるとは、

$$\begin{aligned} \hat{x} &\in \operatorname{argmin}_{x \in X} f_X(x, \hat{y}) \quad \text{and} \\ \hat{y} &\in \operatorname{argmin}_{y \in Y} f_Y(\hat{x}, y) \end{aligned}$$

であるときにいう。

二人非協力ゲームに零和条件

$$f_X(x, y) + f_Y(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in X \times Y \quad (1)$$

を追加する。このゲームを二人零和ゲームと呼ぶ。このとき、 $f := f_X$ とおくと自動的に $-f = f_Y$ となり、1つの損失（利得）関数でゲームを記述できる。

命題 2.2 (二人零和ゲームの Nash 均衡 (鞍点)) 戦略ペア $(\hat{x}, \hat{y}) \in X \times Y$ が Nash 均衡であることと

$$f(\hat{x}, y) \leq f(\hat{x}, \hat{y}) \leq f(x, \hat{y}) \quad \forall (x, y) \in X \times Y \quad (2)$$

は同値である。特に、二人零和ゲームの Nash 均衡点を鞍点 (saddle point) と呼ぶ。

式 (2) は Nash 均衡を解析しやすい形に変えたもので、関連定理としてミニマックス定理、ラグランジュ関数の双対定理が挙げられる。

2.2 ロバストネスの導入

次に、ロバストネスを導入した二人非協力ゲームについて紹介する。これは [2] で提案されている N 人非協力ロバストゲームの、 $N = 2$ で戦略に不確実性がない場合である。まず、二人非協力ゲームの損失関数 f_X, f_Y に不確実性変数 $u \in U \subset \mathbb{R}^n$ を入れ

$$\begin{aligned} f_X &: X \times Y \times U \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{and} \\ f_Y &: X \times Y \times U \rightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

と再定義する。

定義 2.3 (二人非協力ロバストゲームの Nash 均衡点 [2]) 戦略ペア $(\hat{x}, \hat{y}) \in X \times Y$ がロバスト Nash 均衡点であるとは、

$$\begin{aligned} \hat{x} &\in \operatorname{argmin}_{x \in X} \sup_{u \in U} f_X(x, y; u) \quad \text{and} \\ \hat{y} &\in \operatorname{argmin}_{y \in Y} \sup_{u \in U} f_Y(x, y; u) \end{aligned}$$

であるときにいう。

十文字 ([3]) は、ロバストネスをもつ二人零和ゲームの零和条件として、 u が共通の場合に成り立つ零和条件

$$f_X(x, y; u) + f_Y(x, y; u) = 0 \quad \forall (x, y, u) \in X \times Y \times U \quad (3)$$

を追加した。このようなゲームを二人零和ロバストゲームと呼ぶことにする。

不確実性変数 u が各プレイヤーにとって最悪の動きをした場合を、それぞれ

$$\begin{aligned} f^*(x, y) &:= \sup_{u \in U} f_X(x, y; u) \quad \text{and} \\ -\hat{f}(x, y) &:= \sup_{u \in U} f_Y(x, y; u) \\ (\hat{f}(x, y) &= \inf_{u \in U} f_X(x, y; u)) \end{aligned}$$

とおく。 f^* はプレイヤー P_X が予測する損失関数で、不確実性によって f_X が最悪の値をとる時の関数である。同様に、 $-\hat{f}$ はプレイヤー P_Y が予測する損失関数を表している。(以下、プレイヤー P_Y が $-\hat{f}$ を最小化することを \hat{f} を最大化することとして論じる。) また、任意の $(x, y) \in X \times Y$ について $\hat{f}(x, y) \leq f^*(x, y)$ である。

二人零和ロバストゲームでは、実際に与えられるゲームの損失の値は零和条件を満たすが、各プレイヤーが最適応答を考慮する際に用いる f^* と \hat{f} の値は必ずしも零和とならないことを意味している。

両プレイヤーが情報として f^* と \hat{f} を知っているとき、仮に均衡解を (\hat{x}, \hat{y}) とすると、最適応答を考える際にあらわれる各プレイヤーの戦略についての不等式は次の 4 つである。

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{(iv)} & \text{(i)} \\
 f^*(\hat{x}, y) & \leq & f^*(\hat{x}, \hat{y}) \leq f^*(x, \hat{y}) \\
 \hat{f}(\hat{x}, y) & \leq & \hat{f}(\hat{x}, \hat{y}) \leq \hat{f}(x, \hat{y}) \\
 & \text{(ii)} & \text{(iii)}
 \end{array}$$

ただし $(x, y) \in X \times Y$ 。

このうち2つを用いて二人零和ロバストゲームの解（均衡点）として次を定義する。

定義 2.4 (ロバスト鞍点, [3]) 戦略ペア $(\hat{x}, \hat{y}) \in X \times Y$ がロバスト鞍点 (**robust saddle point**) であるとは、任意の $(x, y) \in X \times Y$ に対して

$$(i) \quad f^*(\hat{x}, \hat{y}) \leq f^*(x, \hat{y})$$

$$(ii) \quad \hat{f}(\hat{x}, y) \leq \hat{f}(\hat{x}, \hat{y})$$

であることをいう。

ロバスト鞍点全体の集合を S と表すことにする。ロバスト鞍点は二人零和ゲームのロバスト Nash 均衡と同値であることが直ちにわかる。

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{c} \hat{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in X} f^*(x, \hat{y}) \\ \text{and} \\ \hat{y} \in \operatorname{argmin}_{y \in Y} -\hat{f}(\hat{x}, y) \end{array} \right) & \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} f^*(\hat{x}, \hat{y}) \leq f^*(x, \hat{y}) \\ \text{and} \\ -\hat{f}(\hat{x}, \hat{y}) \leq -\hat{f}(\hat{x}, y) \end{array} \right) \quad \forall (x, y) \in X \times Y \\
 & \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} f^*(\hat{x}, \hat{y}) \leq f^*(x, \hat{y}) \\ \text{and} \\ \hat{f}(\hat{x}, y) \leq \hat{f}(\hat{x}, \hat{y}) \end{array} \right) \quad \forall (x, y) \in X \times Y
 \end{aligned}$$

次に、二人零和ロバストゲームの性質を用いて、ロバスト鞍点が沢山存在し戦略を決めかねる場合に、その中からより合理的な解（強いゲームの解）を選別する意思決定の規則を考える。通常二人零和ゲームでは各プレイヤーが“自身の損失を最小化”することと“相手の利得を最小化”することは同値であったが、二人零和ロバストゲームでは“自身の予想する最悪の損失を最小化”することと“相手の予想する最悪の利得を最小化”することは、自身の予想する最悪の損失 f^* と相手の予想する最悪の利得 \hat{f} が異なる関数のため同値ではない。この違いを数式によって表す。

$f^*(\hat{x}_1, \hat{y}) = f^*(\hat{x}_2, \hat{y})$ を満たす2つのロバスト鞍点 $(\hat{x}_1, \hat{y}), (\hat{x}_2, \hat{y}) \in S$ が存在する場合に、 P_X は \hat{x}_1, \hat{x}_2 からどちらを選べばよいかを考える。このとき、 f^* だけでは比較できないため、今プレイヤー P_X が持っている情報である \hat{f} を用いる。 \hat{f} の値がより小さい点を選べば“相手の予想する最悪の利得を最小化”することになる。これは (iii) の不等式にあたる。 P_Y の意思決定についても同じ規則を適用し、導出される均衡点を強ロバスト鞍点として定義する。

定義 2.5 (強ロバスト鞍点) 戦略ペア $(\hat{x}, \hat{y}) \in S$ が強ロバスト鞍点 (strong robust saddle point) であるとは、任意の $(x_s, y_s) \in S_{(\hat{x}, \hat{y})} := \{(x_s, y_s) \in S, (x_s, \hat{y}) \in S\}$ に対して

$$(iii)' \hat{f}(\hat{x}, \hat{y}) \leq \hat{f}(x_s, \hat{y})$$

$$(iv)' f^*(\hat{x}, y_s) \leq f^*(\hat{x}, \hat{y})$$

を満たすときという (図 1)。

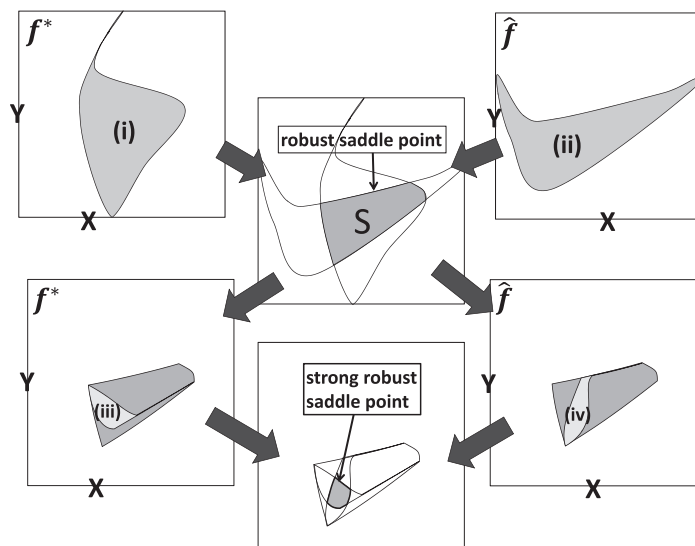


図 1: 強ロバスト鞍点のイメージ

強ロバスト鞍点は \mathbb{R}^2 上の辞書式順序 R :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a_1 < b_1 \text{ or} \\ a_1 = b_1 \text{ and } a_2 \leq b_2 \end{cases}$$

を用いて、次のようにも記述できる。

命題 2.6 $(\hat{x}, \hat{y}) \in X \times Y$ について、次の (a),(b) は同値である :

(a) 強ロバスト鞍点である ;

(b) 任意の $(x, y) \in X \times Y$ と $(x_s, y_s) \in S_{(\hat{x}, \hat{y})}$ に対して

$$\begin{pmatrix} f^*(\hat{x}, \hat{y}) \\ \hat{f}(\hat{x}, \hat{y}) \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} f^*(x, \hat{y}) \\ \hat{f}(x_s, \hat{y}) \end{pmatrix} \text{ かつ } \begin{pmatrix} \hat{f}(\hat{x}, y) \\ f^*(\hat{x}, y_s) \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} \hat{f}(\hat{x}, \hat{y}) \\ f^*(\hat{x}, \hat{y}) \end{pmatrix} \quad (4)$$

を満たす。

証明 まず、 $(\hat{x}, \hat{y}) \in X \times Y$ が強ロバスト鞍点であると仮定して (b) を示す。任意の $(x, y) \in X \times Y$ と $(x_s, y_s) \in S_{(\hat{x}, \hat{y})}$ に対して、強ロバスト鞍点の定義より $(\hat{x}, \hat{y}) \in S$ なので (i): “ $f^*(\hat{x}, \hat{y}) < f^*(x, \hat{y})$ または $f^*(\hat{x}, \hat{y}) = f^*(x, \hat{y})$ ” が成り立つ。また常に (iii)’ が成り立つため、条件 (4) の x, x_s を含む式が成り立つ。 y, y_s を含む式についても同様に成り立つため、条件 (4) が成り立つ。

次に、逆を示す。 $(\hat{x}, \hat{y}) \in X \times Y$ が任意の $(x, y) \in X \times Y$ と $(x_s, y_s) \in S_{(\hat{x}, \hat{y})}$ について (4) を満たすとする。(4) の各第一成分から $(\hat{x}, \hat{y}) \in S$ である。また、 $(x, y) = (\hat{x}, \hat{y})$ と固定すると、第二成分から (iii)’, (iv)’ が成り立つ。よって $(\hat{x}, \hat{y}) \in X \times Y$ は強ロバスト鞍点である。 ■

ここで、ベクトル最適化で用いられる \mathbb{R}^2 上の凸錐 C によるベクトル順序

$$a \leq_C b \stackrel{\text{def}}{\iff} b - a \in C \quad (\forall a, b \in \mathbb{R}^2)$$

を導入する。 $\mathbb{R}_+ := \{r \in \mathbb{R} : r \geq 0\}$, $\mathbb{R}_{++} := \{r \in \mathbb{R} : r > 0\}$ とおいて、凸錐 $C = (\mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R}_+)$ ととると、辞書式順序 R はベクトル順序 \leq_C と同値になる。凸錐 $C = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ (第一象限と第四象限の和集合) に対して、 R を \leq_C で置き換えると条件 (4) を満たす点 (\hat{x}, \hat{y}) はロバスト鞍点である (図 2)。

最後に、強ロバスト鞍点が存在するための条件を示す。二人零和ロバストゲームにおいてロバスト Nash 均衡とロバスト鞍点は同値であるため、[2] の定理 3.1 にある N 人非協力ロバストゲームのロバスト Nash 均衡の存在定理から、ロバスト鞍点の存在性の十分条件の一つがわかる。

強ロバスト鞍点は (iii)', (iv)' が成り立つ点すなわち S 上で (iii), (iv) を満たす点である。よって、ロバスト鞍点が存在するための十分条件に加え、各プレイヤーが最適応答に用いる損失関数 f^* と \hat{f} を入れ替えたときに S 上でそれらについてロバスト鞍点が存在するための十分条件を与えればよい。

定理 2.8 (強ロバスト鞍点の存在性) $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ とする。

- (a) $f_X, f_Y: X \times Y \times U$ 上で連続な関数。
- (b) X, Y : 空でない凸コンパクト集合。
- (c) U : 空でないコンパクト集合。
- (d) $(x, y) \in X \times Y$ を固定した時、 $f^*(\cdot, y), \hat{f}(\cdot, y)$: 凸関数、 $f^*(x, \cdot), \hat{f}(x, \cdot)$: 凹関数。
- (e) S : 凸集合。

このとき、強ロバスト鞍点が存在する。

証明 (a), (b), (c), (d) から、[2] の定理 3.1 を用いるとロバスト Nash 均衡点 (i.e. ロバスト鞍点) が存在することがわかる。このことと (a), (b), (c), (e) と argmin の性質から、ロバスト鞍点全体の集合 S は空でない凸コンパクト集合である。

S 上に各プレイヤーが参照する損失関数 f^* と \hat{f} を入れ替えた部分ゲームをとる。(a),(c),(d) と S が凸コンパクトであることから再度 [2] の定理 3.1 より部分ゲームのロバスト鞍点が存在することがわかる。

この部分ゲームのロバスト鞍点は元のゲームの強ロバスト鞍点である。 ■

3 おわりに

本稿では二人零和ゲームにロバストネスを入れた二人零和ロバストゲームについて、損失関数に不確実性変数を与えたゲームとして定め、各プレイヤーの最適応答に従ってゲームの解をロバスト鞍点と強ロバスト鞍点として提案した。さらにロバスト鞍点がロバスト Nash 均衡点と同値であることと、強ロバスト鞍点が存在する十分条件を示した。

参考文献

- [1] M. Aghassi, D. Bertsimas, *Robust Game theory*, Mathematical Programming, 107 (2006), pp.231–273.
- [2] R. Nishimura, S. Hayashi, M. Fukushima, N 人非協力ゲームに対するロバスト Nash 均衡, 京都大学数理解析研究所講究録, 1584 (2008), pp.149–161.
- [3] M. Jumonji, 二人ゼロ和ゲームにおけるロバスト均衡解について, 秋田県立大学, (2013).