数理解析研究所講究録 第2126巻 2019年 87-92

ファジィ集合最適化問題について

弘前大学 大学院 理工学研究科　金 正道 (Masamichi KON)
Graduate School of Science and Technology, Hirosaki University

概要

ファジィ集合値目的写像をもつ制約付最適化問題をファジィ集合最適化問題とよぶ。本稿では、m 次元ユークリッド空間上のファジィ集合値目的写像をもつファジィ集合最適化問題およびそれに対応する 1 次元ユークリッド空間上のファジィ集合値目的写像をもつファジィ集合最適化問題を考え、それらの問題の弱非劣解の間の関係を与える。

1　準備

$a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ に対して、$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$, $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$, $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ および $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ とする。また便宜上、$\inf \emptyset = \infty$ および $\sup \emptyset = -\infty$ とする。

$A \subset \mathbb{R}^n$ に対して、$\mathrm{int}(A)$ を A の内部とする。$\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ を $\mathbb{R}^n$ のすべてのコンパクト集合の集合とする。$\mathbb{R}^n_+ = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$ および $\mathbb{R}^n_- = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{0}\}$ とする。$A, B \subset \mathbb{R}^n$ に対して、$A + B = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} : \boldsymbol{x} \in A, \boldsymbol{y} \in B\}$ とする。

次に、集合の順序の概念を導入する。

定義 1　$A, B \subset \mathbb{R}^n$ とする。

(i) $B \subset A + \mathbb{R}^n_+$ であるとき、$A \leq_L B$ と表す。
(ii) $A \subset B + \mathbb{R}^n_-$ であるとき、$A \leq_U B$ と表す。
(iii) $A \leq_L B, A \leq_U B$ であるとき、$A \leq B$ と表す。
(iv) $B \subset A + \mathrm{int}(\mathbb{R}^n_+)$ であるとき、$A <_L B$ と表す。
(v) $A \subset B + \mathrm{int}(\mathbb{R}^n_-)$ であるとき、$A <_U B$ と表す。
(vi) $A <_L B, A <_U B$ であるとき、$A < B$ と表す。

次の補題 1 は、定義 1 における順序の基本的な性質を与える。

補題 1　$A, B, C \subset \mathbb{R}^n$ に対して、次が成り立つ。

(i) $A \leq A$
(ii) $A \leq_L B, B \leq_L C \Rightarrow A \leq_L C$
(iii) $A \leq_U B, B \leq_U C \Rightarrow A \leq_U C$
(iv) $A \leq B, B \leq C \Rightarrow A \leq C$
(v) $A <_L B \Rightarrow A \leq_L B$
(vi) $A <_U B \Rightarrow A \leq_U B$
(vii) $A < B \Rightarrow A \leq B$
(viii) $A = \emptyset, B \neq \emptyset \Rightarrow A \not\leq_L B, B \leq_L A, A \leq_U B, B \not\leq_U A, A \not<_L B, B <_L A, A <_U B, B \not<_U A$
(ix) $\emptyset \leq \emptyset, \emptyset < \emptyset, \mathbb{R}^n \leq \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n < \mathbb{R}^n$

$\boldsymbol{k} \in \mathrm{int}(\mathbb{R}^n_+)$ を固定する。各 $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して

$$s_L(A;\boldsymbol{k}) = \inf\{t \in \mathbb{R} : A \leq_L \{t\boldsymbol{k}\}\} = \inf\{t \in \mathbb{R} : \{t\boldsymbol{k}\} \subset A + \mathbb{R}^n_+\} \tag{1}$$

$$s_U(A;\boldsymbol{k}) = \inf\{t \in \mathbb{R} : A \leq_U \{t\boldsymbol{k}\}\} = \inf\{t \in \mathbb{R} : A \subset t\boldsymbol{k} + \mathbb{R}^n_-\} \tag{2}$$

$$I_A = [s_L(A;\boldsymbol{k}), s_U(A;\boldsymbol{k})] \tag{3}$$

とする。(1) および (2) は、[9] およびその参考文献参照。$s_L(A;\boldsymbol{k}), s_U(A;\boldsymbol{k})$ は $-\infty, \infty$ を許す A のスカラー化を意味し、I_A は A の 1 次元の区間化を意味する。また

$$s_L(A;\boldsymbol{k}) = \inf\{t \in \mathbb{R} : A \cap (t\boldsymbol{k} + \mathbb{R}^n_-) \neq \emptyset\}$$

となる。$A = \emptyset$ ならば、$s_L(A;\boldsymbol{k}) = \inf \emptyset = \infty$, $s_U(A;\boldsymbol{k}) = \inf \mathbb{R} = -\infty$ となり、$I_A = \emptyset$ となる。$A \neq \emptyset$ ならば、$s_L(A;\boldsymbol{k}) < \infty$, $s_U(A;\boldsymbol{k}) > -\infty$ となる。

次の補題 2 – 4 は、s_L および s_U の性質を与える。

補題２　$\boldsymbol{k} \in \mathrm{int}(\mathbb{R}^n_+)$ とし、$A, B \subset \mathbb{R}^n$ とする。

(i) $A \neq \emptyset \Leftrightarrow s_L(A;\boldsymbol{k}) \leq s_U(A;\boldsymbol{k})$
(ii) $A \subset B \Rightarrow s_L(A;\boldsymbol{k}) \geq s_L(B;\boldsymbol{k}), s_U(A;\boldsymbol{k}) \leq s_U(B;\boldsymbol{k})$

補題３（[9, Theorems 3.2 and 3.3]）$\boldsymbol{k} \in \mathrm{int}(\mathbb{R}^n_+)$ とし、$A, B \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ とする。

(i) $A \leq_L B \Rightarrow s_L(A;\boldsymbol{k}) \leq s_L(B;\boldsymbol{k}) \Leftrightarrow I_A \leq_L I_B$
(ii) $A \leq_U B \Rightarrow s_U(A;\boldsymbol{k}) \leq s_U(B;\boldsymbol{k}) \Leftrightarrow I_A \leq_U I_B$
(iii) $A = B = \emptyset$ でないとする。

$$A <_L B \Rightarrow s_L(A;\boldsymbol{k}) < s_L(B;\boldsymbol{k}) \Leftrightarrow I_A <_L I_B$$

(iv) $A = B = \emptyset$ でないとする。

$$A <_U B \Rightarrow s_U(A;\boldsymbol{k}) < s_U(B;\boldsymbol{k}) \Leftrightarrow I_A <_U I_B$$

補題４ $\boldsymbol{k} \in \mathrm{int}(\mathbb{R}^n_+)$ とする。また、Λ を任意の添字集合とし、$A_\lambda \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n), \lambda \in \Lambda$ とする。さらに、任意の $\lambda, \mu \in \Lambda$ に対して、$A_\lambda \subset A_\mu$ または $A_\lambda \supset A_\mu$ であるとする。

(i) $s_L\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda;\boldsymbol{k}\right) = \sup_{\lambda\in\Lambda} s_L(A_\lambda;\boldsymbol{k})$

(ii) $s_U\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda;\boldsymbol{k}\right) = \inf_{\lambda\in\Lambda} s_U(A_\lambda;\boldsymbol{k})$

2　ファジィ集合

$\widetilde{a} : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ を $\mathbb{R}^n$ 上の**ファジィ集合**とよぶ。$\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ を $\mathbb{R}^n$ 上のすべてのファジィ集合の集合とする。

$\widetilde{a} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ とする。各 $\alpha \in]0,1]$ に対して、$[\widetilde{a}]_\alpha = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \widetilde{a}(\boldsymbol{x}) \geq \alpha\}$ を $\widetilde{a}$ の **α-レベル集合**という。$\widetilde{a}$ が**コンパクトファジィ集合**であるとは、任意の $\alpha \in]0,1]$ に対して $[\widetilde{a}]_\alpha$ がコンパクト集合であるときをいう。$\mathcal{FC}(\mathbb{R}^n)$ を $\mathbb{R}^n$ 上のすべてのコンパクトファジィ集合の集合とする。

$\widetilde{a} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ とする。$\widetilde{a}$ は

$$\widetilde{a} = \sup_{\alpha\in]0,1]} \alpha c_{[\widetilde{a}]_\alpha} \tag{4}$$

と表せることが**分解定理**として知られている [1]。ここで、$A \subset \mathbb{R}^n$ に対して、$c_A : \mathbb{R}^n \to \{0,1\}$ は A の指示関数であり、各 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して、$\boldsymbol{x} \in A$ ならば $c_A(\boldsymbol{x}) = 1$ および $\boldsymbol{x} \notin A$ ならば $c_A(\boldsymbol{x}) = 0$ と定義される。

次に

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{\{S_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]} : S_\alpha \subset \mathbb{R}^n, \alpha \in]0,1] \text{ であり、}\\ \beta, \gamma \in]0,1], \beta < \gamma \text{ ならば } S_\beta \supset S_\gamma\}\end{aligned} \tag{5}$$

とし、各 $\{S_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$M_{\mathbb{R}^n}(\{S_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]}) = \sup_{\alpha\in]0,1]} \alpha c_{S_\alpha} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \tag{6}$$

とする。$M_{\mathbb{R}^n}$ を単に M とも表す。

次の補題５は、(6) において定義されるファジィ集合のレベル集合の性質を与える。

補題 5（[4, Proposition 4]）$\{S_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ とし、$\widetilde{a} = M(\{S_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]})$ とする。このとき、任意の $\alpha \in]0,1]$ に対して、$[\widetilde{a}]_\alpha = \cap_{\beta\in]0,\alpha[} S_\beta$ となる。

$\widetilde{a} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ とし、$\boldsymbol{k} \in \mathrm{int}(\mathbb{R}^n_+)$ とする。$\{[\widetilde{a}]_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ であるので、補題 2 (ii) より、$\{I_{[\widetilde{a}]_\alpha}\}_{\alpha\in]0,1]} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ となる。このとき

$$\widetilde{a}_I = M(\{I_{[\widetilde{a}]_\alpha}\}_{\alpha\in]0,1]}) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \tag{7}$$

とする。

次の定理 1 は、(7) において定義されるファジィ集合のレベル集合の性質を与える。

定理 1　$\widetilde{a} \in \mathcal{FC}(\mathbb{R}^n)$ とし、$\boldsymbol{k} \in \mathrm{int}(\mathbb{R}^n_+)$ とする。このとき、任意の $\alpha \in]0,1]$ に対して、$[\widetilde{a}_I]_\alpha = I_{[\widetilde{a}]_\alpha}$ となる。

次に、$\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ 上の順序を導入する。

定義 2（[5, Definition 5.1]）$\widetilde{a}, \widetilde{b} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ とする。

(i) 任意の $\alpha \in]0,1]$ に対して $[\widetilde{a}]_\alpha \leq [\widetilde{b}]_\alpha$ であるとき、$\widetilde{a} \preceq \widetilde{b}$ と表す。
(ii) 任意の $\alpha \in]0,1]$ に対して $[\widetilde{a}]_\alpha < [\widetilde{b}]_\alpha$ であるとき、$\widetilde{a} \prec \widetilde{b}$ と表す。

定義 2 における $\preceq$ および $\prec$ をそれぞれ $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ 上の**ファジィマックス順序**および**狭義ファジィマックス順序**とよぶ。

次の補題 6 は、（狭義）ファジィマックス順序の基本的な性質を与える。

補題 6（[5, Proposition 5.1]）$\widetilde{a}, \widetilde{b}, \widetilde{c}, \widetilde{d} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ とする。

(i) $\widetilde{a} \preceq \widetilde{a}$
(ii) $\widetilde{a} \preceq \widetilde{b}, \widetilde{b} \preceq \widetilde{c} \Rightarrow \widetilde{a} \preceq \widetilde{c}$
(iii) $\widetilde{a} \prec \widetilde{b} \Rightarrow \widetilde{a} \preceq \widetilde{b}$

3　ファジィ集合最適化

$X \subset \mathbb{R}^n, X \neq \emptyset$ および $\widetilde{F} : \mathbb{R}^n \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ に対して、問題

$$\text{(FOP)} \qquad \left|\begin{array}{ll} \min & \widetilde{F}(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{x} \in X \end{array}\right.$$

を**ファジィ集合最適化問題**とよぶ。

次に、(FOP) の解概念を導入する。

定義3 $\boldsymbol{x}^* \in X$ が問題 (FOP) の**弱非劣解**であるとは、$\widetilde{F}(\boldsymbol{x}) \prec \widetilde{F}(\boldsymbol{x}^*)$ となる $\boldsymbol{x} \in X$ が存在しないときをいう。

$\boldsymbol{k} \in \mathrm{int}(\mathbb{R}^m_+)$ とする。ファジィ集合最適化問題 (FOP) における $\widetilde{F} : \mathbb{R}^n \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ に対して、$\widetilde{G} : \mathbb{R}^n \to \mathcal{F}(\mathbb{R})$ を各 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\widetilde{G}(\boldsymbol{x}) = \widetilde{F}(\boldsymbol{x})_I \tag{8}$$

と定義する。$\widetilde{G}$ は $\boldsymbol{k}$ に依存することに注意。次のファジィ集合最適化問題

$$\text{(FOP')} \qquad \left| \begin{array}{ll} \min & \widetilde{G}(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{x} \in X \end{array} \right.$$

を考える。

次の定理2は、(FOP) の弱非劣解 と (FOP') の弱非劣解の間の関係を与える。

定理2 $\boldsymbol{k} \in \mathrm{int}(\mathbb{R}^m_+)$ とする。(FOP) において、任意の $\boldsymbol{x} \in X$ に対して $\widetilde{F}(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{FC}(\mathbb{R}^m)$ であるとする。このとき、$\boldsymbol{x}^* \in X$ が (FOP') の弱非劣解ならば、$\boldsymbol{x}^*$ は (FOP) の弱非劣解になる。

4　結論

本稿では、m 次元ユークリッド空間上のファジィ集合値目的写像をもつファジィ集合最適化問題 (FOP) が考えられた。まず、集合のスカラー化の性質について調べた。次に、集合のスカラー化を用いて、m 次元ユークリッド空間上のファジィ集合値目的写像をもつファジィ集合最適化問題 (FOP) に対応する 1 次元ユークリッド空間上のファジィ集合値目的写像をもつファジィ集合最適化問題 (FOP') を導いた。そして、それらの問題の弱非劣解の間の関係を与えた。得られた結果より、1 次元ユークリッド空間上のファジィ集合値目的写像をもつファジィ集合最適化問題 (FOP') の弱非劣解を求めることによって、もとの m 次元ユークリッド空間上のファジィ集合値目的写像をもつファジィ集合最適化問題 (FOP) の弱非劣解が求められる。

参考文献

[1] D. Dubois, W. Ostasiewicz and H. Prade, Fuzzy sets: history and basic notions, In D. Dubois, and H. Prade (Eds.), Fundamentals of Fuzzy Sets, Kluwer, 2000, pp. 21–124.

[2] H. Hernández and L. Rodríguez-Marín, Nonconvex scalarization in set optimization with set-valued maps, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol.325, 2007, pp.1–18.

[3] J. Jahn and T.X.D. Ha, New order relations in set optimization, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol.148, 2011, pp.209–236.

[4] M. Kon, On degree of non-convexity of fuzzy sets, Scientiae Mathematicae Japonicae, Vol.76, 2013, pp.417–425.

[5] M. Kon, Operation and ordering of fuzzy sets, and fuzzy set-valued convex mappings, Journal of Fuzzy Set Valued Analysis (2014), Article ID jfsva-00202, 17 pages.

[6] M. Kurano , M. Yasuda, J. Nakagami, Y. Yoshida, Ordering of convex fuzzy sets—a brief survey and new results, Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol.43, 2000, pp.138–148.

[7] D. Kuroiwa, T. Tanaka, T.X.D. Ha, On cone convexity of set-valued maps, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, Vol.30, 1997, pp.1487–1496.

[8] T. Maeda, On characterization of fuzzy vectors and its applications to fuzzy mathematical programming problems, Fuzzy Sets and Systems, Vol.159, 2008, pp.3333–3346.

[9] T. Maeda, On optimization problems with set-valued objective maps: existence and optimality, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol.153, 2012, pp.263–279.

[10] J. Ramík, J. Řimánek, Inequality relation between fuzzy numbers and its use in fuzzy optimization, Fuzzy Sets and Systems, Vol.16, 1985, pp.123–138.

[11] L. A. Zadeh, Fuzzy sets, Information and Control, Vol.8, 1965, pp.338–353.