数理解析研究所講究録 第2126巻 2019年 122-127

Sperner の補題に基づく離散不動点定理
Discrete fixed point theorems based on Sperner's lemma

川崎英文 *
HIDEFUMI KAWASAKI †
九州大学大学院数理学研究院
FACULTY OF MATHEMATICS, KYUSHU UNIVERSITY

Abstract

Sperner's lemma is a ccombinatorial variant of Brouwer's fixed point theorem. In this paper we present a discrete fixed point theorem by combining Sperner's lemma and the direction preseving condition. Our claim is that one of the vertices of any completely labeled subsimplex is a fixed point for a suitable labeling.

1 Sperner の補題

Sperner の補題 [1, 1928] は Brouwer の不動点定理の離散版であり，一方から他方を比較的容易に導くことができる．本稿では，Sperner の補題と方向保存条件（飯村 [2]）を組合せることにより離散不動点定理を与える．

n-単体 $|a^0\,a^1\cdots a^n|$ の単体分割の頂点集合を V とするとき，V の各点に $0,1,\ldots,n$ の何れかの番号をふることを**ラベリング**とよぶ．特に，$v\in V$ を含む最小の単体を $|a^{i_0}\cdots a^{i_k}|$ とするとき，$I(v)=\{i_0,\ldots,i_k\}$ のどれかの番号をふることを**適切なラベリング**（proper labeling）とよぶ．また，$n+1$ 個の頂点に 0 から n のすべてのラベルが丁度ひとつずつついている n-小単体を**完全ラベル小単体**とよぶ.

定理 1 （Sperner の補題）n-単体の任意の単体分割の頂点集合に適切なラベリングが与えられたとき，完全ラベル小単体の個数は奇数である．

Sperner の補題を用いて Brouwer の不動点定理を証明する際にラベル (1) を用いる．本稿ではそのラベルを利用する．

---

*kawasaki@math.kyushu-u.ac.jp
†本研究は JSPS 科研費 JP16K05278 の助成を受けている．

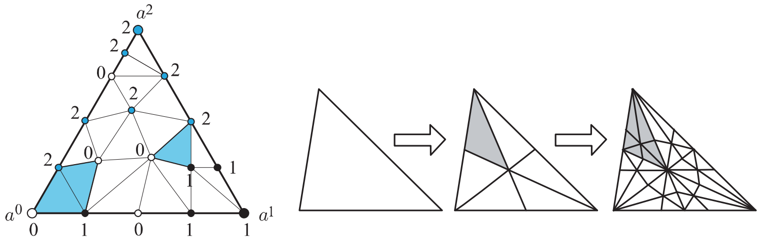

図 1: 適切なラベリングと完全ラベル小単体．重心細分

Brouwer の不動点定理の証明の粗筋：f を標準単体 $\Delta^n := |e^0 e^1 \cdots e^n|$ からそれ自身への連続写像とする．メッシュ幅が $1/N$ で押さえられるように，Δ^n の重心細分を繰り返しとり，その頂点 $v = (v_0, \ldots, v_n)$ のラベル $L(v)$ を次式で定める．

$$L(v) := \min\{i \in I(v) \mid d_i(v) \leq d_j(v)\ \forall j \in I(v)\}. \tag{1}$$

ただし，$I(v) = \{i \mid v_i > 0\}$, $d_i(v) = f_i(v) - v_i$ とする．ラベルは $I(v)$ の中から選んでいるので，L は適切なラベリングであり，Sperner の補題により完全ラベル小単体 σ_N が存在する．$\{(\sigma_N)\}_{N=1}^{\infty}$ の集積点が f の不動点になることを示せばよい．∎

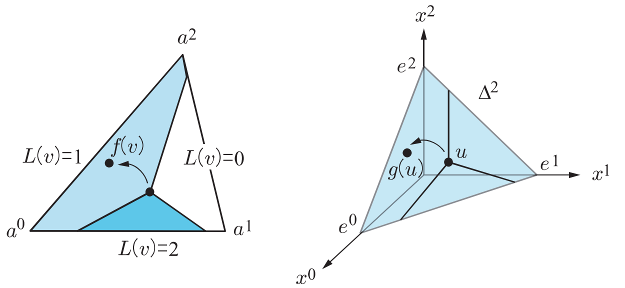

図 2: ラベリング $L(v)$ と Δ から Δ^2 への変換

2　完全ラベル小単体の頂点と不動点

前節では極限操作 $N \to \infty$ をおこない不動点の存在を示したが，方向保存条件[1)]を加えることにより，極限操作をとることなく，完全ラベル小単体の頂点のひとつが不動点であることを示すことができる．

最初に，標準 n-単体 $\Delta^n = |e^0 \cdots, e^n|$ の任意の単体分割をとり，その頂点集合 U^n からそれ自身への写像を考える．ここで，2 頂点 $u, u' \in U^n$ は，同一の小単体の頂点であるとき，**隣接する**と言い $u \sim u'$ で表す．

1) 飯村 [2] の定義を少し緩めた．

定理 2 標準 n-単体 Δ^n の任意の単体分割に対し，写像 $g: U^n \to U^n$ が方向保存条件：

$$u \sim u' \;\Rightarrow\; (g_i(u) - u_i)(g_i(u') - u'_i) \geq 0 \;(0 \leq i \leq n)$$

を満たすならば，ラベリング (1) に対するどの完全ラベル小単体も，その頂点のひとつは不動点である．ただし，$d_i(u) := g_i(u) - u_i$ とする．

証明．完全ラベル小単体 $|u^0 u^1 \cdots u^n|$ に対して，頂点の名前を変更することにより，$L(u^i) = i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ と仮定しても一般性を失わない．

$$f(u^i) - u^i =: d^i = (d^i_0, d^i_1, \ldots, d^i_n)$$

とおくとき，$f(u^i)$ も u^i も Δ^n の点なので，どちらも成分和は 1 である．よって，点 d^i の成分和は 0 になる．

<u>Case 1</u>: $d^i_i \geq 0$ なる i がある場合．$L(u^i)$ の定義から，d^i の成分はすべて非負となり，u^i は f の不動点でなければならない．<u>Case 2</u>: d^i_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ がすべて負の場合．任意の $j \neq i$ は任意で $u^i \sim u^j$ なので，方向保存条件

$$(f_i(u^i) - u^i_i)(f_i(u^j) - u^j_i) \geq 0 \quad i.e. \quad d^i_i d^j_i \geq 0$$

から $d^j_i = f_i(u^j) - u^j_i \leq 0$ となる．故に d^j は自明でない非正ベクトルである．これはその成分和が 0 であることに矛盾である．つまり，Case 1 のみが起きる．∎

一般の n-単体についても，定理 3 と同様のことが成立する．

定理 3 $a^0, \ldots, a^n$ を $\mathbb{R}^{n+1}$ の 1 次独立なベクトルとして，それらを列ベクトルとする $n+1$ 次正方行列を A とする．n-単体 $\Delta = |a^0 a^1 \cdots a^n|$ の任意の単体分割に対して，その頂点集合を V^n, $A^{-1}(V^n)$ を U^n とおく．写像 $f: V^n \to V^n$ と頂点 $v \in V^n$ に対して，$A^{-1}(f(v) - v)$ の第 i 成分を $d_i(v)$ とおくとき，写像 f が方向保存条件

$$v \sim v' \;\Rightarrow\; d_i(v) d_i(v') \geq 0 \quad (0 \leq i \leq n)$$

を満たすならば，$u := A^{-1}v$, $I(u) = \{i \mid u_i > 0\}$ として，ラベリング

$$L(v) := \min\{i \in I(u) \mid d_i(v) \leq d_j(v) \; \forall j \in I(u)\}$$

に対するどの完全ラベル小単体も，その頂点のひとつは不動点である．

証明．線形写像 Ax は標準 n-単体 Δ^n の頂点 e^i を n-単体 Δ の頂点 a^i に写し，その逆写像は Δ の単体分割を Δ^n の単体分割に写す．特に，頂点集合 V^n を頂点集合 $U^n := A^{-1}(V^n)$ に写すので，$g(u) := A^{-1}f(Au)$ は U^n から U^n への全単射であり，f と g の不動点は

$$g(u) = u \quad \Leftrightarrow \quad f(Au) = Au$$

なる関係で互いに移り合う．$v := Au$ とおけば，$g(u) - u = A^{-1}(f(v) - v)$ となる．また，$u \sim u'$ と $v \sim v' := Au'$ は同値なので，g の方向保存条件は

$$v \sim v' \;\Rightarrow\; (A^{-1}(f(v) - v))_i (A^{-1}(f(v') - v'))_i \geq 0$$

と言い換えることができる．同様に，g によるラベリングは，

$$\min\{i \in I(u) \mid (A^{-1}(f(v)-v))_i \leq (A^{-1}(f(v)-v))_j \ \forall j \in I(u)\}$$

と表される．このラベリングによる Δ^n における完全ラベル小単体を逆写像 A^{-1} で写したものは Δ における完全ラベル小単体なので，定理 3 により，後者の頂点のひとつは f の不動点である．∎

定理 3 で仮定した $a^0, \ldots, a^n$ の 1 次独立性は取り除くことができる．

定理 4 $a^0, \ldots, a^n$ を $\mathbb{R}^{n+1}$ のアフィン独立なベクトルとして，それらが 1 次独立でない場合は，それらに 1 次従属でないベクトル b をとり，$a^i - b$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ を列ベクトルとする $n+1$ 次正方行列を B とする．n-単体 $\Delta = |a^0\, a^1 \cdots a^n|$ の任意の単体分割に対して，その頂点集合を V^n，$\{B^{-1}(v-b) \mid v \in V^n\}$ を U^n とおく．写像 $f : V^n \to V^n$ と $v \in V^n$ に対して，$B^{-1}(f(v)-v)$ の第 i 成分を $d_i(v)$ とおくとき，写像 f が

$$v \sim v' \ \Rightarrow \ d_i(v)d_i(v') \geq 0 \quad (0 \leq i \leq n)$$

を満たすならば，$u := B^{-1}(v-b)$, $I(u) = \{i \mid u_i > 0\}$ として，ラベリング

$$L(v) := \min\{i \in I(u) \mid d_i(v) \leq d_j(v) \ \forall j \in I(u)\}$$

に対するどの完全ラベル小単体も，その頂点のひとつは不動点である．

証明．アフィン写像 $\varphi(u) := Bu + b$ は標準 n-単体 Δ^n の頂点 e^i を n-単体 Δ の頂点 a^i に写し，逆写像 $\varphi^{-1}(v) = B^{-1}(v-b)$ は Δ の単体分割を Δ^n の単体分割に写す．特に，頂点集合 V^n を頂点集合 $U^n = \{B^{-1}(v-b) \mid v \in V^n\}$ に写す．以下，定理 3 の証明と同様である．∎

3 弱い方向保存条件

Yang は弱い方向保存条件（loccaly gross direction preserving condition）

$$v \sim v' \ \Rightarrow \ (f(v)-v)^T(f(v')-v') \geq 0 \tag{2}$$

の下で離散不動点定理を与えた．明らかに，方向保存条件から弱い方向保存条件が導かれる．

定理 5 （Yang [3]）f を単体複体の頂点集合 X からそれ自身への写像とする．写像 f が弱い方向保存条件 (2) を満たすならば，f は不動点をもつ．

Sperner の補題と弱い方向保存条件の組合せでは，限定的な結果しか得られていない．本稿の証明は [4] の証明を簡潔にしたものである．

命題 1 （川崎，桐山 [4]）写像 $g : U^2 \to U^2$ が弱い方向保存条件を満たすならば，ラベリング (1) によるどの完全ラベル小三角形についても，その頂点のひとつは不動点である．

証明. Spernerの補題により，完全ラベル小単体が存在し，それを $|v^0v^1v^2|$ とする．ここで，$L(v^i) = i\ (i = 0,1,2)$ と仮定してよい．$f(v^i) - v^i =: d^i = (d^i_0, d^i_1, d^i_2)$ の成分和は 0 なので，v^0, v^1, v^2 の何れも不動点でなければ，L の定義から $d^0_0,\ d^1_1,\ d^2_2 < 0$ となる．次に，内積 $d^i \cdot d^j$ が非負であることから矛盾を導くが，$d^0_0 = d^1_1 = d^2_2 = -1$ と仮定しても一般性を失わないので，

$$d^0 = (-1, a, b), \quad d^1 = (t, -1, s), \quad d^2 = (x, y, -1)$$

とおいてよい．また，d^0 については $-1 \le a \le b$ と仮定してかまわない．もし $a \le 0$ ならば

$$0 \le d^0 \cdot d^2 = -x + ay - b \le 1 - a - b = 0.$$

よって，不等式は等号で成立し，$x = -1$, $a(y+1) = 0$ となり，d^2 の成分和が 0 であることから，$d^2 = (-1, 2, 1)$ が得られる．よって，

$$0 \le d^1 \cdot d^2 = -t - 2 - s = -3$$

となり，仮定 $a \le 0$ は否定された．d^1, d^2 についても同様なので，a, b, s, t, x, y はすべて正である．ところが

$$0 \le d^0 \cdot d^2 = -x + ay - b < a(y-1) = -ax < 0$$

と矛盾が導かれる．故に d^0, d^1, d^2 のどれかは $\mathbf{0}$ でなければならない．∎

注意 1 $n = 3$ の場合は，命題 1 の証明方法では上手くいかない．実際，$n = 2$ の場合をまねてベクトル $d^i\ (i = 0,1,2,3)$ を用意したとき，もし完全ラベル小単体のどの頂点も不動点でなければ，どの d^i も $\mathbf{0}$ ベクトルではなく，成分和が 0 なので

$$\begin{aligned} d^0 &= (-1,\ a,\ b,\ c) \\ d^1 &= (g,\ -1,\ e,\ f) \\ d^2 &= (t,\ u,\ -1,\ s) \\ d^3 &= (x,\ y,\ z,\ -1) \end{aligned}$$

とおくことができる．どの 2 つのベクトルも内積が 0 以上であることが弱い方向保存条件であり，この条件から矛盾を導きたいのであるが，

$$\begin{aligned} d^0 &= (-1,\ 0,\ 0,\ 1) \\ d^1 &= (-1,\ -1,\ 1,\ 1) \\ d^2 &= (-1,\ 1,\ -1,\ 1) \\ d^3 &= (-1,\ 1,\ 1,\ -1) \end{aligned}$$

は以下の通り弱い方向保存条件を満たす.

$$d^3 \perp \mathrm{span}\{d^0, d^1, d^2\}, \quad d^1 \cdot d^2 = 0, \quad d^0 \cdot d^1 = d^0 \cdot d^2 = 2.$$

参　考文献

[1] Von E. Sperner, Neuer Beweis für die invarianz der dimensionszahl und des Gebietes, Hamburg, Mathematisches Seminar, (1928) 265–272.

[2] T. Iimura, A discrete fixed point theorem and its applications, *J. Math. Econom.*, **39** (2003) 725–742.

[3] Z. Yang, Discrete fixed point analysis and its applications, *J. of fixed point theory and applications*, **6** (2009) 351-371.

[4] H. Kawasaki and S. Hashiyama, A discrete fixed point theorem utilizing the directionn preserving condition, *J. of Nonlinear and Convex Analysis*, **18**, (2017) 1535–1545.