数理解析研究所講究録 第2127巻 2019年 7-19

箙を用いたダイナミカル・ヤン・バクスター写像へのアプローチ

芝浦工業大学　教育イノベーション推進センター
松本ディオゴけんじ
Matsumoto Diogo Kendy
Center for Promotion of Educational Innovation,
Shibaura Institute of Technology*

概 要

ダイナミカル・ヤン・バクスター写像の圏論的な枠組みとなるダイナミカル集合の圏が箙の圏に埋め込めることを示し，ダイナミカル・ヤン・バクスター写像が箙の圏でどのように表現されるかを述べる．

1　イントロダクション

ヤン・バクスター方程式は McGuire[8] や Yang[17] により研究が開始された，可積分系の基本的な研究対象の一つである．ヤン・バクスター方程式の解を見つけることは，線型空間 V に対して線型写像 $\sigma : V \otimes V \to V \otimes V$ で $V \otimes V \otimes V$ 上の方程式

$$(\sigma \otimes \mathrm{id}_V)(\mathrm{id}_V \otimes \sigma)(\sigma \otimes \mathrm{id}_V) = (\mathrm{id}_V \otimes \sigma)(\sigma \otimes \mathrm{id}_V)(\mathrm{id}_V \otimes \sigma)$$

を満たすものを見つけることと同値である．ヤン・バクスター方程式を単なる集合の上で考えることにより，Drinfel'd[2] は集合論的ヤン・バクスター方程式の研究を提案した．ヤン・バクスター方程式と同様に集合論的ヤン・バクスター方程式は，集合 X に対して写像 $\sigma : X \times X \to X \times X$ で $X \times X \times X$ 上の方程式

$$(\sigma \times \mathrm{id}_X)(\mathrm{id}_X \times \sigma)(\sigma \times \mathrm{id}_X) = (\mathrm{id}_X \times \sigma)(\sigma \times \mathrm{id}_X)(\mathrm{id}_X \times \sigma)$$

を満たすものを見つけることと同値である．集合論的ヤン・バクスター方程式の解は Veselov[16] によりヤン・バクスター写像と名付けられた．

*E-mail : diogo-sw@shibaura-it.ac.jp

2005 年に澁川 [11] は集合論的ヤン・バクスター方程式にパラメータを加えて拡張することにより，集合論的ダイナミカル・ヤン・バクスター方程式の研究を開始した．

定義 1.1. Λ と X を空でない集合とし，$\triangleleft$ を $\Lambda \times X$ から Λ への写像とする．このとき，写像の族 $\{\sigma(\lambda) : X \times X \to X \times X\}_{\lambda \in \Lambda}$ に関する次の ($X \times X \times X$ 上の) 方程式を，**集合論的ダイナミカル・ヤン・バクスター方程式**という．

$$\sigma_{12}(\lambda) \circ \sigma_{23}(\lambda \triangleleft X^{(1)}) \circ \sigma_{12}(\lambda) = \sigma_{23}(\lambda \triangleleft X^{(1)}) \circ \sigma_{12}(\lambda) \circ \sigma_{23}(\lambda \triangleleft X^{(1)}) \quad (1.1)$$

ここで，$\sigma_{12}(\lambda), \sigma_{23}(\lambda \triangleleft X^{(1)})$ は $X \times X \times X$ 上で定義された次のような写像である．$x, y, z \in X$ に対して，

$$\begin{aligned} \sigma_{12}(\lambda)(x,y,z) &:= (\sigma(\lambda)(x,y), z), \\ \sigma_{23}(\lambda \triangleleft X^{(1)})(x,y,z) &:= (x, \sigma(\lambda \triangleleft x)(y,z)). \end{aligned}$$

(1.1) をみたす写像の族 $\{\sigma(\lambda) : X \times X \to X \times X\}_{\lambda \in \Lambda}$ を X 上の**ダイナミカル・ヤン・バクスター写像**という．

注意 1.2. ダイナミカル・ヤン・バクスター写像が導入された 2005 年の論文 [11] では，上記の方程式 (1.1) と同値な方程式の解をダイナミカル・ヤン・バクスター写像と呼び，(1.1) の解を dynamical braiding map と呼んでいる．本稿では，言葉の乱用ではあるが，方程式 (1.1) の解をダイナミカル・ヤン・バクスター写像と呼ぶことにする．

ダイナミカル・ヤン・バクスター写像の具体的な構成や関連する代数的な構造については，様々な結果が知られている [3, 5, 6, 11, 12, 14, 15]．また，圏論を用いて集合論的ダイナミカル・ヤン・バクスター方程式を記述するための枠組みとして集合の圏を変形したダイナミカル集合の圏と呼ばれるモノイダル圏 DSet_Λ が澁川 [13] により導入された．DSet_Λ を用いてダイナミカル・ヤン・バクスター写像を扱うときには，次の Invariance 条件が必要となる．

定義 1.3. [12] ダイナミカル・ヤン・バクスター写像 $\{\sigma(\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して，

$$\sigma(\lambda)(x,y) = (m_1(\lambda)(x,y), m_2(\lambda)(x,y)) \quad (1.2)$$

とおく．このとき，次の関係式を **Invariance 条件**という．

$$(\lambda \triangleleft m_1(\lambda)(x,y)) \triangleleft m_2(\lambda)(x,y) = (\lambda \triangleleft x) \triangleleft y \quad (1.3)$$

注意 1.4. Invariance 条件は weight-zero 条件と呼ばれることもある [10].

DSet_Λ を理解することはダイナミカル・ヤン・バクスター写像の研究において重要なことであると考えられる．本稿では，論文 [7] に従い，ダイナミカル集合の圏 DSet_Λ が箙の作るモノイダル圏 Quiv_Λ に埋め込めることを見る．また， Andruskiewitsch[1] による箙論的ヤン・バクスター方程式との関係も調べ，ダイナミカル・ヤン・バクスター写像が箙の圏でどのように振る舞うのかについても確認をする．

2 モノイダル圏 DSet_Λ

この章では，ダイナミカル・ヤン・バクスター写像を圏論的に定式化するための枠組みとなる圏 DSet_Λ を導入する．DSet_Λ は [13] において澁川により導入されたものであり，モノイダル圏の構造を持つ．

2.1 モノイダル圏

まず，モノイダル圏について簡単に準備をする．モノイダル圏については [4] を参考にした．

定義 2.1. 圏 C において，

- 函手 $\otimes : C \times C \to C$ (テンソル積 (the tensor product) という)
- 対象 $\mathbf{1} \in C$ (単位対象 (the unit object) という),
- 自然同型

  $$\alpha : \otimes(\otimes \times \mathrm{id}) \to \otimes(\mathrm{id} \times \otimes),\ l : \otimes(\mathbf{1} \times \mathrm{id}) \to \mathrm{id},\ r : \otimes(\mathrm{id} \times \mathbf{1}) \to \mathrm{id}\,.$$

が定義されており，次の五角形公理 (Pentagon axioms) と三角形公理 (Triangle axioms) を満たすとき，$(C, \otimes, \mathbf{1}, a, l, r)$ を**モノイダル圏**という．

(1) Pentagon axioms：任意の $X, Y, Z, W \in C$ に対して

$$
\begin{tikzcd}
((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes W \arrow[r, "\alpha_{X\otimes Y,Z,W}"] \arrow[dd, "\alpha_{X,Y,Z}\otimes \mathrm{id}_W"] & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes W) \arrow[d, "\alpha_{X,Y,Z\otimes W}"] \\
 & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes W)) \\
(X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes W \arrow[r, "\alpha_{X,Y\otimes Z,W}"] & X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes W) \arrow[u, "\mathrm{id}_X \otimes \alpha_{Y,Z,W}"']
\end{tikzcd}
$$

(2) Triangle axioms：任意の $X, Y \in C$ に対して

$$
\begin{tikzcd}
(X \otimes \mathbf{1}) \otimes Y \arrow[rr, "\alpha_{X,\mathbf{1},Y}"] \arrow[dr, "r_X\otimes \mathrm{id}_Y"'] & & X \otimes (\mathbf{1} \otimes Y) \arrow[dl, "\mathrm{id}_X \otimes l_Y"] \\
 & X \otimes Y &
\end{tikzcd}
$$

注意 2.2. 自然同型 α, l, r が全て恒等射であるモノイダル圏は**厳格 (strict)** という．

例 2.3. 体 k 上のベクトル空間のなす圏 k-$Vect$ はテンソル積としてベクトル空間のテンソル積をとり，k を単位対象とすることによりモノイダル圏となる．

定義 2.4. C と D をモノイダル圏とする．C から D へのモノイダル函手とは，

- 函手 $F : C \to D$,
- 自然変換 $F^{(2)}_{X,Y} : F(X) \otimes F(Y) \to F(X \otimes Y)$ $(X, Y \in C)$
- 射 $F^{(0)} : \mathbf{1} \to F(\mathbf{1})$

の三つ組 $(F, F^{(2)}, F^{(0)})$ で，次の条件を満たすものである．

(1) 任意の $X, Y, Z \in C$ に対し，次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
(F(X) \otimes F(Y)) \otimes F(Z) \arrow[r, "\alpha_{F(X),F(Y),F(Z)}"] \arrow[d, "F^{(2)}_{X,Y} \otimes \mathrm{id}_{F(Z)}"] & F(X) \otimes (F(Y) \otimes F(Z)) \arrow[d, "\mathrm{id}_{F(X)} \otimes F^{(2)}_{Y,Z}"] \\
F(X \otimes Y) \otimes F(Z) \arrow[d, "F^{(2)}_{X \otimes Y, Z}"] & F(X) \otimes F(Y \otimes Z) \arrow[d, "F^{(2)}_{X, Y \otimes Z}"] \\
F((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[r, "F\alpha_{X,Y,Z}"] & F(X \otimes (Y \otimes Z))
\end{tikzcd}$$

(2) 任意の $X \in C$ に対し，次の二つの図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
F(X) \otimes \mathbf{1} \arrow[r, "r_{F(X)}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{F(X)} \otimes F^{(0)}"] & F(X) \\
F(X) \otimes F(\mathbf{1}) \arrow[r, "F^{(2)}_{X,\mathbf{1}}"] & F(X \otimes \mathbf{1}) \arrow[u, "F(r_X)"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \otimes F(X) \arrow[r, "l_{F(X)}"] \arrow[d, "F^{(0)} \otimes \mathrm{id}_{F(X)}"] & F(X) \\
F(\mathbf{1}) \otimes F(X) \arrow[r, "F^{(2)}_{\mathbf{1},X}"] & F(\mathbf{1} \otimes X) \arrow[u, "F(l_X)"]
\end{tikzcd}$$

また，任意の $X, Y \in C$ に対して $F^{(2)}_{X,Y}$ と $F^{(0)}$ が可逆なときモノイダル函手を**強 (strong) モノイダル函手**という．

注意 2.5. 任意の $X, Y \in C$ に対して $F^{(2)}_{X,Y}$ と $F^{(0)}$ が恒等射であるモノイダル函手は**厳格 (strict)** という．

2.2 DSet_Λ の導入

Λ を空でない集合とする．圏 DSet_Λ は，集合 X と写像 $\triangleleft_X : \Lambda \times X \to \Lambda$ の組 $(X, \triangleleft_X)$ を対象とし，射 $f : (X, \triangleleft_X) \to (Y, \triangleleft_Y)$ を写像 $f : \Lambda \times X \to Y$ で

$$\lambda \triangleleft_Y f(\lambda, x) = \lambda \triangleleft_X x \ (\lambda \in \Lambda, x \in X)$$

を満たすものとして定めたものである．また，DSet_Λ の二つの射

$$f : (X, \triangleleft_X) \to (Y, \triangleleft_Y),\ g : (Y, \triangleleft_Y) \to (Z, \triangleleft_Z)$$

に対して，射の合成は

$$(g \circ f)(\lambda, x) := g(\lambda, f(\lambda, x))$$

と定め，恒等射は $\mathrm{id}_X : (X, \triangleleft_X) \to (X, \triangleleft_X),\ (\lambda, x) \mapsto x$ とする．

定義 2.6. DSet_Λ を Λ 上の**ダイナミカル集合の圏**と呼ぶ．

注意 2.7. 圏 DSet_Λ を Λ 上のダイナミカル集合の圏と呼ぶことは Rump[10] に由る．

次に，DSet_Λ にモノイダル圏の構造を定める．

- $X = (X, \triangleleft_X), Y = (Y, \triangleleft_Y) \in \mathrm{DSet}_\Lambda$ に対して，X と Y のテンソル積 $X \otimes Y \in \mathrm{DSet}_\Lambda$ を集合の直積 $X \times Y$ と写像 $\triangleleft_{X\otimes Y} : \lambda \times (X \times Y) \to \Lambda$

$$\lambda \triangleleft_{X\otimes Y} (x, y) := (\lambda \triangleleft_X x) \triangleleft_Y y,\ (\lambda \in \Lambda, x, \in X, y \in Y)$$

  の組 $(X \times Y, \triangleleft_{X\otimes Y})$ と定める．

- 射 $f : X \to X',\ g : Y \to Y'$ に対して，f と g のテンソル積 $f \otimes g$ を $\Lambda \times (X \times Y)$ から Λ への写像で

$$(f \otimes g)(\lambda, (x, y)) := (f(\lambda, x), g(\lambda \triangleleft_X x, y))$$

  と定める $(\lambda \in \Lambda, x \in X, y \in Y)$．

また，単位対象は単元集合 $\mathbf{1} = \{1\}$ と $\lambda \triangleleft_{\mathbf{1}} 1 = \lambda$ を満たす写像の組 $(\mathbf{1}, \triangleleft_{\mathbf{1}})$ であり，自然同型 α, l, r は

$$\alpha_{X,Y,Z}(\lambda)((x, y), z) = (x, (y, z)),\ l_X(\lambda)(1, x) = x,\ r_X(\lambda)(x, 1) = x$$

とする $(\lambda \in \Lambda, x \in X, y \in Y, z \in Z)$．

定理 2.8. $\mathrm{DSet}_\Lambda = (\mathrm{DSet}_\Lambda, \otimes, \mathbf{1}, a, l, r)$ はモノイダル圏である．

2.3 ダイナミカル・ヤン・バクスター写像

Λ は空でない集合とする．モノイダル圏 DSet_Λ を用いて，ダイナミカル・ヤン・バクスター写像を書き換える．

定義 2.9. モノイダル圏 C に対して，C の braided object からなる圏 $Br(C)$ を次のように定める．

- $Br(C)$ の対象：C の対象 X と射 $\sigma : X \otimes X \to X \otimes X$ の組 (X,σ) で次の組紐関係式を満たすもの
$$a\circ\sigma\otimes\mathrm{id}_X\circ a^{-1}\circ\mathrm{id}_X\otimes\sigma\circ a\circ\sigma\otimes\mathrm{id}_X = \mathrm{id}_X\otimes\sigma\circ a\circ\sigma\otimes\mathrm{id}_X\circ a^{-1}\circ\mathrm{id}_X\otimes\sigma\circ a \tag{2.1}$$
- $Br(C)$ の射：$Br(C)$ の対象 $(X,\sigma_X),(Y,\sigma_Y)$ に対して，
$$f : (X,\sigma_X) \to (Y,\sigma_Y)$$
は C の射 $f : X \to Y$ で次を満たすもの
$$(f\otimes f)\circ\sigma_X = \sigma_Y\circ(f\otimes f).$$

定理 2.10. *[13] Invariance 条件を満たすダイナミカル・ヤン・バクスター写像は* $Br(\mathrm{DSet}_\Lambda)$ *の braided object である．*

3 箙を用いたアプローチ

この章では，箙の作るモノイダル圏 Quiv_Λ を定義し，DSet_Λ が Quiv_Λ に埋め込めることを示す．

Λ を空でない集合とする．集合 Q と写像 $s_Q, t_Q : Q \to \Lambda$ の三つ組 (Q,s_Q,t_Q) を Λ 上の**箙** (Quiver) という．

注意 3.1. Λ 上の箙 (Q,s_Q,t_Q) は，Λ を頂点の集合とし，Q を辺の集合とする有向グラフである．$a\in Q$ は，矢印を用いて次のように表現できる．
$$s_Q(a)\xrightarrow{\quad a\quad}t_Q(a)$$
$s_Q(a)$ を a の始点，$t_Q(a)$ を a の終点という．

定義 3.2. 箙の圏 Quiv_Λ は，Λ 上の箙を対象とし，射 $f : (Q,s_Q,t_Q) \to (Q',s_{Q'},t_{Q'})$ を写像 $f : Q \to Q'$ で
$$s_{Q'}(f(a)) = s_Q(a),\ t_{Q'}(f(a)) = t_Q(a)$$
を満たすものとして定めたものである．また，射の合成は写像の合成を用いて定める．

箙の圏 Quiv_Λ には，次のようにしてモノイダル圏の構造が定まる．$Q = (Q,s_Q,t_Q), R = (R,s_R,t_R) \in \mathrm{Quiv}_\Lambda$ に対して，
$$\begin{aligned}
&Q\times_\Lambda R = \{(a,b)\in Q\times R \mid t_Q(a) = s_R(b)\}\ \text{(fiber product)},\\
&s_{Q\times_\Lambda R} : Q\times_\Lambda R \to \Lambda, (a,b)\mapsto s_Q(a),\\
&t_{Q\times_\Lambda R} : Q\times_\Lambda R \to \Lambda, (a,b)\mapsto t_R(b)
\end{aligned}$$

とすれば $(Q \times_\Lambda R, s_{Q\times_\Lambda R}, t_{Q\times_\Lambda R})$ は Λ 上の箙となる．また，Quiv_Λ の射 $f : Q \to Q'$，$g : R \to R'$ に対して，写像

$$f \times_\Lambda g : Q \times_\Lambda R \to Q' \times_\Lambda R'$$

を $f \times g$ の $Q \times_\Lambda R$ への制限として定める．

定理 3.3. Quiv_Λ は $\times_\Lambda$ をテンソル積，$(\Lambda, s_\Lambda = \mathrm{id}_\Lambda, t_\Lambda = \mathrm{id}_\Lambda)$ を単位対象としてモノイダル圏となる．

3.1 DSet_Λ の Quiv_Λ への埋め込み

Λ を空でない集合とする．DSet_Λ の対象 $X = (X, \triangleleft_X)$ に対して，

$$\begin{aligned}
&Q(X) = \Lambda \times X,\\
&s_{Q(X)} : Q(X) \to \Lambda, (\lambda, x) \to \lambda,\\
&t_{Q(X)} : Q(X) \to \Lambda, (\lambda, x) \to \lambda \triangleleft_X x
\end{aligned}$$

として，Quiv_Λ の対象 $Q(X) = (Q(X), s_{Q(X)}, t_{Q(X)})$ を定める．また，DSet_Λ の射 $f : X \to Y$ に対して，Quiv_Λ の射を

$$Q(f) : Q(X) \to Q(Y),\ (\lambda, x) \to (\lambda, f(\lambda, x))$$

とする．このとき，この対応を用いて函手 $Q : \mathrm{DSet}_\Lambda \to \mathrm{Quiv}_\Lambda$ が得られる．本稿における，我々の主張は次の定理である．

定理 3.4. *[7]* 函手 $Q : \mathrm{DSet}_\Lambda \to \mathrm{Quiv}_\Lambda$ と，

$$\begin{aligned}
&Q^{(2)}_{X,Y} : Q(X) \times_\Lambda Q(Y) \to Q(X \otimes Y),\ (\lambda, x, \mu, y) \mapsto (\lambda, x, y),\\
&Q^{(0)} : Q(\mathbf{1}) \to \Lambda, (\lambda, 1) \mapsto \lambda
\end{aligned}$$

の三つ組 $(Q, Q^{(2)}, Q^{(0)})$ は忠実で充満な強モノイダル函手となる．

また，函手 Q を用いて忠実で充満な函手

$$Br(Q) : Br(\mathrm{DSet}_\Lambda) \to Br(\mathrm{Quiv}_\Lambda)$$

が得られる．$Br(Q)$ は DSet_Λ の braided object(X, σ) を Quiv_Λ の braided object$(Q(X), \tilde{\sigma})$

$$\tilde{\sigma} := (Q^{(2)}_{X,X})^{-1} \circ Q(\sigma) \circ Q^{(2)}_{X,X} \tag{3.1}$$

に対応させる函手である．

Andruskiewitsch[1] は，Quiv_Λ の braided object を braided quiver と呼んでいる．(3.1) により，ダイナミカル・ヤン・バクスター写像と braided quiver の対応が得られた．

注意 3.5. $\tilde{\sigma}$ は Λ 上の箙で長さ 2 の有向辺を (始点と終点を変えずに) 長さ 2 の有向辺に移す射である．また，(1.2) の記号を用いると，$\tilde{\sigma}$ はより具体的に，

$$\tilde{\sigma}\Big((\lambda, x), (\mu, y)\Big) = \Big((\lambda, m_1(\lambda)(x, y)), (\lambda \triangleleft m_1(\lambda)(x, y), m_2(\lambda)(x, y))\Big) \tag{3.2}$$

と書ける．

4 具体例

最後に論文 [6] を参考にダイナミカル・ヤン・バクスター写像の簡単な例と，その例が箙の圏における braided object としてどのようなものになっているかを紹介する．ダイナミカル・ヤン・バクスター写像の構成には，擬群と呼ばれる代数系を用いた方法がよく知られている．擬群は，群から結合法則を外して一般化した代数系であり，以下のように定義される．擬群については，[9] を参考にした．

定義 4.1. 空でない集合 L が二項演算 $* : L \times L \to L$ を持ち，任意の $a \in L$ に対して左側からの積

$$a * - : L \to L,\ x \mapsto a * x \tag{4.1}$$

が全単射であるとき，$L = (L, *)$ を**左擬群 (left quasigroup)** という．同様に右側からの積が全単射であるものを**右擬群 (right quasigroup)** といい，左かつ右擬群であるものを**擬群 (quasigroup)** という．

注意 4.2. (1) 左擬群 $(L, *)$ は除法により定まる二項演算をもつ

$$a \setminus b := c \iff a * c = b$$

として $\setminus : L \times L \to L$ を定める．

(2) L が有限集合のとき，左擬群とは左側簡約律

$$a * x = a * y \Rightarrow x = y\ (a \in L)$$

を満たす二項演算付き集合である (擬群は左側かつ右側簡約律を満たす二項演算付き集合である)．

(群でない) 擬群の有名な例としては八元数がある．八元数以外の例としては次のようなものも存在する．

例 4.3. $\mathbb{Z}$ において，$* : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ を

$$m * n := n - m \ (m, n \in \mathbb{Z})$$

とすれば，$(\mathbb{Z}, *)$ は擬群となる (可換群上で考えても同様にして擬群の例が得られる).

$(L, *)$ を左擬群とする．このとき，L 上の二項演算の族 $*_\lambda : L \times L \to L (\lambda \in L)$ を次のように定義する

$$a *_\lambda b := \lambda \setminus ((\lambda * a) * b), \ (a, b \in L).$$

新しく定義した演算 $*_\lambda$ に関して，L は左擬群の構造を持ち，結合則に似た関係式を満たすことが示せる.

命題 4.4. 各 $\lambda \in L$ に対して $(L, *_\lambda)$ は $\lambda \setminus \lambda$ を左側単位元とする左擬群となる．また，次の関係式が成立する.

$$(a *_\lambda b) *_\lambda c = a *_\lambda (b *_{\lambda * a} c), \ (\lambda, a, b, c \in L). \tag{4.2}$$

Proof. 関係式 (4.2) が成立することだけ確認をする．任意の $a, b, c, \lambda \in L$ に対して，(演算 $*, *_\lambda$ の混在に注意をして) 計算すれば,

$$\begin{aligned} a *_\lambda (b *_{\lambda * a} c) &= \lambda \setminus \{(\lambda * a) * (b *_{\lambda * a} c)\} \\ &= \lambda \setminus \{((\lambda * a) * b) * c\} \\ (a *_\lambda b) *_\lambda c &= \lambda \setminus \{\lambda * (a *_\lambda b) * c\} \\ &= \lambda \setminus \{((\lambda * a) * b) * c\} \end{aligned}$$

となり，(4.2) の両辺が一致することがわかる. □

注意 4.5. 関係式 (4.2) は，ダイナミカルな世界の結合法則に対応するものである．実際に，L を左擬群として DSet_L を考えれば，$(L, *)$ は DSet_L の対象となり，テンソル積 $m : L \otimes L \to L$ を

$$m(\lambda) : L \times L \to L, (a, b) \mapsto m(\lambda)(a, b) = a *_\lambda b$$

とすれば，(4.2) は DSet_L 上の結合則

$$m \circ (m \otimes \mathrm{id}_L) = m \circ (\mathrm{id}_L \otimes m)$$

を書き下したものに対応する．関係式 (4.2) は，[5, 10] でダイナミカル・ヤン・バクスター写像と関連する代数系に現れる重要な関係式として研究がされている.

定理 4.6. *[6]* 左擬群 $(L, *)$ に対して,

$$\sigma(\lambda) : L \times L \to L \times L, (a, b) \mapsto (\lambda \setminus \lambda, a *_\lambda b) \tag{4.3}$$

とすれば, $\{\sigma(\lambda)\}_{\lambda \in L}$ はダイナミカル・ヤン・バクスター写像となる.

Proof. 集合論的ダイナミカル・ヤン・バクスター方程式の両辺を確認すると,

$$\begin{aligned} \sigma_{12}(\lambda) \circ \sigma_{23}(\lambda * Q^{(1)}) \circ \sigma_{12}(\lambda)(a, b, c) &= (\lambda \setminus \lambda, \lambda \setminus \lambda, (a *_\lambda b) *_\lambda c) \\ \sigma_{23}(\lambda * Q^{(1)}) \circ \sigma_{12}(\lambda) \circ \sigma_{23}(\lambda * Q^{(1)})(a, b, c) &= (\lambda \setminus \lambda, \lambda \setminus \lambda, a *_\lambda (b *_{\lambda * a} c)) \end{aligned}$$

となり, この二つが一致することは, (4.2) から得られる. □

例 4.7. $(\mathbb{Z}, *)$ を例 4.3 の擬群とする. このとき,

$$\sigma(\lambda) : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, (m, n) \mapsto (\lambda \setminus \lambda, m *_\lambda n) = (2\lambda, y - x + 2\lambda)$$

はダイナミカル・ヤン・バクスター写像となる.

次に, 定理 4.6 で構成した例が箙上ではどのようなものになっているのかを確認する. $L = (L, *) \in \mathrm{DSet}_L$ に対して, $Q(L)$ は $L \times L$ と写像 $s_Q(L), t_Q(L) : Q(L) = L \times L \to L$

$$s_{Q(L)}(a, b) = a,\ t_{Q(L)}(a, b) = a * b$$

の三つ組 $(L \times L, s_{Q(L)}, t_{Q(L)})$ からなる. これは L を頂点集合とし, 任意の頂点対 (a, b) に対して a から b に有向辺 $a \setminus b$ がただ一つ存在する箙である (a と b は等しくてもよい). このとき, 定理 4.6 の σ に対して, $\tilde{\sigma}$ は

$$\begin{aligned} &\tilde{\sigma} = (Q^{(2)}_{L,L})^{-1} \circ Q(\sigma) \circ Q^{(2)}_{L,L} : Q(L) \times_L Q(L) \to Q(L) \times_L Q(L), \\ &\tilde{\sigma} = ((\lambda, x), (\mu, y)) = ((\lambda, \lambda \setminus \lambda), (\lambda, x *_\lambda y)). \end{aligned}$$

となる. $\tilde{\sigma}$ は $Q(L)$ における長さ 2 の有向辺を (始点と終点を変えずに) ループを含む長さ 2 の有向辺に移す次のような射である (次の箙では不要な頂点や有向辺は省略した).

$$\begin{tikzcd} \lambda \arrow[r, "x"] & \mu \arrow[r, "y"] & \eta \arrow[r, Rightarrow, "\tilde{\sigma}"] & \lambda \arrow[loop above, "\lambda\backslash\lambda"] \arrow[r, "x *_\lambda y"] & \eta \end{tikzcd}$$

5 謝辞

本稿は, 研究集会「組合せ論的表現論の諸相」において講演した内容をその基としている. 講演の機会を筆者に与えていただいたことに対し, 世話人に深く感謝する.

参考文献

[1] N. Andruskiewitsch, On the quiver-theoretical quantum Yang-Baxter equation, selecta Math.(N.S.) 11 (2) (2005) 203-246, with an appendix by Mitsuhiro Takeuchi

[2] V.G. Drinfel'd, On some unsolved problems in quantum group theory, Quantum groups. Lecture Notes in Math. 1510, Springer, Berlin, 1992.

[3] N. Kamiya, Y. Shibukawa, Dynamical Yang-Baxter maps associated with homogeneous pre-systems, J. Gen. Lie Theory Appl. 5(2011) G110106.

[4] S. Mac Lane, Categories for the Working Mathematician, second edition, Grad. Texts in Math., vol. 5, Springer-Verlag, New York, 1998.

[5] D.K. Matsumoto, Dynamical braces and dynamical Yang-Baxter maps, J. Pure Appl. Algebra 217(2)(2013) 195-206.

[6] D.K. Matsumoto, Y. Shibukawa, Quantum Yang-Baxter equation, braided semi-groups, and dynamical Yang-Baxter maps, Tokyo J. Math. 38 (1) (2015) 227-237.

[7] D.K. Matsumoto, K. Shimizu, Quiver-theoretical approach to dynamical Yang-Baxter maps, J. Algebra 507 (2018) 47-80.

[8] J.B. McGuire, Study of exactly soluble one-dimensional N-body problems, J. Math. Phys. 5(1964) 622-636.

[9] H.O. Pflugfelder, Quasigroups and loops: introduction, Sigma Ser. Pure Math., vol.7, Heldermann Verlag, Berlin, 1990.

[10] W. Rump, Dynamical groups and braces, J. Algebra Appl. 15 (7) (2016) 1650135.

[11] Y. Shibukawa, Dynamical Yang-Baxter maps, Int. Math. Res. Not. (36) (2005) 2199-2221.

[12] Y. Shibukawa, Dynamical Yang-Baxter maps with an invariance condition, Publ. Res. Inst. Math. sci. 43(4) (2007) 1157-1182.

[13] Y. Shibukawa, Survey on dynamical Yang-Baxter maps, in Noncommutative Structure in Mathematics an Physics, K. Vlaam. Acad. Belgie Wet. Kunsten (KVAB), Brussels, 2010, pp. 239-244.

[14] Y. Shibukawa, Hopf algebroids and rigid tensor categories associated with dynamical Yang-Baxter maps, J. Algebra 449(2016)408-445.

[15] Y. Shibukawa, M. Takeuchi, FRT construction for dynamical Yang-Baxter maps, J. Algebra 323(6)(2010) 1698-1728.

[16] A.P. Veselov, Yang-Baxter maps and integrable dynamics, Phys. Lett. A 314 (2003), no.3, 214-221.

[17] C. N. Yang, Some exact results for the many-body problem in one dimension with repulsive delta-function interaction, Phys. Rev. Lett. 19 (1967), 1312-1314.