数理解析研究所講究録 第2127巻 2019年 94-104

On Guay's evaluation map for affine Yangians

神戸大学 大学院理学研究科　小寺 諒介
Ryosuke Kodera
Department of Mathematics, Kobe University

1　イントロダクション

ヤンギアンは Drinfeld によって導入されたアファイン量子群の一種だが，A 型にあたる場合はそれ以前から可積分系における Yang-Baxter 方程式の文脈で研究されていた（Molev の本 [M] の Preface を参照せよ）．A 型の場合の特殊性として，evaluation 写像の存在がある．これはヤンギアン $Y_\hbar(\mathfrak{gl}_N)$ から $U(\mathfrak{gl}_N)$ への全射代数準同型写像で，この写像を通じて $Y_\hbar(\mathfrak{gl}_N)$ の表現を具体的に構成できる．また，$U(\mathfrak{gl}_N)$ の中心の生成元の構成の見通しがよくなるなど，古典的な Lie 代数の表現論への応用も持つ．

Guay は [G] でアファインヤンギアン $Y(\hat{\mathfrak{sl}}_N)$ から $U(\hat{\mathfrak{gl}}_N)$ の完備化への代数準同型写像を導入した．これは evaluation 写像のアファイン版と見ることができる．[G] では写像の well-definedness の証明は省略されていたのだが，実際にチェックしてみると，証明にはアファインヤンギアンのパラメータにある条件を課す必要があることがわかった．Guay による表示を整理し，適切なパラメータの仮定の下で証明を書き下したのが [K2] である．[K2] では，それに加えて evaluation 表現の最高ウェイト（Drinfeld 多項式）を求めた．

Feigin-Finkelberg-Negut-Rybnikov [FFNR] によって，アファイン Laumon 空間の局所化同変コホモロジー群上にアファインヤンギアン $Y(\hat{\mathfrak{sl}}_N)$ の作用が構成されている．そこでのパラメータの条件は evaluation 写像に対する条件と一致しており，[FFNR] の表現は evaluation 表現の例になっていることが期待される（注意 3.5 を見よ）．[K2] でのアファインヤンギアンの定義関係式は，[FFNR] のものと同値だが一見違うので，その関係を知らないと両者の結果を較べることができない．そこで，この解説では [FFNR] の表示によって [K2] の結果を書き直すことにした．なお，講演で紹介したブレイド群の作用 [K1] は，evaluation 写像の全射性（定理 3.6）を証明するのに使う．

次節以降の構成について述べる．2 節でヤンギアン $Y_\hbar(\mathfrak{gl}_N)$ と $Y_\hbar(\mathfrak{sl}_N)$ の場合の evaluation 写像について概説し，3 節で [K2] の主定理であるアファインヤンギアンの evaluation 写像について紹介する（定理 3.2）．4 節では，evaluation 表現の最高ウェイトについて述べる．

2　ヤンギアンの evaluation 写像

[M] がこの節の基本的な文献である．

2.1　ヤンギアン $Y_\hbar(\mathfrak{gl}_N)$ と evaluation 写像

定義 2.1　ヤンギアン $Y_\hbar(\mathfrak{gl}_N)$ は，$T_{i,j}^{(r)}$ $(i,j=1,\dots,N,\ r\in\mathbb{Z}_{\geq 1})$ で生成され，次の関係式で定義される $\mathbb{C}$ 代数である．

$$[T_{i,j}^{(1)},T_{k,l}^{(s)}]=\delta_{kj}T_{i,l}^{(s)}-\delta_{il}T_{k,j}^{(s)},$$
$$[T_{i,j}^{(r+1)},T_{k,l}^{(s)}]-[T_{i,j}^{(r)},T_{k,l}^{(s+1)}]=\hbar\left(T_{k,j}^{(r)}T_{i,l}^{(s)}-T_{k,j}^{(s)}T_{i,l}^{(r)}\right)$$

ここで $\hbar\in\mathbb{C}$ はパラメータである．この定義を $Y_\hbar(\mathfrak{gl}_N)$ の RTT 表示と呼ぶ．$E_{i,j}$ を (i,j) 成分が 1 で他が 0 の $N\times N$ 行列とすれば，$E_{i,j}$ $(i,j=1,\dots,N)$ は Lie 代数 $\mathfrak{gl}_N$ の基底をなす．

$$T_{i,j}^{(r)}\mapsto\begin{cases}E_{i,j} & (r=1),\\ 0 & (r\geq 2)\end{cases}$$

は $Y_\hbar(\mathfrak{gl}_N)$ から $U(\mathfrak{gl}_N)$ への代数準同型写像を定める．これを evaluation 写像と呼び $\mathrm{ev}^{\mathrm{RTT}}$ で表す．

$T_{i,j}(z)\in Y(\mathfrak{gl}_N)[[z^{-1}]]$ を

$$T_{i,j}(z)=\delta_{ij}+\hbar\sum_{r\geq 1}T_{i,j}^{(r)}z^{-r}$$

で定義する．$(i_1,\dots,i_m),(j_1,\dots,j_m)\in\{1,\dots,N\}^m$ に対し

$$\begin{aligned}&T_{(i_1,\dots,i_m),(j_1,\dots,j_m)}(z)\\ &\quad=\sum_{w\in\mathfrak{S}_m}(-1)^{l(w)}T_{i_{w(1)},j_1}(z)T_{i_{w(2)},j_2}(z-\hbar)\cdots T_{i_{w(m)},j_m}(z-(m-1)\hbar)\end{aligned}$$

と定義し，これを用いて

$$\begin{aligned}A_i(z)&=T_{(1,\dots,i),(1,\dots,i)}(z)\\ B_i(z)&=T_{(1,\dots,i-1,i+1),(1,\dots,i-1,i)}(z)\\ C_i(z)&=T_{(1,\dots,i-1,i),(1,\dots,i-1,i+1)}(z)\end{aligned}$$

と定義する．$A_i(z)$ の z^{-1} に関する展開の各項は互いに可換で，Gelfand-Zetlin 代数と呼ばれる可換部分代数を生成する．さらに，$A_N(z)$ の展開の各項は $Y_\hbar(\mathfrak{gl}_N)$ の中心を生成する．

$\mathrm{ev}^{\mathrm{RTT}}$ の応用には次の 2 方向がある．

- $\mathrm{ev}^{\mathrm{RTT}}$ を通じて $\mathfrak{gl}_N$ の表現に $Y_\hbar(\mathfrak{gl}_N)$ の表現構造を入れ，調べる．
- $U(\mathfrak{gl}_N)$ の中心や可換部分代数を，$\mathrm{ev}^{\mathrm{RTT}}$ と $Y_\hbar(\mathfrak{gl}_N)$ によって記述し，調べる．

前者については 4.1 節でもう少し述べる．

2.2 ヤンギアン $Y_\hbar(\mathfrak{sl}_N)$

2.1 節で定義した $A_i(z)$, $B_i(z)$, $C_i(z)$ を用いて

$$H_i(z) = A_{i+1}\left(z+\frac{i+1}{2}\hbar\right)A_{i-1}\left(z+\frac{i-1}{2}\hbar\right)A_i\left(z+\frac{i+1}{2}\hbar\right)^{-1}A_i\left(z+\frac{i-1}{2}\hbar\right)^{-1},$$
$$X_i^+(z) = C_i\left(z+\frac{i-1}{2}\hbar\right)A_i\left(z+\frac{i-1}{2}\hbar\right)^{-1},$$
$$X_i^-(z) = A_i\left(z+\frac{i-1}{2}\hbar\right)^{-1}B_i\left(z+\frac{i-1}{2}\hbar\right)$$

とし，$Y_\hbar(\mathfrak{gl}_N)$ の元 $H_{i,r}$, $X_{i,r}^+$, $X_{i,r}^-$ $(i=1,\ldots,N-1,\ r\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$ を

$$H_i(z) = 1+\hbar\sum_{r\geq 0}H_{i,r}z^{-r-1}, \quad X_i^\pm(z) = \hbar\sum_{r\geq 0}X_{i,r}^\pm z^{-r-1}$$

によって定義する（[M, (3.2), Remark 3.1.8]）．これらの元で生成される $Y_\hbar(\mathfrak{gl}_N)$ の部分代数を $Y_\hbar(\mathfrak{sl}_N)$ で表す．$Y_\hbar(\mathfrak{sl}_N)$ の定義関係式は，次節の定義 3.1 (1)–(4) で $i,j=1,\ldots,N-1$ としたものである．この定義を $Y_\hbar(\mathfrak{sl}_N)$ の Drinfeld 表示と呼ぶ．

$$\begin{aligned}\iota\colon U(\mathfrak{sl}_N) &\to Y_\hbar(\mathfrak{sl}_N)\\ E_{i,i}-E_{i+1,i+1} &\mapsto H_{i,0},\\ E_{i,i+1} &\mapsto X_{i,0}^+,\\ E_{i+1,i} &\mapsto X_{i,0}^-\end{aligned}$$

は単射な代数準同型写像を定める．

2.1 節で導入した $\mathrm{ev}^{\mathrm{RTT}}$ を $Y_\hbar(\mathfrak{sl}_N)$ に制限したものは，$Y_\hbar(\mathfrak{sl}_N)$ から $U(\mathfrak{gl}_N)$ への代数準同型写像を定める．これを $Y_\hbar(\mathfrak{sl}_N)$ の evaluation 写像と呼んでもよいのだが，ι と $\mathrm{ev}^{\mathrm{RTT}}$ を合成したものは

$$\mathrm{ev}^{\mathrm{RTT}}\circ\iota(E_{i,i+1}) = E_{i+1,i}$$

などとなるため，部分代数 $U(\mathfrak{sl}_N)$ 上で恒等写像にならない．そこで少し調整をして $Y_\hbar(\mathfrak{sl}_N)$ に対する evaluation 写像を再定義する．

2.3 $Y_\hbar(\mathfrak{sl}_N)$ の evaluation 写像

まず次の代数同型写像があることに注意する．

$$Y_\hbar(\mathfrak{sl}_N) \cong Y_{-\hbar}(\mathfrak{sl}_N), \qquad H_{i,r} \mapsto -H_{i,r}, \quad X_{i,r}^{\pm} \mapsto X_{i,r}^{\mp}$$

この同型と $Y_{-\hbar}(\mathfrak{sl}_N) \hookrightarrow Y_{-\hbar}(\mathfrak{gl}_N)$ との合成を $\iota' \colon Y_\hbar(\mathfrak{sl}_N) \hookrightarrow Y_{-\hbar}(\mathfrak{gl}_N)$ とすると，$r = 0, 1$ に対する生成元の像は次のようになる．

$$\iota'(H_{i,0}) = T_{i,i}^{(1)} - T_{i+1,i+1}^{(1)}, \quad \iota'(X_{i,0}^{+}) = T_{i,i+1}^{(1)}, \quad \iota'(X_{i,0}^{-}) = T_{i+1,i}^{(1)},$$

$$\begin{aligned}
\iota'(H_{i,1}) &= T_{i,i}^{(2)} - T_{i+1,i+1}^{(2)} - \frac{i-1}{2}\hbar\left(T_{i,i}^{(1)} - T_{i+1,i+1}^{(1)}\right) - \hbar T_{i,i}^{(1)} T_{i+1,i+1}^{(1)} \\
&\qquad + \hbar\sum_{k=1}^{i} T_{i,k}^{(1)} T_{k,i}^{(1)} - \hbar\sum_{k=1}^{i} T_{i+1,k}^{(1)} T_{k,i+1}^{(1)}, \\
\iota'(X_{i,1}^{+}) &= T_{i,i+1}^{(2)} - \frac{i-1}{2}\hbar T_{i,i+1}^{(1)} + \hbar\sum_{k=1}^{i} T_{i,k}^{(1)} T_{k,i+1}^{(1)}, \\
\iota'(X_{i,1}^{-}) &= T_{i+1,i}^{(2)} - \frac{i-1}{2}\hbar T_{i+1,i}^{(1)} + \hbar\sum_{k=1}^{i} T_{i+1,k}^{(1)} T_{k,i}^{(1)}
\end{aligned}$$

従って，$\mathrm{ev}^{\mathrm{fin}} = \mathrm{ev}^{\mathrm{RTT}} \circ \iota'$ によって $\mathrm{ev}^{\mathrm{fin}} \colon Y_\hbar(\mathfrak{sl}_N) \to U(\mathfrak{gl}_N)$ を定義すると，次が成立する．

$$\mathrm{ev}^{\mathrm{fin}}(H_{i,0}) = E_{i,i} - E_{i+1,i+1}, \quad \mathrm{ev}^{\mathrm{fin}}(X_{i,0}^{+}) = E_{i,i+1}, \quad \mathrm{ev}^{\mathrm{fin}}(X_{i,0}^{-}) = E_{i+1,i},$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{ev}^{\mathrm{fin}}(H_{i,1}) &= -\frac{i-1}{2}\hbar\left(E_{i,i} - E_{i+1,i+1}\right) - \hbar E_{i,i} E_{i+1,i+1} \\
&\qquad + \hbar\sum_{k=1}^{i} E_{i,k} E_{k,i} - \hbar\sum_{k=1}^{i} E_{i+1,k} E_{k,i+1}, \\
\mathrm{ev}^{\mathrm{fin}}(X_{i,1}^{+}) &= -\frac{i-1}{2}\hbar E_{i,i+1} + \hbar\sum_{k=1}^{i} E_{i,k} E_{k,i+1}, \\
\mathrm{ev}^{\mathrm{fin}}(X_{i,1}^{-}) &= -\frac{i-1}{2}\hbar E_{i+1,i} + \hbar\sum_{k=1}^{i} E_{i+1,k} E_{k,i}
\end{aligned}$$

$Y_\hbar(\mathfrak{sl}_N)$ は $H_{i,0}$，$X_{i,0}^{\pm}$，$H_{i,1}$，$X_{i,1}^{\pm}$ $(i = 1, \ldots, N-1)$ で生成されるため，上の対応によって $\mathrm{ev}^{\mathrm{fin}}$ は特徴づけられる．また，任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して $H_i(z) \mapsto H_i(z-\alpha)$，$X_i^{\pm}(z) \mapsto X_i^{\pm}(z-\alpha)$ は $Y_\hbar(\mathfrak{sl}_N)$ の自己同型を定める．この自己同型を合成することにより，evaluation 写像の 1 パラメータ族をつくることができる．特に，$\mathrm{ev}^{\mathrm{fin}}(H_{i,1})$ および $\mathrm{ev}^{\mathrm{fin}}(X_{i,1}^{\pm})$ の先頭項の係数 $-(i-1)/2$ は $-i/2$ などにしてもよい．次節では，$\mathrm{ev}^{\mathrm{fin}}$（の自己同型によるシフト）のアファインヤンギアンでの類似物を導入する．

3 アファインヤンギアンの evaluation 写像

3.1 アファインヤンギアン $Y(\hat{\mathfrak{sl}}_N)$

$N \geq 3$ とし，$(a_{ij})_{i,j=0,1,\ldots,N-1}$ を $A^{(1)}_{N-1}$ 型 Cartan 行列とする．また，$\{X, Y\} = XY + YX$ とする．

定義 3.1 アファインヤンギアン $Y(\hat{\mathfrak{sl}}_N)$ は，$H_{i,r}$, $X^+_{i,r}$, $X^-_{i,r}$ $(i = 0, 1, \ldots, N-1,\ r \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ で生成され，次の関係式で定義される $\mathbb{C}$ 代数である．

$$[H_{i,r}, H_{j,s}] = 0, \qquad [X^+_{i,r}, X^-_{j,s}] = \delta_{ij} H_{i,r+s}, \qquad [H_{i,0}, X^\pm_{j,s}] = \pm a_{ij} X^\pm_{j,s}, \tag{1}$$

$$[H_{i,r+1}, X^\pm_{j,s}] - [H_{i,r}, X^\pm_{j,s+1}] = \pm\frac{a_{ij}}{2}\hbar\{H_{i,r}, X^\pm_{j,s}\} \quad (\{i,j\} \neq \{N-1, 0\}), \tag{2}$$

$$[X^\pm_{i,r+1}, X^\pm_{j,s}] - [X^\pm_{i,r}, X^\pm_{j,s+1}] = \pm\frac{a_{ij}}{2}\hbar\{X^\pm_{i,r}, X^\pm_{j,s}\} \quad (\{i,j\} \neq \{N-1, 0\}), \tag{3}$$

$$[H_{N-1,r+1}, X^\pm_{0,s}] - [H_{N-1,r}, X^\pm_{0,s+1}] = \mp\frac{\hbar}{2}\{H_{N-1,r}, X^\pm_{0,s}\} + (\hbar_+ + \frac{N}{2}\hbar)[H_{N-1,r}, X^\pm_{0,s}],$$

$$[H_{0,r+1}, X^\pm_{N-1,s}] - [H_{0,r}, X^\pm_{N-1,s+1}] = \mp\frac{\hbar}{2}\{H_{0,r}, X^\pm_{N-1,s}\} - (\hbar_+ + \frac{N}{2}\hbar)[H_{0,r}, X^\pm_{N-1,s}],$$

$$[X^\pm_{N-1,r+1}, X^\pm_{0,s}] - [X^\pm_{N-1,r}, X^\pm_{0,s+1}] = \mp\frac{\hbar}{2}\{X^\pm_{N-1,r}, X^\pm_{0,s}\} + (\hbar_+ + \frac{N}{2}\hbar)[X^\pm_{N-1,r}, X^\pm_{0,s}],$$

$$\sum_{w \in \mathfrak{S}_{1-a_{ij}}} [X^\pm_{i,r_{w(1)}}, [X^\pm_{i,r_{w(2)}}, \ldots, [X^\pm_{i,r_{w(1-a_{ij})}}, X^\pm_{j,s}] \ldots]] = 0 \quad (i \neq j) \tag{4}$$

この代数は二つのパラメータ $\hbar, \hbar_+$ を持つ．補助的なパラメータ $\hbar_-$ を

$$-N\hbar = \hbar_+ + \hbar_-$$

によって定める．$H_{i,r}$, $X^+_{i,r}$, $X^-_{i,r}$ $(i \neq 0,\ r \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ は，$Y_\hbar(\mathfrak{sl}_N)$ と同型な部分代数を生成する．

$Y(\hat{\mathfrak{sl}}_N)$ のこの表示は [FFNR, 3.15] による．但し [FFNR] ではパラメータ $\hbar, \hbar'$ を用いており，ここでのパラメータとの対応は $\hbar' = \hbar_-$ である．また，[K2, Definition 2.1] の表示との対応は次の通りである．

$$\hbar = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad \hbar_+ = -N\varepsilon_2, \quad \hbar_- = -N\varepsilon_1,$$

$$H_i(z) = h_i\left(z - \frac{i}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\right), \quad X^\pm_i(z) = x^\pm_i\left(z - \frac{i}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\right)$$

3.2 $U(\hat{\mathfrak{gl}}_N)$ の完備化

$\hat{\mathfrak{gl}}_N = \mathfrak{gl}_N \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c$ を $\mathfrak{gl}_N$ に付随するアファイン Lie 代数とする．c は中心元である．以下では $X \otimes t^m$ を $X(m)$ と略記する．

$U(\hat{\mathfrak{gl}}_N)$ の 2 種類の完備化を定義する．

$$\hat{\mathfrak{n}}_+ = \bigoplus_{\substack{i<j\\ m\geq 0}} \mathbb{C}E_{i,j}(m) \oplus \bigoplus_{\substack{i\geq j\\ m>0}} \mathbb{C}E_{i,j}(m), \quad \hat{\mathfrak{n}}_- = \bigoplus_{\substack{i>j\\ m\leq 0}} \mathbb{C}E_{i,j}(m) \oplus \bigoplus_{\substack{i\leq j\\ m<0}} \mathbb{C}E_{i,j}(m),$$

$$\hat{\mathfrak{h}} = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{C}E_{i,i} \oplus \mathbb{C}c$$

とする．$U(\hat{\mathfrak{n}}_\pm)$ の次数付けを $\deg X(m) = m$ によって定め，次数 m の成分を $U(\hat{\mathfrak{n}}_\pm)[m]$ で表す．

$$U(\hat{\mathfrak{gl}}_N)_{\mathrm{comp},+} = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \prod_{\substack{m,n\geq 0\\ n-m=k}} \Big(U(\hat{\mathfrak{n}}_-)[-m] \otimes U(\hat{\mathfrak{h}}) \otimes U(\hat{\mathfrak{n}}_+)[n]\Big),$$

$$U(\hat{\mathfrak{gl}}_N)_{\mathrm{comp},-} = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \prod_{\substack{m,n\geq 0\\ m-n=k}} \Big(U(\hat{\mathfrak{n}}_+)[m] \otimes U(\hat{\mathfrak{h}}) \otimes U(\hat{\mathfrak{n}}_-)[-n]\Big)$$

は，どちらも $U(\hat{\mathfrak{gl}}_N)$ を部分代数として含む自然な代数構造を持つ．$\hat{\mathfrak{gl}}_N$ の最高ウェイト表現は自然に $U(\hat{\mathfrak{gl}}_N)_{\mathrm{comp},+}$ 加群となり，最低ウェイト表現は $U(\hat{\mathfrak{gl}}_N)_{\mathrm{comp},-}$ 加群となる．

3.3 主定理：$Y(\hat{\mathfrak{sl}}_N)$ の evaluation 写像

定理 3.2 (Guay [G], Section 6, pp. 462–463, 小寺 [K2], Theorem 3.1, 3.8)　$\alpha \in \mathbb{C}$ とする．

(1) 条件 $K + N = -\hbar_+/\hbar$ の下で，次を満たす代数準同型写像

$$\mathrm{ev}_\alpha^+ \colon Y(\hat{\mathfrak{sl}}_N) \to U(\hat{\mathfrak{gl}}_N)_{\mathrm{comp},+}/(c-K)$$

がただ一つ存在する．

$$\mathrm{ev}_\alpha^+(H_{i,0}) = \begin{cases} E_{N,N} - E_{1,1} + K & (i=0),\\ E_{i,i} - E_{i+1,i+1} & (i\neq 0),\end{cases}$$

$$\mathrm{ev}_\alpha^+(X_{i,0}^+) = \begin{cases} E_{N,1}(1) & (i=0),\\ E_{i,i+1} & (i\neq 0),\end{cases} \qquad \mathrm{ev}_\alpha^+(X_{i,0}^-) = \begin{cases} E_{1,N}(-1) & (i=0),\\ E_{i+1,i} & (i\neq 0),\end{cases}$$

$$\mathrm{ev}_\alpha^+(H_{i,1}) = \begin{cases} (\alpha + K\hbar)(E_{N,N} - E_{1,1} + K) - \hbar E_{N,N}(E_{1,1} - K) \\ \quad +\hbar \sum_{m\geq 0} \sum_{k=1}^{N} \Big(E_{N,k}(-m)E_{k,N}(m) - E_{1,k}(-m-1)E_{k,1}(m+1) \Big) \\ \hfill (i = 0), \\ (\alpha - i\hbar/2)(E_{i,i} - E_{i+1,i+1}) - \hbar E_{i,i}E_{i+1,i+1} \\ \quad +\hbar \sum_{m\geq 0} \Big(\sum_{k=1}^{i} E_{i,k}(-m)E_{k,i}(m) + \sum_{k=i+1}^{N} E_{i,k}(-m-1)E_{k,i}(m+1) \\ \quad - \sum_{k=1}^{i} E_{i+1,k}(-m)E_{k,i+1}(m) - \sum_{k=i+1}^{N} E_{i+1,k}(-m-1)E_{k,i+1}(m+1) \Big) \\ \hfill (i \neq 0), \end{cases}$$

$$\mathrm{ev}_\alpha^+(X_{i,1}^+) = \begin{cases} (\alpha + K\hbar)E_{N,1}(1) + \hbar \sum_{m\geq 0} \sum_{k=1}^{N} E_{N,k}(-m)E_{k,1}(m+1) & (i = 0), \\ (\alpha - i\hbar/2)E_{i,i+1} + \hbar \sum_{m\geq 0} \Big(\sum_{k=1}^{i} E_{i,k}(-m)E_{k,i+1}(m) & \\ \qquad + \sum_{k=i+1}^{N} E_{i,k}(-m-1)E_{k,i+1}(m+1) \Big) & (i \neq 0), \end{cases}$$

$$\mathrm{ev}_\alpha^+(X_{i,1}^-) = \begin{cases} (\alpha + K\hbar)E_{1,N}(-1) + \hbar \sum_{m\geq 0} \sum_{k=1}^{N} E_{1,k}(-m-1)E_{k,N}(m) & (i = 0), \\ (\alpha - i\hbar/2)E_{i+1,i} + \hbar \sum_{m\geq 0} \Big(\sum_{k=1}^{i} E_{i+1,k}(-m)E_{k,i}(m) & \\ \qquad + \sum_{k=i+1}^{N} E_{i+1,k}(-m-1)E_{k,i}(m+1) \Big) & (i \neq 0) \end{cases}$$

(2) 条件 $-K + N = -\hbar_-/\hbar$ の下で，次を満たす代数準同型写像

$$\mathrm{ev}_\alpha^- \colon Y(\hat{\mathfrak{sl}}_N) \to U(\hat{\mathfrak{gl}}_N)_{\mathrm{comp},-}/(c - K)$$

がただ一つ存在する．

$$\mathrm{ev}_\alpha^-(H_{i,0}) = \begin{cases} E_{N,N} - E_{1,1} + K & (i = 0), \\ E_{i,i} - E_{i+1,i+1} & (i \neq 0), \end{cases}$$

$$\mathrm{ev}_\alpha^-(X_{i,0}^+) = \begin{cases} E_{N,1}(1) & (i = 0), \\ E_{i,i+1} & (i \neq 0), \end{cases} \qquad \mathrm{ev}_\alpha^-(X_{i,0}^-) = \begin{cases} E_{1,N}(-1) & (i = 0), \\ E_{i+1,i} & (i \neq 0), \end{cases}$$

$$\mathrm{ev}_\alpha^-(H_{i,1}) = \begin{cases} (\alpha + K\hbar)(E_{N,N} - E_{1,1} + K) - \hbar E_{N,N}(E_{1,1} - K) \\ \quad + \hbar \displaystyle\sum_{m \geq 0} \sum_{k=1}^{N} \Big(E_{k,N}(m) E_{N,k}(-m) - E_{k,1}(m+1) E_{1,k}(-m-1) \Big) \\ \hfill (i = 0), \\ (\alpha + i\hbar/2)(E_{i,i} - E_{i+1,i+1}) - \hbar E_{i,i} E_{i+1,i+1} \\ \quad + \hbar \displaystyle\sum_{m \geq 0} \Big(\sum_{k=1}^{i} E_{k,i}(m) E_{i,k}(-m) + \sum_{k=i+1}^{N} E_{k,i}(m+1) E_{i,k}(-m-1) \\ \quad - \displaystyle\sum_{k=1}^{i} E_{k,i+1}(m) E_{i+1,k}(-m) - \sum_{k=i+1}^{N} E_{k,i+1}(m+1) E_{i+1,k}(-m-1) \Big) \\ \hfill (i \neq 0), \end{cases}$$

$$\mathrm{ev}_\alpha^-(X_{i,1}^+) = \begin{cases} (\alpha + K\hbar) E_{N,1}(1) + \hbar \displaystyle\sum_{m \geq 0} \sum_{k=1}^{N} E_{k,1}(m+1) E_{N,k}(-m) & (i = 0), \\ (\alpha + i\hbar/2) E_{i,i+1} + \hbar \displaystyle\sum_{m \geq 0} \Big(\sum_{k=1}^{i} E_{k,i+1}(m) E_{i,k}(-m) \\ \qquad + \displaystyle\sum_{k=i+1}^{N} E_{k,i+1}(m+1) E_{i,k}(-m-1) \Big) & (i \neq 0), \end{cases}$$

$$\mathrm{ev}_\alpha^-(X_{i,1}^-) = \begin{cases} (\alpha + K\hbar) E_{1,N}(-1) + \hbar \displaystyle\sum_{m \geq 0} \sum_{k=1}^{N} E_{k,N}(m) E_{1,k}(-m-1) & (i = 0), \\ (\alpha + i\hbar/2) E_{i+1,i} + \hbar \displaystyle\sum_{m \geq 0} \Big(\sum_{k=1}^{i} E_{k,i}(m) E_{i+1,k}(-m) \\ \qquad + \displaystyle\sum_{k=i+1}^{N} E_{k,i}(m+1) E_{i+1,k}(-m-1) \Big) & (i \neq 0) \end{cases}$$

注意 3.3 Guay [G] が導入したのは ev_α^- の $\alpha = 1$ の場合である．[G] では $H_{i,1}$ $(i \neq 0)$ における値のみが与えられている．上で述べたものは整理した表示で，オリジナルのものとは一見異なる（がもちろん同値である）．

注意 3.4 先に述べたように $Y(\hat{\mathfrak{sl}}_N)$ は部分代数として $Y_\hbar(\mathfrak{sl}_N)$ を含む．ev_α^+ の $Y_\hbar(\mathfrak{sl}_N)$ への制限は $\mathrm{ev}^{\mathrm{fin}}$（の自己同型によるシフト）には一致しない．

注意 3.5 Feigin-Finkelberg-Negut-Rybnikov [FFNR] は，アファイン Laumon 空間の局所化同変コホモロジー群上にアファインヤンギアン $Y(\hat{\mathfrak{sl}}_N)$ の作用を構成した．その構成では，パラメータと表現のレベル K の関係が $K = N + \hbar_-/\hbar$ で与えられており，これは (2) の条件と同じである（[FFNR, (25)] から従う．[FFNR] のパラメータ $\hbar'$ は，ここでの $\hbar_-$

である）．[FFNR] の表現は $\hat{\mathfrak{gl}}_N$ の（最低ウェイト）普遍 Verma 加群を ev_α^- を通じてアファインヤンギアンの表現とみなしたものになっていることが期待される．

ヤンギアン $Y_\hbar(\mathfrak{gl}_N)$ の evaluation 写像は全射だった．これにあたる性質は自明ではない．

定理 3.6（小寺 [K1], Theorem 4.18, Corollary 4.19）　$\hbar_- \neq 0$ のとき ev_α^+ の像は $U(\hat{\mathfrak{gl}}_N)$ を含む．$\hbar_+ \neq 0$ のとき ev_α^- の像は $U(\hat{\mathfrak{gl}}_N)$ を含む．特に，これらの仮定の下で，evaluation 写像を通じて $\hat{\mathfrak{gl}}_N$ の既約表現を $Y(\hat{\mathfrak{sl}}_N)$ の表現とみなしたものは，また既約である．

4　evaluation 表現

4.1　ヤンギアンの場合

$V(\lambda)$ を $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{C}^N$ を最高ウェイトに持つ $\mathfrak{gl}_N$ の既約表現とする．$V(\lambda)$ は最高ウェイトベクトル v_λ を持ち

$$E_{i,i} v_\lambda = \lambda_i v_\lambda$$

を満たす．$V(\lambda)$ が有限次元になるための必要十分条件は $\lambda_i - \lambda_{i+1} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $(i = 1, \dots, N-1)$ である（以下の議論の Drinfeld 多項式の部分以外にはこの仮定は必要ない）．evaluation 写像 $\mathrm{ev}^{\mathrm{fin}} \colon Y_\hbar(\mathfrak{sl}_N) \to U(\mathfrak{gl}_N)$ を通じて $V(\lambda)$ を $Y_\hbar(\mathfrak{sl}_N)$ の表現とみなし，evaluation 表現と呼ぶ．

補題 4.1

$$H_{i,1} v_\lambda = \hbar(\lambda_i - (i-1)/2)(\lambda_i - \lambda_{i+1}) v_\lambda, \quad X_{i,1}^- v_\lambda = \hbar(\lambda_i - (i-1)/2)(\lambda_i - \lambda_{i+1}) E_{i+1,i} v_\lambda$$

この補題から次が従う．

定理 4.2

$$X_{i,r}^+ v_\lambda = 0, \quad H_{i,r} v_\lambda = \Big(\hbar(\lambda_i - (i-1)/2)\Big)^r (\lambda_i - \lambda_{i+1}) v_\lambda$$

以下 $V(\lambda)$ は有限次元であると仮定する．$a_i = \hbar(\lambda_i - (i-1)/2)$ とおき

$$1 + \hbar \sum_{r \geq 0} a_i^r (\lambda_i - \lambda_{i+1}) z^{-r-1} \in \mathbb{C}[[z^{-1}]]$$

という $H_{i,r}$ の固有値の母函数を考える．$\pi_i(z) = (z - a_i)(z - a_i + \hbar) \cdots (z - a_i + (\lambda_i - \lambda_{i+1} - 1)\hbar)$ とおけば，上の母函数は

$$\frac{z - a_i + (\lambda_i - \lambda_{i+1})\hbar}{z - a_i} = \frac{\pi_i(z + \hbar)}{\pi_i(z)}$$

に等しい．多項式 $\pi_i(z)$ の組を evaluation 表現の Drinfeld 多項式と呼ぶ．

4.2 アファインヤンギアンの場合

4.1 節の議論をアファインヤンギアンに拡張する．$K \in \mathbb{C}$ を固定し，$V(\Lambda)$ を $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N, K) \in \mathbb{C}^{N+1}$ を最高ウェイトに持つ $\hat{\mathfrak{gl}}_N$ のレベル K 既約表現とする．最高ウェイトベクトル v_Λ は

$$E_{i,i} v_\Lambda = \lambda_i v_\Lambda, \quad c v_\Lambda = K v_\Lambda$$

を満たす．$V(\Lambda)$ が可積分表現になるための必要十分条件は $K \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $\lambda_i - \lambda_{i+1} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $(i = 1, \ldots, N-1)$, $\lambda_N - \lambda_1 + K \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ であるが，以下の議論の Drinfeld 多項式の部分以外にはこの仮定は必要ない．パラメータに関する条件 $K + N = -\hbar_+/\hbar$ の下で，evaluation 写像 $\mathrm{ev}_\alpha^+ \colon Y(\hat{\mathfrak{sl}}_N) \to U(\hat{\mathfrak{gl}}_N)_{\mathrm{comp},+}$ が存在し，$V(\Lambda)$ を $Y(\hat{\mathfrak{sl}}_N)$ の表現とみなすことができる．

補題 4.3（[K2], Lemma 4.4, 4.5）

$$H_{i,1} v_\Lambda = \begin{cases} (\alpha + \hbar(\lambda_N + K))(\lambda_N - \lambda_1 + K) v_\Lambda & (i = 0), \\ (\alpha + \hbar(\lambda_i - i/2))(\lambda_i - \lambda_{i+1}) v_\Lambda & (i \neq 0), \end{cases}$$

$$X_{i,1}^- v_\Lambda = \begin{cases} (\alpha + \hbar(\lambda_N + K)) E_{1,N}(-1) v_\Lambda & (i = 0), \\ (\alpha + \hbar(\lambda_i - i/2)) E_{i+1,i} v_\Lambda & (i \neq 0) \end{cases}$$

この補題から次が従う．

定理 4.4（[K2], Theorem 4.1）

$$X_{i,r}^+ v_\Lambda = 0, \quad H_{i,r} v_\Lambda = \begin{cases} \Big(\alpha + \hbar(\lambda_N + K)\Big)^r (\lambda_N - \lambda_1 + K) v_\Lambda & (i = 0), \\ \Big(\alpha + \hbar(\lambda_i - i/2)\Big)^r (\lambda_i - \lambda_{i+1}) v_\Lambda & (i \neq 0) \end{cases}$$

以下 $V(\Lambda)$ は可積分であると仮定する．

$$a_i = \begin{cases} \alpha + \hbar(\lambda_N + K) & (i = 0), \\ \alpha + \hbar(\lambda_i - i/2) & (i \neq 0) \end{cases}$$

とおき，

$$\pi_i(z) = \begin{cases} (z - a_0)(z - a_0 + \hbar) \cdots (z - a_0 + (\lambda_N - \lambda_1 + K - 1)\hbar) & (i = 0), \\ (z - a_i)(z - a_i + \hbar) \cdots (z - a_i + (\lambda_i - \lambda_{i+1} - 1)\hbar) & (i \neq 0) \end{cases}$$

とおくと，$H_{i,r}$ の固有値の母函数は

$$\frac{\pi_i(z + \hbar)}{\pi_i(z)}$$

に等しいことが 4.1 節と同様にしてわかる．従って，多項式 $\pi_i(z)$ の組はアファインヤンギアンの evaluation 表現に対する Drinfeld 多項式と呼ぶべきものである．

謝辞

Feigin-Finkelberg-Negut-Rybnikov [FFNR] の結果との関係について，論文 [K2] を書いた後で中島啓氏に指摘していただきました．

筆者は科研費（課題番号：17H06127, 18K13390）のサポートを受けています．

参考文献

[FFNR] Boris Feigin, Michael Finkelberg, Andrei Negut, and Leonid Rybnikov, *Yangians and cohomology rings of Laumon spaces*, Selecta Math. (N.S.) **17** (2011), no. 3, 573–607.

[G] Nicolas Guay, *Affine Yangians and deformed double current algebras in type A*, Adv. Math. **211** (2007), no. 2, 436–484.

[K1] Ryosuke Kodera, *Braid group action on affine Yangian*, SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. **15** (2019), 020, 28 pages.

[K2] ———, *On Guay's evaluation map for affine Yangians*, arXiv:1806.09884.

[M] Alexander Molev, *Yangians and classical Lie algebras*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 143, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.