数理解析研究所講究録 1359 巻 2004 年 109-116

p-QUASIHYPONORMAL, CLASS $A(s,t)$ 作用素のスペクトルについて

仙台電波工業高等専門学校　内山　敦 (Atsushi Uchiyama)
Sendai National College of Technology
東北薬科大学　棚橋　浩太郎 (Kôtarô Tanahashi)
Department of Mathematics, Tohoku Pharmaceutical University
Sungkyunkwan 大学 Jun Ik Lee
Department of Mathematics, Sungkyunkwan University

ヒルベルト空間上の有界線形作用素 T で不等式 $T^*\{(T^*T)^p-(TT^*)^p\}T \geq 0$ を満たすものを p-quasihyponormal, 不等式 $|T(s,t)|^{\frac{2t}{s+t}} \geq |T|^{2t}$ を満たすものを class $A(s,t)$ 作用素という. ここで $T(s,t)=|T|^sU|T|^t$ は $T=U|T|$ の (一般化された) Aluthge 変換である. p-quasihyponormal は S. Arora と P. Arora [4] によって導入され, class $A(s,t)$ は藤井, Jung, S. H. Lee, M. Y. Lee, 中本 [9] によってはじめて導入された作用素族である. ここでは, 上の 2 つのクラスの作用素のスペクトラムとその作用素にある種の変換を施した作用素のスペクトラムの関係, およびスペクトラムの孤立点とそれに対応するリース射影作用素に関する結果を報告する.

1. p-quasihyponormal operator

p-hyponormal は多数の研究者達によって研究され様々な結果を得られている. p-hyponormal の性質として

- p-hyponormal $\Longrightarrow$ q-hyponormal if $0<q<p$
- $T=U|T|$: p-hyponormal $\Longrightarrow T(1/2,1/2):\begin{cases}\text{hyponormal if } \frac{1}{2}\leq p \\ (p+\frac{1}{2})\text{-hyponormal if } 0<p\leq\frac{1}{2}\end{cases}$

などが有名である. これらの性質より p-hyponormal の研究に hyponormal での豊富な研究結果を利用出来, この研究が発展した. 一方, p-hyponormal と定義が似ている, p-quasihyponormal operator についても p-hyponormal と同様に様々な結果が得られると期待されるが, $p=1$(quasihyponormal) の場合以外はあまり研究されていない.

$$T:p\text{-hyponormal} \Longleftrightarrow \langle (T^*T)^px,x\rangle \geq \langle (TT^*)^px,x\rangle \ \forall x\in\mathcal{H},$$
$$T:p\text{-quasihyponormal} \Longleftrightarrow \langle (T^*T)^px,x\rangle \geq \langle (TT^*)^px,x\rangle \ \forall x\in \mathrm{ran}T.$$

quasihyponormal については, べき乗の計算の必要がないので扱いやすく hyponormal についての種々の結果が quasihyponormal の場合まで拡張されている. p-hyponormal を Aluthge 変換で hyponormal に持ち上げて研究したように, p-quasihyponormal 作用素 $T=U|T|$ を変換 T_p で quasihyponormal へ持ち上げて議論することにより, 次の Theorem 1 と Putnam 型不等式を得た. 変換として Aluthge 変換を用いないのは上に挙げた p-hyponormal の性質は p-quasihyponormal には無いからである.

Theorem 1. $T=U|T|$ が p-quasihyponormal 作用素, $\lambda=re^{i\theta}$ が $\sigma(T)$ の孤立点ならば
(1) $\lambda\in\sigma_p(T)$, $\lambda_q=r^q e^{i\theta}\in\sigma_p(T_q)$ (T は isoloid),
(2) 十分小さな $\epsilon>0$ に対して,

$$E=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-\lambda|=\epsilon}(z-T)^{-1}\,dz,\ E_q=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-\lambda_q|=\epsilon}(z-T_q)^{-1}\,dz$$

とおくと
(i) $E=E_q$
(ii) $\lambda\neq 0$ ならば E は自己共役であり

$$\mathrm{ran}E=\ker(T-\lambda)=\ker(T-\lambda)^*=\ker(T_q-\lambda_q)=\ker(T_q-\lambda_q)^*.$$

(注) この作用素 E を T の λ に対応するリース射影作用素という.

Lemma 1.([13], [17]) T が p-quasihyponormal 作用素ならば
(1) $(T-\lambda)x=0,\ \lambda\neq 0\Longrightarrow(T-\lambda)^*x=0$,
(2) $\|(T-\lambda)x_n\|\to 0,\ \lambda\neq 0, \|x_n\|=1\Longrightarrow\|(T-\lambda)^*x_n\|\to 0$.

注. この補題から, $\|(T-\lambda)x_n\|\to 0,\ \lambda=re^{i\theta}\neq 0, \|x_n\|=1$ ならば

$$\|(|T|-r)x_n\|\to 0,\ |(|T^*|-r)x_n\|\to 0,\ \|(U-e^{i\theta})x_n\|\to 0,\ |(U-e^{i\theta})^*x_n\|\to 0,$$

なので

$$\|(U|T|^q-r^q e^{i\theta})x_n\|\to 0,\ \text{i.e.},\ r^q e^{i\theta}\in\sigma_a(T_q).$$

作用素 T は値域が閉で, かつ $\ker T$ または $\ker T^*$ が有限次元であるとき semi-Fredholm 作用素であるという. このとき, $\mathrm{ind}T:=\dim\ker T-\dim\ker T^*$ をフレドホルム指数という. フレドホルム指数は semi-Fredholm 作用素全体から $\mathbb{Z}\cup\{\pm\infty\}$ への連続写像である.

Lemma 2. $T(\cdot):[0,p]\to B(\mathcal{H})$ がノルム連続写像とする. このとき, $T(0)$, $T(p)$ が semi-Fredholm 作用素で $\mathrm{ind}T(0)\neq\mathrm{ind}T(p)$ ならば, $T(s)$ が semi-Fredholm でないような $s\in(0,p)$ が存在する. 特に, $0\in\sigma_a(T(s))$ である.

Proof. このような $s\in(0,p)$ が存在しないと仮定する. $T([0,p])$ はsemi-Fredholm 作用素の連結部分集合なのですべて同じフレドホルム指数を持つ. これは, 仮定 $\mathrm{ind}T(0)\neq\mathrm{ind}T(p)$ に反する. 後半は次から導かれる.

$$\begin{aligned}0\notin\sigma_a(S)&\Longleftrightarrow\exists c>0, \|Sx\|\geq c\|x\|\ \forall x\in\mathcal{H}\\&\Longleftrightarrow S\ \text{は semi-Fredholm}, \ker S=\{0\}.\end{aligned}$$

Lemma 3. $T=U|T|$ が p-quasihyponormal 作用素ならば $T_q=U|T|^q$ は $\frac{p}{q}$-quasihyponormal 作用素で,
(1) $\sigma_a(T_q)=\{r^q e^{i\theta}:re^{i\theta}\in\sigma_a(T)\}$,

(2) $\sigma(T_q) \setminus \sigma_a(T_q) = \{r^q e^{i\theta} : re^{i\theta} \in \sigma(T) \setminus \sigma_a(T)\}$,
ゆえに
(3) $\sigma(T_q) = \{r^q e^{i\theta} : re^{i\theta} \in \sigma(T)\}$.

Proof. $[\mathrm{ran}T] = [\mathrm{ran}T_q]$, $(T_q{}^*T_q)^{\frac{p}{q}} = (T^*T)^p$, $(T_qT_q{}^*)^{\frac{p}{q}} = (TT^*)^p$ より, T_q は $\frac{p}{q}$-quasihyponormal 作用素である.

(1) $0 \in \sigma_a(T) \Longleftrightarrow 0 \in \sigma_a(T_q)$ と Lemma 1 より

$$\{r^q e^{i\theta} : re^{i\theta} \in \sigma_a(T)\} \subset \sigma_a(T_q).$$

一方, T の代わりに T_q を考えると

$$\{s^{\frac{1}{q}} e^{i\theta} : se^{i\theta} \in \sigma_a(T_q)\} \subset \sigma_a(T).$$

よって, (1) が成立する.

(2) $\ker T = \ker T_q$, $[\mathrm{ran}T] = [\mathrm{ran}T_q]$, $0 \in \sigma_a(T) \Longleftrightarrow 0 \in \sigma_a(T_q)$, $0 \in \sigma(T) \Longleftrightarrow 0 \in \sigma(T_q)$ より, $0 \in \sigma(T) \setminus \sigma_a(T) \Longleftrightarrow 0 \in \sigma(T_q) \setminus \sigma_a(T_q)$.

$re^{i\theta} \neq 0 \in \sigma(T) \setminus \sigma_a(T)$ ならば $r^q e^{i\theta} \in \sigma(T_q) \setminus \sigma_a(T_q)$ を示す. $r^q e^{i\theta} \notin \sigma(T_q) \setminus \sigma_a(T_q)$ と仮定する. (1) より, $r^q e^{i\theta} \notin \sigma_a(T_q)$ なので, $T_q - r^q e^{i\theta}$ は可逆. $S(\cdot) : [0, q] \to B(\mathcal{H})$ を

$$S(t) = T_t - r^t e^{i\theta}$$

と定義する. この写像はノルム連続で $\mathrm{ind}S(0) = \mathrm{ind}(T - re^{i\theta}) \leq -1$, $\mathrm{ind}S(q) = \mathrm{ind}(T_q - r^q e^{i\theta}) = 0$. Lemma 2 より, $s \in (0, q)$ で $0 \in \sigma_a(S(s)) \Longleftrightarrow r^s e^{i\theta} \in \sigma_a(T_s)$ を満たすものが存在. これは Lemma 1(または (1)) より, $re^{i\theta} \in \sigma_a(T)$ となり矛盾. ゆえに,

$$\{r^q e^{i\theta} : re^{i\theta} \in \sigma(T) \setminus \sigma_a(T)\} \subset \sigma(T_q) \setminus \sigma_a(T_q).$$

(1) のときと同様に, T の代わりに T_q を考えると逆向きの包含関係が得られるので (2) が成立する. (1), (2) より, (3) も成立する.

Proposition 1.[15] $T = U|T|$ が quasihyponormal 作用素ならば,

$$\|T^*T - TT^*\| \leq 2\|T\| \left(\frac{1}{\pi} m(\sigma(T))\right)^{\frac{1}{2}},$$

ここで, $m(\cdot)$ は 2 次元ルベーグ測度.

Corollary 1. $T = U|T|$ が p-quasihyponormal ならば

$$\||T|^{2p} - |T^*|^{2p}\| \leq 2\|T\|^p (\frac{p}{\pi} \iint_{re^{i\theta} \in \sigma(T)} r^{2p-1}\, dr d\theta)^{\frac{1}{2}}.$$

Proof. $T_p = U|T|^p$ が quasihyponormal で $\sigma(T_q) = \{r^p e^{i\theta} : re^{i\theta} \in \sigma(T)\}$ なので, Proposition 1 より Corollary 1 が導かれる.

Proof of Theorem 1. (1) $re^{i\theta} \in \sigma(T)$ が孤立点とすると Lemma 1 から $r^p e^{i\theta} \in \sigma(T_p)$ も孤立点. T_p は quasihyponormal (つまり isoloid) なので, $r^p e^{i\theta} \in \sigma_p(T_p)$. Lemma 1 から $re^{i\theta} \in \sigma_p(T)$, $r^q e^{i\theta} \in \sigma_p(T_q)$.

(2) T_p は quasihyponormal なので $\mathrm{ran} E_p = \ker(T_p - \lambda_p) = \ker(T - \lambda)$. [13]

(i) $\lambda = 0$ の場合. $\mathrm{ran} E_p = \ker T_p = \ker T \subset \mathrm{ran} E$

$T = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & B \end{pmatrix}$ on $\mathcal{H} = \mathrm{ran} E_p \oplus (\mathrm{ran} E_p)^{\perp} = \ker T \oplus [\mathrm{ran} T^*]$ とおくと, $\ker U = \ker T$ なので

$$U = \begin{pmatrix} 0 & U_1 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}, \text{ ゆえに } T = \begin{pmatrix} 0 & U_1(A^*A+B^*B)^{\frac{1}{2}} \\ 0 & U_2(A^*A+B^*B)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \ T_p = \begin{pmatrix} 0 & U_1(A^*A+B^*B)^{\frac{p}{2}} \\ 0 & U_2(A^*A+B^*B)^{\frac{p}{2}} \end{pmatrix}.$$

$C = U_1(A^*A+B^*B)^{\frac{p}{2}}$, $D = U_2(A^*A+B^*B)^{\frac{p}{2}}$ とおく. D が可逆であることを示す. D が可逆でなければ仮定から 0 は $\sigma(D)$ の孤立点. F を D の孤立点 0 に対応するリース射影作用素とすると $F \neq 0$. しかし,

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (z - T_p)^{-1}\, dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \begin{pmatrix} z^{-1} & z^{-1}C(z-D)^{-1} \\ 0 & (z-D)^{-1} \end{pmatrix} dz \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma z^{-1}\, dz & \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma z^{-1}C(z-D)^{-1}\, dz \\ 0 & \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (z-D)^{-1}\, dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma z^{-1}C(z-D)^{-1}\, dz \\ 0 & F \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

なので $\mathrm{ran} E_p = \ker T$ に矛盾する. ゆえに D は可逆. このことと,

$$0 < D^*D \leq (A^*A+B^*B)^p$$

から A^*A+B^*B, U_2, $B = U_2(A^*A+B^*B)^{\frac{1}{2}}$ も可逆である. ゆえに,

$$\begin{aligned} E_p &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma z^{-1}C(z-D)^{-1}\, dz \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -CD^{-1}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \{z^{-1} - (z-D)^{-1}\}\, dz \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -CD^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -U_1(A^*A+B^*B)^{\frac{p}{2}}(A^*A+B^*B)^{-\frac{p}{2}}U_2{}^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -U_1U_2{}^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

同様に,

$$E = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'} \begin{pmatrix} z^{-1} & z^{-1}A(z-B)^{-1} \\ 0 & (z-B)^{-1} \end{pmatrix} dz = \begin{pmatrix} 1 & -AB^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -U_1U_2{}^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

よって, $E_p = E$ が成立.

$\lambda = re^{i\theta} \neq 0$ の場合. T_p が quasihyponormal なので,

$\mathrm{ran} E_p = \ker(T_p - \lambda_p) = \ker(T_p - \lambda_p)^* = \ker(T - \lambda)$, E_p が自己共役. $\mathrm{ran} E_p = \ker(T - \lambda)$ が T を reduce するので,

$$T = \lambda \oplus T' \text{ on } \mathcal{H} = \ker(T - \lambda) \oplus [\mathrm{ran}(T - \lambda)^*].$$

ここで, T' が p-quasihyponormal (よって isoloid) で, $\lambda \notin \sigma_p(T')$ なので, $T'-\lambda$ は可逆. ゆえに, $\ker(T-\lambda) = \ker(T-\lambda)^*$ かつ,

$$E = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'}(z-\lambda)^{-1} \oplus (z-T')^{-1}\,dz = 1 \oplus 0 = E_p.$$

T の代わりに T_q を考えると $E_q = E_p = E$ が導かれる.

2. Class A(s, t) operator

この節では, class $A(s,t)$ 作用素のリース射影作用素に関し p-quasihyponormal 作用素の場合とパラレルな結果を得たのでそれを報告する.

Definition. $|T^2| \geq |T|^2$ を満たす作用素 T を class A 作用素という.

Lemma 4.(伊藤, 山崎 [7], [8]) T が class $A(s,t)$ $(0 < s,t \leq 1)$ ならば T は class A.

Lemma 5. T が class A ならば
(1) $(T-\lambda)x = 0,\ \lambda \neq 0 \Longrightarrow (T-\lambda)^*x = 0$
(2) $\|(T-\lambda)x_n\| \to 0,\ \lambda \neq 0, \|x_n\| = 1 \Longrightarrow \|(T-\lambda)^*x_n\| \to 0$

Proof. (2) $\|Tx_n\|^2 = \langle T^*Tx_n, x_n\rangle \leq \langle |T^2|x_n, x_n\rangle \leq \||T^2|x_n\| = \|T^2x_n\|$.

$\|(|T^2| - |\lambda|^2)x_n\|^2 = \|T^2x_n\|^2 - 2|\lambda|^2\langle|T^2|x_n, x_n\rangle + |\lambda|^4 \to |\lambda|^4 - 2|\lambda|^4 + |\lambda|^4 = 0,$

$$\begin{aligned}\|(|T^2| - T^*T)^{\frac{1}{2}}x_n\|^2 &= \langle|T^2|x_n, x_n\rangle - \langle T^*Tx_n, x_n\rangle \\ &\leq \|T^2x_n\| - \|Tx_n\|^2 \to |\lambda|^2 - |\lambda|^2 = 0,\end{aligned}$$

から, $\|(T^*T - |\lambda|^2)x_n\| \to 0$. よって,

$$\begin{aligned}\|\lambda(T-\lambda)^*x_n\| &= \|(T^*T - |\lambda|^2)x_n - T^*(T-\lambda)x_n\| \\ &\leq \|(T^*T - |\lambda|^2)x_n\| + \|T^*(T-\lambda)x_n\| \to 0.\end{aligned}$$

ゆえに, $\|(T-\lambda)^*x_n\| \to 0$.

注. この補題から, $\|(T-\lambda)x_n\| \to 0,\ \lambda = re^{i\theta} \neq 0, \|x_n\| = 1$ ならば

$\|(|T| - r)x_n\| \to 0,\ |(|T^*| - r)x_n\| \to 0,\ \|(U - e^{i\theta})x_n\| \to 0,\ |(U - e^{i\theta})^*x_n\| \to 0,$

なので

$$\|(U|T|^q - r^qe^{i\theta})x_n\| \to 0, \text{ i.e., } r^qe^{i\theta} \in \sigma_a(T_q).$$

Theorem 2. $T = U|T|$ が class $A(s,t)$ $(0 < s, t \leq 1)$ ならば

$$S(\alpha) = U|T|^{1+\alpha(s+t-1)} \begin{cases} 0 \leq \alpha & (\text{if } s+t \geq 1) \\ 0 \leq \alpha \leq \frac{1-\max\{s,t\}}{1-s-t} & (\text{if } 0 < s+t < 1) \end{cases}$$

は class $A(\frac{s}{1+\alpha(s+t-1)}, \frac{t}{1+\alpha(s+t-1)})$ であり,
(1) $\sigma_a(S(\alpha)) = \{r^{1+\alpha(s+t-1)}e^{i\theta} : re^{i\theta} \in \sigma_a(T)\}$,
(2) $\sigma(S(\alpha)) \setminus \sigma_a(S(\alpha)) = \{r^{1+\alpha(s+t-1)}e^{i\theta} : re^{i\theta} \in \sigma(T) \setminus \sigma_a(T)\}$,
ゆえに
(3) $\sigma(S(\alpha)) = \{r^{1+\alpha(s+t-1)}e^{i\theta} : re^{i\theta} \in \sigma(T)\}$.

Proof. $S(\alpha)$ が class $A(\frac{s}{1+\alpha(s+t-1)}, \frac{t}{1+\alpha(s+t-1)})$ は明らか. s, t, $\frac{s}{1+\alpha(s+t-1)}$, $\frac{t}{1+\alpha(s+t-1)}$ ≤ 1 より, T と $S(\alpha)$ は class A である.
(1) $0 \in \sigma_a(T) \Longleftrightarrow 0 \in \sigma_a(T_q)$ と Lemma 5 より

$$\{r^{1+\alpha(s+t-1)}e^{i\theta} : re^{i\theta} \in \sigma_a(T)\} \subset \sigma_a(S(\alpha)).$$

一方, T の代わりに $S(\alpha)$ を考えると

$$\{s^{\frac{1}{1+\alpha(s+t-1)}}e^{i\theta} : se^{i\theta} \in \sigma_a(S(\alpha))\} \subset \sigma_a(T).$$

よって, (1) が成立する.
(2) $\ker T = \ker S(\alpha)$, $[\mathrm{ran} T] = [\mathrm{ran} S(\alpha)]$, $0 \in \sigma_a(T) \Longleftrightarrow 0 \in \sigma_a(S(\alpha))$,
$0 \in \sigma(T) \Longleftrightarrow 0 \in \sigma(S(\alpha))$ より, $0 \in \sigma(T) \setminus \sigma_a(T) \Longleftrightarrow 0 \in \sigma(S(\alpha)) \setminus \sigma_a(S(\alpha))$.
$re^{i\theta} \neq 0 \in \sigma(T) \setminus \sigma_a(T)$ ならば $r^{1+\alpha(s+t-1)}e^{i\theta} \in \sigma(S(\alpha)) \setminus \sigma_a(S(\alpha))$ を示す.
$r^{1+\alpha(s+t-1)}e^{i\theta} \notin \sigma(S(\alpha)) \setminus \sigma_a(S(\alpha))$ と仮定する. (1) より, $r^{1+\alpha(s+t-1)}e^{i\theta} \notin \sigma_a(S(\alpha))$ なので, $S(\alpha) - r^{1+\alpha(s+t-1)}e^{i\theta}$ は可逆. $S'(\cdot) : [0, \alpha] \to B(\mathcal{H})$ を

$$S'(\beta) = S(\beta) - r^{1+\beta(s+t-1)}e^{i\theta}$$

と定義する. この写像はノルム連続で $\mathrm{ind} S'(0) = \mathrm{ind}(T - re^{i\theta}) \leq -1$, $\mathrm{ind} S'(\alpha) = \mathrm{ind}(S(\alpha) - r^{1+\alpha(s+t-1)}e^{i\theta}) = 0$. Lemma 2 より, $\beta \in (0, \alpha)$ で $0 \in \sigma_a(S'(\beta)) \Longleftrightarrow$ $r^{1+\beta(s+t-1)}e^{i\theta} \in \sigma_a(S(\beta))$ を満たすものが存在. これは Lemma 5 (または (1)) より, $re^{i\theta} \in \sigma_a(T)$ となり矛盾. ゆえに,

$$\{r^{1+\alpha(s+t-1)}e^{i\theta} : re^{i\theta} \in \sigma(T) \setminus \sigma_a(T)\} \subset \sigma(S(\alpha)) \setminus \sigma_a(S(\alpha)).$$

(1) のときと同様に, T の代わりに $S(\alpha)$ を考えると逆向きの包含関係が得られるので (2) が成立する. (1), (2) より, (3) が成立する.

Corollary. $T = U|T|$ が class $A(s,t)$ $(0 < s, t \leq 1)$ ならば

$$\sigma(T(s,t)) = \{r^{s+t}e^{i\theta} : re^{i\theta} \in \sigma(T)\}.$$

Proof $\sigma(T(s,t)) = \sigma(U|T|^{s+t})$ と Theorem 2 から成り立つ.

Theorem 3. $T = U|T|$ が class $A(s,t)$ $(0 < s,t \leq 1)$, $\lambda = re^{i\theta} \neq 0$ が $\sigma(T)$ の孤立点ならば
(1) $\lambda \in \sigma_p(T)$, $\lambda_{s+t} = r^{s+t}e^{i\theta} \in \sigma_p(T(s,t))$ (T は isoloid),
(2) 十分小さな $\epsilon > 0$ に対して,

$$E = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-\lambda|=\epsilon}(z-T)^{-1}\,dz,\quad E(s,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-\lambda_{s+t}|=\epsilon}(z-T(s,t))^{-1}\,dz$$

とおくと
(i) $E = E(s,t)$, かつ E は自己共役,
(ii)
$$\begin{aligned}\mathrm{ran}E &= \ker(T-\lambda) = \ker(T-\lambda)^* \\ &= \ker(T(s,t)-\lambda_{s+t}) = \ker(T(s,t)-\lambda_{s+t})^*.\end{aligned}$$

Proof. (1) T が class A (よって paranormal. ゆえに, isoloid) なので, $\lambda \in \sigma_p(T)$. Lemma 5 より, $\lambda_{s+t} = r^{s+t}e^{i\theta} \in \sigma_p(T(s,t))$.
(2) Lemma 5 より $\ker(T-\lambda)$ は T を reduce する.

$$T = \lambda \oplus T' \text{ on } \mathcal{H} = \ker(T-\lambda) \oplus [\mathrm{ran}(T-\lambda)^*].$$

ここで, T' が class A (よって isoloid) で, $\lambda \notin \sigma_p(T')$ なので, $T' - \lambda$ は可逆. ゆえに, $\ker(T-\lambda) = \ker(T-\lambda)^*$. 同様に, $T'(s,t) - \lambda_{s+t}$ も可逆なので,

$$\ker(T(s,t)-\lambda_{s+t}) = \ker(T(s,t)-\lambda_{s+t})^* = \ker(T-\lambda) = \ker(T-\lambda)^*.$$

$$E = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'}(z-\lambda)^{-1} \oplus (z-T')^{-1}\,dz = 1 \oplus 0,$$

$$E(s,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}(z-\lambda_{s+t})^{-1} \oplus (z-T'(s+t))^{-1}\,dz = 1 \oplus 0.$$

ゆえに, E は自己共役で, $E = E(s,t)$,

$$\mathrm{ran}E = \ker(T-\lambda) = \ker(T-\lambda)^* = \ker(T(s,t)-\lambda_{s+t}) = \ker(T(s,t)-\lambda_{s+t})^*.$$

References

[1] A. Aluthge, *On p-hyponormal operators for* $0 < p < 1$, Integral Equations and Operator Theory, 13 (1990) 307–315.

[2] A. Aluthge and D. Wang, *w-hyponormal operators*, Integral Equations and Operator Theory, 36 (2000) 1–10.

[3] A. Aluthge and D. Xia, *A trace estimate of* $(T^*T)^p - (TT^*)^p$, Integral Equations and Operator Theory, 13 (1989) 300–303.

[4] S. C. Arora and P. Arora, *On p-quasihyponormal operators for* $0 < p < 1$, Yokohama Math. J., 41 (1993) 25–29.

[5] M. Chō and T. Huruya, *p-hyponormal operators* $(0 < p < \frac{1}{2})$, Comment Math., 33 (1993) 23–29.

[6] M. Chō and M. Itoh, *Putnam inequality for p-hyponormal operators*, Proc. Amer. Math. Soc., 123 (1995) 2435–2440.

[7] M. ITO, *Some classes of operators with generalized Aluthge transform*, SUT J. Math., 35 (1999), 149–165.

[8] M. ITO AND T. YAMAZAKI, *Relations between two inequalities* $(B^{\frac{r}{2}}A^pB^{\frac{r}{2}})^{\frac{r}{p+r}} \leq B^p$ *and* $A^p \leq (A^{\frac{p}{2}B^r}A^pB^{\frac{p}{2}})^{\frac{p}{p+r}}$ *and their applications*, Integral Equations and Operator Theory, 44 (2002), 442–450.

[9] M. FUJII, D. JUNG, S. H. LEE, M. Y. LEE AND R. NAKAMOTO,*Some classes of operators related to paranormal and* log-*hyponormal operators*, Math. Japonica, 51 (2000), 395–402.

[10] C. R. PUTNAM, *An inequality for the area of hyponormal spectra*, Math. Z., 116 (1970), 323–330.

[11] K. TANAHASHI, *On* log-*hyponormal operators*, Integral Equations and Operator Theory, 34 (1999), 364–372.

[12] K. TANAHASHI, *Putnam's inequalities for* log-*hyponormal operators*, Integral Equations and Operator Theory (to appear).

[13] K. TANAHASHI AND A. UCHIYAMA, *Isolated point of spectrum of p-quasihyponormal operators*, Linear Algebras and Its Applications, 341 (2002), 345–350.

[14] A. UCHIYAMA AND K. TANAHASHI, *On the Riesz idempotent of class A operators*, Mathematical Inequalities & Applications, 5 (2002), 291–298.

[15] A. UCHIYAMA, *Inequalities of Putnam and Berger-Shaw for p-quasihyponormal operators*, Integral Equations and Operator theory, 34 (1999), 91–106.

[16] A. UCHIYAMA, *Weyl's theorem for classA operators*, Mathematical Inequalities & Applications, 4 (2001), 143–150.

[17] A. UCHIYAMA, *On p-quasihyponormal operators*, preprint.

[18] D. XIA, *On the non-normal operators–semihyponormal operators*, Sci. Sinica., 23 (1980), 700–713.

[19] D. XIA, *Spectral theory of hyponormal operators*, Birkhäuser Verlag, Basel., 1983.