数理解析研究所講究録 1359 巻 2004 年 117-126

(p,k)-QUASIHYPONORMAL 作用素のスペクトルについて

東北薬科大学 棚橋 浩太郎 (Kôtarô Tanahashi)
Department of Mathematics, Tohoku Pharmaceutical University
仙台電波工業高等専門学校 内山 敦 (Atsushi Uchiyama)
Sendai National College of Technology
神奈川大学 長 宗雄 (Muneo Chô)
Fuculty of Engeneering, Kanagawa University

[概要]
ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の有界作用素 $T \in B(\mathcal{H})$ が (p,k)-quasihyponormal とは

$$T^{*k}((T^*T)^p - (TT^*)^p)T^k \geq 0$$

となるときをいう。ただし $0 < p \leq 1, k$ は正の整数とする。この論文の目的は (p,k)-quasihyponormal operator T の孤立点スペクトル $\lambda_0 \in \sigma(T)$ に関する Riesz idempotent を E とおくと

(1) $\lambda_0 \neq 0$ なら E は self-adjoint で $E\mathcal{H} = \ker(T-\lambda_0) = \ker((T-\lambda_0)^*)$

(2) $\lambda_0 = 0$ なら $E\mathcal{H} = \ker(T^k)$

が成り立つことを示すことである。

[はじめに]

p-hyponormal operator T は $(T^*T)^p - (TT^*)^p \geq 0$ となる作用素であるが、これは hyponormal operator, $T^*T - TT^* \geq 0$, の一般化であり、Aluthge によって導入されて以来、多くの研究者によって面白い性質が解明されつつある ([1, 11, 15])。p-quasihyponormal operator は $T\,((T^*T)^p - (TT^*)^p)\,T^* \geq 0$ となる作用素であるが、A.C. Arora ら [2] によって導入されたもので p-hyponormal operator の面白い性質のいくつかはこの作用素についても成り立っていることがわかってきた ([2, 8, 13])。一方、かなり以前から B.C. Gupta ら [3] によって k-qusihyponormal operator, $T^k\,(T^*T - TT^*)\,T^{*k} \geq 0$, が導入されて、その性質が調べられていた。$p$-quasihyponormal operator と k-quasihyponormal operator は違う概念であるが、同じ用語を使っているので、このままでは混乱するから、これらの作用素を統合して調べてはどうかという提案が Il Bong Jung によってなされていた。Kim [7] による (p,k)-quasihyponormal operator の研究はこの提案を具体化したものだといえる。Löwner-Heinz's inequality ([6, 9]) から p-hyponormal operator は q-hyponormal $(0 < q \leq p)$ であり、明らかに (p,k)-quasihyponormal operator は $(p,k+1)$-quasihyponormal であるが、$(p,1)$-quasihyponormal operator は必ずしも $(q,1)$-quasihyponormal $(0 < q \leq p)$ とは限らない ([14])。

著者らは p-hyponormal, log-hyponormal, p-quasihyponormal operator の孤立点スペクトルに関する Riesz idempotent の性質を調べてきた。一般に作用素 $T \in B(\mathcal{H})$ の孤立点スペクトル $\lambda_0 \in \sigma(T)$ に関する Riesz idempotent $E = E(\lambda_0)$ は

$$E = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-\lambda_0|=r}(\lambda - T)^{-1}d\lambda$$

で定義される作用素で

$$\begin{aligned} E^2 &= E, \\ ET &= TE, \\ \sigma(T|E\mathcal{H}) &= \{\lambda_0\}, \\ \ker((T-\lambda_0)^n) &\subset E\mathcal{H}, \quad n = 1,2,3,\cdots \end{aligned}$$

を満たしている。筆者らは T が p-hyponormal, log-hyponormal の場合 E は self-adjoint で

$$E\mathcal{H} = \ker(T-\lambda_0) = \ker((T-\lambda_0)^*)$$

となることを示した ([4])。更に、T が p-quasihyponormal operator の場合、$\lambda_0 \neq 0$ なら E は self-adjoint で

$$E\mathcal{H} = \ker(T-\lambda_0) = \ker((T-\lambda_0)^*)$$

となるが、$\lambda_0 = 0$ なら E は必ずしも self-adjoint にはならないことを示した ([12])。この論文では (p,k)-quasihyponormal operator の場合も p-hyponormal, p-quasihyponormal operator 同じ性質が成り立つことを示す。

[主定理]

(p,k)-quasihyonormal operator $T \in B(\mathcal{H})$ の孤立点スペクトル λ_0 に関する Riesz idempotent を E とおくと

(1) $\lambda_0 \neq 0$ なら E は self-adjoint で $E\mathcal{H} = \ker(T-\lambda_0) = \ker((T-\lambda_0)^*)$

(2) $\lambda_0 = 0$ なら $E\mathcal{H} = \ker(T^k)$

が成り立つ。

次の結果は Kim [7] による。

[補題 1(Kim [7])]

$T \in B(\mathcal{H})$ は (p,k)-quasihyponormal とする。$T^k\mathcal{H}$ が dense でないなら

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{pmatrix}, \ \mathcal{H} = [T^k\mathcal{H}] \oplus \ker((T^*)^k)$$

と表せる。ここで $[T^k\mathcal{H}]$ は $T^k\mathcal{H}$ のノルム閉包である。このとき T_1 は p-hyponormal で，

$$T_3^k = 0, \quad \sigma(T) = \sigma(T_1) \cup \{0\}$$

となる。

[補題 2]

$T \in B(\mathcal{H})$ は (p,k)-quasihyponormal とする。このとき $(T-\lambda)x = 0, \lambda \neq 0$ なら $(T-\lambda)^*x = 0$ となる。

[証明]

$\mathcal{H}_0 = \mathrm{span}\,\{x\}$ として

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{pmatrix} \text{ on } \mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_0^\perp$$

と表すと $T_1 = \lambda$ である。Q を $\mathcal{H}_0$ への直交射影とおくと Hansen の不等式から

$$|\lambda|^{2p} = (T_1^*T_1)^p = (QT^*TQ|_{\mathcal{H}_0})^p = (QT^*TQ)^p|_{\mathcal{H}_0} \geq Q(T^*T)^pQ|_{\mathcal{H}_0}$$

となり、一方 Löwner-Heinz の不等式から

$$|\lambda|^{2p} = (T_1T_1^*)^p = (TQT^*|_{\mathcal{H}_0})^p = (TQT^*)^p|_{\mathcal{H}_0} \leq Q(TT^*)^pQ|_{\mathcal{H}_0}$$

となる。ここで

$$x = \lambda^{-1}Tx = \lambda^{-2}T^2x = \cdots = \lambda^{-k}T^kx \in T^k\mathcal{H}$$

なので、仮定より

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} (T_1^*T_1)^p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\geq Q(T^*T)^pQ \\ &\geq Q(TT^*)^pQ \geq Q(TQT^*)^pQ \geq \begin{pmatrix} (T_1T_1^*)^p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

であるから

$$Q(TT^*)^pQ|_{\mathcal{H}_0} = (TQT^*|_{\mathcal{H}_0})^p = |\lambda|^{2p}$$

となる。さて $(TT^*)^{\frac{p}{2}} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y^* & Z \end{pmatrix}$ とおくと

$$X = Q(TT^*)^{\frac{p}{2}}Q|_{\mathcal{H}_0} \geq Q(TQT^*)^{\frac{p}{2}}Q|_{\mathcal{H}_0} = (TQT^*|_{\mathcal{H}_0})^{\frac{p}{2}} = |\lambda|^p$$

となるが、一方

$$(TT^*)^p = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y^* & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ Y^* & Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^2+YY^* & XY+YZ \\ Y^*X+ZY^* & Y^*Y+Z^2 \end{pmatrix}$$

なので

$$|\lambda|^{2p} = X^2+YY^* \geq X^2 \geq |\lambda|^{2p}$$

となる。よって

$$Y=0, \quad X=|\lambda|^p$$

である。よって

$$(TT^*)^{\frac{p}{2}} = \begin{pmatrix} |\lambda|^p & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix}$$

となるので

$$TT^* = \begin{pmatrix} |\lambda|^2 & 0 \\ 0 & Z^{\frac{2}{p}} \end{pmatrix}$$

となる。一方

$$TT^* = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^* & 0 \\ T_2^* & T_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\lambda|^2+T_2T_2^* & T_2T_3^* \\ T_3T_2^* & T_3T_3^* \end{pmatrix}$$

より $T_2=0$ が得られるから

$$(T-\lambda)^*x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (T_3-\lambda)^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

となる。 □

[補題 3]
$T \in B(\mathcal{H})$ は (p,k)-quasihyponormal とするとき次が成り立つ。

(1) $\|T^nx\|^2 \leq \|T^{n-1}x\|\|T^{n+1}x\| \qquad (\forall\|x\|=1, k \leq \forall n \in \mathbb{Z}_+)$

(2) もし $T^n=0$ となる $n \geq k$ があれば $T^k=0$ である。

(3) $\|T^n\|^n \leq \|T^{n-1}\|^n r(T^n) \qquad (k \leq \forall n \in \mathbb{Z}_+)$
ただし $r(T^n)$ は T^n の spectral radius である。

[証明]

(1) (p,k)-quasihyponormal operator は $(p,k+1)$-quasihyponormal であるから $n=k$ としてよい。Hölder-McCarthy の不等式 [10] より

$$\begin{aligned}\langle T^{*k}(TT^*)^pT^kx, x\rangle &= \langle (T^*T)^{p+1}T^{k-1}x, T^{k-1}x\rangle \\ &\geq \|T^{k-1}x\|^{-2p}\langle (T^*T)T^{k-1}x, T^{k-1}x\rangle^{p+1} \\ &= \|T^{k-1}x\|^{-2p}\|T^kx\|^{2p+2}\end{aligned}$$

となり、一方

$$\begin{aligned}\langle T^{*k}(T^*T)^pT^kx, x\rangle &= \langle (T^*T)^pT^kx, T^kx\rangle \\ &\le \|T^kx\|^{2-2p}\langle (T^*T)T^kx, T^kx\rangle^p \\ &= \|T^kx\|^{2-2p}\|T^{k+1}x\|^{2p}\end{aligned}$$

であるから、これを整理して (1) が得られる。

(2) $T^{k+1}=0$ なら (1) から $T^k=0$ となる。

(3) $n=k$ としてよい。(1) より

$$\frac{\|T^k\|}{\|T^{k-1}\|} \le \frac{\|T^{k+1}\|}{\|T^k\|} \le \frac{\|T^{k+2}\|}{\|T^{k+1}\|} \le \cdots \le \frac{\|T^{mk}\|}{\|T^{mk-1}\|}$$

なので

$$\left(\frac{\|T^k\|}{\|T^{k-1}\|}\right)^{mk-k+1} \le \frac{\|T^k\|}{\|T^{k-1}\|} \times \frac{\|T^{k+1}\|}{\|T^k\|} \times \cdots \times \frac{\|T^{mk}\|}{\|T^{mk-1}\|} = \frac{\|T^{mk}\|}{\|T^{k-1}\|}$$

よって

$$\left(\frac{\|T^k\|}{\|T^{k-1}\|}\right)^{k-\frac{k}{m}+\frac{1}{m}} \le \frac{\|T^{mk}\|^{\frac{1}{m}}}{\|T^{k-1}\|^{\frac{1}{m}}}$$

となる。ここで $m\to\infty$ とすればよい。 □

[注意]

$k=1$ の場合 (3) は $\|T\|=r(T)$ を示しているが、これは [8] で得られている結果である。

[補題 4]

$T\in B(\mathcal{H})$ は (p,k)-quasihyponormal で $\mathcal{Y}\subset\mathcal{H}$ は T の invariant subspace とする。このとき $T|_{\mathcal{Y}}$ も (p,k)-quasihyponormal である。

[証明]

Q を $\mathcal{Y}$ への直交射影とし $T_1=T|_{\mathcal{Y}}$ とおく。このとき Hansen の不等式から

$$(T_1^*T_1)^p = (QT^*TQ|_{\mathcal{Y}})^p = (QT^*TQ)^p|_{\mathcal{Y}} \ge \{Q(T^*T)^pQ\}|_{\mathcal{Y}}$$

が成り立ち、一方、 Löwner-Heinz's ([6, 9]) の不等式から

$$(T_1T_1^*)^p = (TQT^*|_{\mathcal{Y}})^p = (TQT^*)^p|_{\mathcal{Y}} \le \{Q(TT^*)^pQ\}|_{\mathcal{Y}}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}T_1^{*k}(T_1^*T_1)^pT_1^k &\ge T_1^{*k}\{Q(T^*T)^pQ\}|_{\mathcal{Y}}T_1^k \\ &\ge T_1^{*k}\{Q(TT^*)^pQ\}|_{\mathcal{Y}}T_1^k \ge T_1^{*k}(T_1T_1^*)^pT_1^k\end{aligned}$$

となる。さて $y \in \mathcal{Y}$ とすると

$$
\begin{aligned}
&\langle T_1^{*k}\{(T_1^*T_1)^p - (T_1T_1^*)^p\} T_1^k y, y\rangle \\
&\geq \langle T_1^{*k}\{Q(T^*T)^pQ|_{\mathcal{Y}} - Q(TT^*)^pQ\}|_{\mathcal{Y}} T_1^k y, y\rangle \\
&= \langle Q\{(T^*T)^p - (TT^*)^p\} Q|_{\mathcal{Y}} T_1^k y, T_1^k y\rangle \\
&= \langle \{(T^*T)^p - (TT^*)^p\} T^k y, T^k y\rangle \geq 0
\end{aligned}
$$

となるので T_1 は (p,k)-quasihyponormal である。 □

[主定理の証明]

(1) もし $T^k\mathcal{H}$ が dense ならば T は p-hyponormal になるので、この場合は [4] で示されている。よって $T^k\mathcal{H}$ は dense でないとしてよい。補題 1 から

$$
T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{pmatrix} \text{ on } \mathcal{H} = [T^k\mathcal{H}] \oplus \ker(T^{*k})
$$

と表すと $\sigma(T) = \sigma(T_1) \cup \{0\}$ なので $\lambda_0 \in \sigma(T_1)$ である。すると

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \begin{pmatrix} \lambda - T_1 & -T_2 \\ 0 & \lambda - T_3 \end{pmatrix}^{-1} d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \begin{pmatrix} (\lambda - T_1)^{-1} & (\lambda - T_1)^{-1}T_2(\lambda - T_3)^{-1} \\ 0 & (\lambda - T_3)^{-1} \end{pmatrix} d\lambda
\end{aligned}
$$

となる。ここで γ は $0 \notin \Delta, \Delta \cap \sigma(T) = \{\lambda_0\}$ となる小さな閉円盤 $\Delta = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| \leq r\}$ の境界である。さて $E_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\lambda - T_1)^{-1} d\lambda$ を T_1 の λ_0 に関する Riesz idempotent とおくと、補題 1 と [4] から E_1 は self-adjoint で

$$
E_1[T^k\mathcal{H}] = \ker(\lambda_0 - T_1) = \ker((\lambda_0 - T_1)^*)
$$

となる。ここで

$$
X = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\lambda - T_1)^{-1}T_2(\lambda - T_3)^{-1} d\lambda = 0
$$

を示す。$T_3^k = 0$ なので

$$
(\lambda - T_3)^{-1} = \frac{1}{\lambda} + \frac{T_3}{\lambda^2} + \frac{T_3^2}{\lambda^3} + \cdots + \frac{T_3^{k-1}}{\lambda^k}
$$

である。よって

$$
\begin{aligned}
X &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\lambda - T_1)^{-1}T_2\frac{1}{\lambda} d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\lambda - T_1)^{-1}T_2\frac{T_3}{\lambda^2} d\lambda \\
&\quad + \cdots + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\lambda - T_1)^{-1}T_2\frac{T_3^{k-1}}{\lambda^k} d\lambda \\
&= X_0 + X_1 + \cdots + X_{k-1}
\end{aligned}
$$

となる。また、

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_0} - \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0^2} + \frac{(\lambda - \lambda_0)^2}{\lambda_0^3} - \cdots$$

より

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\lambda - T_1)^{-1} T_2 \frac{1}{\lambda_0} d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\lambda - T_1)^{-1} T_2 \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0^2} d\lambda + \cdots \\ &= \frac{1}{\lambda_0} E_1 T_2 - \frac{1}{\lambda_0^2}(T_1 - \lambda_0) E_1 T_2 + \frac{1}{\lambda_0^3}(T_1 - \lambda_0)^2 E_1 T_2 - \cdots . \end{aligned}$$

である。実は

$$E_1 T_2 = 0$$

であることを示そう。任意に $x \in [T^k \mathcal{H}]$ をとって $y = E_1 x$ とおく。すると [4] から

$$y \in \ker(\lambda_0 - T_1) = \ker((\lambda_0 - T_1)^*)$$

であるから

$$\begin{aligned} (\lambda_0 - T)\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda_0 - T_1 & -T_2 \\ 0 & \lambda_0 - T_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\lambda_0 - T_1)y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned} 0 = (\lambda_0 - T)^* \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (\lambda_0 - T_1)^* & 0 \\ -T_2^* & (\lambda_0 - T_3)^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\lambda_0 - T_1)^* y \\ -T_2^* y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。従って $T_2^* y = T_2^* E_1 x = 0$ である。よって $T_2^* E_1 = 0$、従って $E_1 T_2 = 0$ が得られる。よって $X_0 = 0$ である。また

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{2(\lambda - \lambda_0)}{\lambda_0^3} + \frac{3(\lambda - \lambda_0)^2}{\lambda_0^4} - \cdots$$

から

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\lambda - T_1)^{-1} T_2 \frac{T_3}{\lambda^2} d\lambda \\ &= \frac{1}{\lambda_0^2} E_1 T_2 T_3 - \frac{2}{\lambda_0^3}(T_1 - \lambda_0) E_1 T_2 T_3 + \frac{3}{\lambda_0^4}(T_1 - \lambda_0)^2 E_1 T_2 T_3 - \cdots \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。同様に $X_2 = X_3 = \cdots = X_{k-1} = 0$ となるので $X = 0$ が得られる。よって

$$E = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから E は selfadjoint になり

$$\begin{aligned} E\mathcal{H} &= E_1[T^k\mathcal{H}] \oplus \{0\} \\ &= \ker(T_1 - \lambda_0) \oplus \{0\} = \ker((T_1 - \lambda_0)^*) \oplus \{0\} \end{aligned}$$

となる。次に、任意に $x \in E\mathcal{H}$ をとる。すると

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_1 \in \ker(T_1 - \lambda_0)$$

と表されるので

$$(T - \lambda_0)x = \begin{pmatrix} T_1 - \lambda_0 & T_2 \\ 0 & T_3 - \lambda_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (T_1 - \lambda_0)x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

となる。よって $E\mathcal{H} = \ker(T - \lambda_0)$ が得られた。

次に $\ker(T-\lambda_0) = \ker((T-\lambda_0)^*)$ を示す。補題 2 から $\ker(T-\lambda_0) \subset \ker((T-\lambda_0)^*)$ は示されているので $\ker((T - \lambda_0)^*) \subset \ker(T - \lambda_0)$ を示せばよい。任意に

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \ker((T - \lambda_0)^*)$$

をとる。すると

$$\begin{aligned} 0 = (T - \lambda_0)^*x &= \begin{pmatrix} (T_1 - \lambda_0)^* & 0 \\ T_2^* & (T_3 - \lambda_0)^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (T_1 - \lambda_0)^*x_1 \\ T_2^*x_1 + (T_3 - \lambda_0)^*x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので

$$x_1 \in \ker((T_1 - \lambda_0)^*) = \ker(T_1 - \lambda_0)$$

である。また

$$(T - \lambda_0)\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 - \lambda_0 & T_2 \\ 0 & T_3 - \lambda_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (T_1 - \lambda_0)x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

より補題 2 から

$$0 = (T - \lambda_0)^* \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (T_1 - \lambda_0)^*x_1 \\ T_2^*x_1 \end{pmatrix}$$

となるので $T_2^* x_1 = 0$ である。よって $(T_3 - \lambda_0)^* x_2 = 0$ となるが $T_3^k = 0, \lambda_0 \neq 0$ なので $x_2 = 0$ である。よって

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker(T_1 - \lambda_0) \oplus \{0\} = E\mathcal{H} = \ker(T - \lambda_0)$$

である。

(2) $\ker(T^k) \subset E\mathcal{H}$ は知られているので $E\mathcal{H} \subset \ker(T^k)$ を示せばよい。$E\mathcal{H}$ は T の不変部分空間で $\sigma(T|_{E\mathcal{H}}) = \{0\}$ となる。補題 4 より $T|_{E\mathcal{H}}$ も (p,k)-quasihyponormal なので補題 3 より

$$\|(T|_{E\mathcal{H}})^k\|^k \leq \|(T|_{E\mathcal{H}})^{k-1}\|^k r((T|_{E\mathcal{H}})^k) = 0$$

となる。よって

$$(T|_{E\mathcal{H}})^k = T^k|_{E\mathcal{H}} = 0$$

であるから $E\mathcal{H} \subset \ker(T^k)$ となる。 □

Acknowledgements. The Authors would like to express their sincere thanks to Professor In Hyoun Kim for giving us a preprint of [7].

参考文献

[1] A. Aluthge, *On p-hyponormal operators for* $0 < p < 1$, Integr. Equat. Oper. Th., **13**(1990), 307–315.

[2] S.C. Arora and P. Arora, *On p-quasihyponormal operators for* $0 < p < 1$, Yokohama Math. J., **41**(1993), 25–29.

[3] S.L. Campbell and B.C. Gupta, *On k-quasihyponormal operators,* Math. Japonoca **23**(1978), 185–189.

[4] M. Chō and K. Tanahashi, *Isolated point of spectrum of p-hyponormal, log-hyponormal operators,* preprint.

[5] F. Hansen, *An operator inequality,* Math. Ann. **246**(1980), 249–250.

[6] E. Heinz, *Beiträge zur Störungstheorie der Spektralzerlegung,* Math. Ann., **123**(1951), 415–438.

[7] In Hyoun Kim, *On* (p,k)*-quasihyponormal operators,* preprint.

[8] M.Y. Lee and S.H. Lee, *Some generalized theorems on p-quasihyponormal operators for* $0 < p < 1$, Nihonkai Math. J., **8**(1997), 109–115.

[9] K. Löwner, *Über monotone Matrixfunktionen,* Math. Z., **38**(1934), 177–216.

[10] C.A. McCarthy, c_p, Israel J. Math., **5**(1967), 249–271.

[11] J.G. Stampfli, Hyponormal operators and spectral density, Trans. Amer. Math. Soc., **117**(1965), 469–476.

[12] K. Tanahashi and A. Uchiyama, *Isolated point of spectrum of p-quasihyponormal operators*, Linear Algebra and its Applications, **341**(2002), 345–350.

[13] A. Uchiyama, *Inequalities of Putnam and Berger-Shaw for p-quasihyponormal operators,* Integr. Equat. Oper. Th., **34**(1999), 91–106.

[14] A. Uchiyama, *An example of a p-quasihyponormal operator*, Yokohama Math. J., **46**(1999), 179–180.

[15] D. Xia, *Spectral theory of hyponormal operators,* Birkhäuser Verlag, Boston, 1983.