数理解析研究所講究録 1360 巻 2004 年 43-56

順序数の積空間における弱い正規性について

筑波大学大学院数学研究科　平田　康史 (Yasushi Hirata)
Graduate School of Mathematics, University of Tsukuba

1　はじめに

位相空間の交わらない閉集合の対が, かならず開集合で分離できるとき, その空間は **normal**(正規) であるという. 次の古典的なよく知られている定理からわかるように, 空間が normal であると, その空間からユークリッド空間 $\mathbf{R}$ への連続写像を扱うのに都合がよい.

THEOREM 1.1. (*Tieze; Urysohn*)　位相空間 X について, 次の条件は同値である.

(a) X は *normal* である.

(b) X において, 閉集合はゼロ集合で分離される.

(c) X の閉集合からユークリッド空間 $\mathbf{R}$ への連続写像は, X 全体からの連続写像に拡張できる.

また, 第二可算な（すなわち, 可算開基をもつ）*normal* 空間は, 距離付け可能である.

ここで, 位相空間 X の部分集合 Z がゼロ集合であるとは, X からユークリッド空間 $\mathbf{R}$ への連続写像 f で, $Z = f^{-1}``\{0\}$ となるものが存在することである. 特に, ゼロ集合は閉集合である.

以下, 順序数は通常の順序によって導かれる全順序位相をもつ空間と考える.「normal」または「コンパクト」は, フィルターの正規性やコンパクト基数のことではなく, 位相的な意味での正規性, コンパクト性をあらわすこととする. しかしながら,「正則」は, 基数の正則性 ($\mathrm{cf}\,\kappa = \kappa \geq \omega$) をあらわすこととする.

Section 2 では, 順序数の積空間の研究の歴史的な背景を紹介する. normality は, その定義の簡潔さにもかかわらず, 上で述べたように, 位相空間を調べる上で有用なツールでもある. 一方で, とても壊れやすく, 一般には積空間では保存されない. 順序数の空間の積を使ってそのような例を容

易に作れることはよく知られている. normality の様態を調べる上で順序数の積空間が果たした役割は, 単に簡単な例を構成するにとどまらず, 位相空間論における難解かつ重要な問題の解決に貢献している. Rudin が構成した Dowker 空間は, 順序数のある種の積空間の部分空間であった. また, 順序数の有限積であっても, その位相的性質はかならずしも自明ではなく, 未解決な問題も残っている. その中には集合論の公理系からの独立性の可能性が (今のところ) 否定できてないものもあり, 集合論的な見地からみても興味深いとおもわれる.

Section 3 では, ω_1 の有限冪の部分空間の normality, および, それを弱くした概念について, すでに知られている結果と, 最近わかったことを紹介する. 1990 年代に入って, 家本・大田・玉野は, 順序数の 2 つの部分空間の積の normality, 可算パラコンパクト性などを, stationary set の概念を用いて特徴付けた. その系として, ω_1 の 2 つの部分空間の積で normal でないものの存在が得られる. このことにより, 順序数の積空間の世界では normality は強すぎると考えることもできるかもしれない. normality を弱くした概念に subnormality と mild normality というものがある. 著者と家本との共同研究で, これらの性質が ω_1 の部分空間の 2 つの積と 3 つの積とで, 異なる動向を示すことが明らかになった. また, ω_1 の部分空間の有限積における subnormality と mild normality を stationary set の概念を使って特徴づけた.

Section 4 では, 任意の順序数の部分空間の有限積における subnormality と mild normality を特徴付けた定理を紹介する. その系として, 順序数の部分空間の有限積において, subnormality は mild normality を含意することがわかる.

2 空間の正規性と順序数の積空間

位相空間には分離公理とよばれる性質が何種類も定義されている. 中でも, **normality** などのよく知られているものは, 「空間 X のある特定の部分集合族 $\mathbf{C}_0, \mathbf{C}_1$ が, ある特定の部分集合族 $\mathbf{O}_0, \mathbf{O}_1$ で分離できる」という形で定義される. ($\mathbf{C}_0 = \mathbf{C}_1 = \mathbf{C}$, $\mathbf{O}_0 = \mathbf{O}_1 = \mathbf{O}$ の場合は, 単に「$\mathbf{C}$ が $\mathbf{O}$ で分離できる」という.) 正確には, 次のような意味である.

$$\forall C_0 \in \mathbf{C}_0 \forall C_1 \in \mathbf{C}_1 [C_0 \cap C_1 = \emptyset \rightarrow$$
$$\exists O_0 \in \mathbf{O}_0 \exists O_1 \in \mathbf{O}_1 (O_0 \cap O_1 = \emptyset \wedge C_0 \subseteq O_0 \wedge C_1 \subseteq O_1)]$$

よく知られている分離公理の定義を表にすると, 次のようになる.

分離公理の名前	$\cdots$ が	$\cdots$ で分離される	別名
T_1	1 点集合	開集合と任意の集合	−
Hausdorff	1 点集合	開集合	T_2
regular	1 点集合と閉集合	開集合	T_3
Tychonoff	閉集合	ゼロ集合	$T_{3+1/2}$
normal	閉集合	開集合	T_4

一般には, regular や normal から T_1-性はでてこない. 以下, T_i という呼称を使うときは, T_1-性も仮定しているものとする. よく知られているように, 距離空間は T_4-性をもち, T_4,$T_{3+1/2}$,T_3,T_2,T_1 と, 順に弱くなる. $i = 1, 2, 3, 3 + 1/2$ の場合, T_i 空間の部分空間は T_i 空間であるし, T_i 空間たちの積空間は T_i 空間である. また, 距離空間の部分空間は距離空間であるし, 可算個の距離空間の積は距離付け可能である.

これに対して, normality(T_4-性) はとても壊れやすい. 順序数の積空間は, そのことを示す例を提供してきた. まずは簡単な例から紹介する.

FACT 2.1. 次が成り立つ.

(1) 順序数の部分空間は, T_4-空間である.

(2) 後者型順序数は, コンパクトである.

(3) $\kappa > \omega$ が正則基数ならば, $\kappa \times (\kappa + 1)$ は *normal* ではない.

(3) は Fodor の補題を使って, $\{\langle \alpha, \alpha \rangle \mid \alpha < \kappa\}$ と $\kappa \times \{\kappa\}$ が G_δ-集合 (可算個の開集合の intersection を G_δ-集合という) で分離できないことがわかる.

上の Fact から, ω_1 と $\omega_1 + 1$ はともに T_4 空間であるにもかかわらず, その積 $\omega_1 \times (\omega_1 + 1)$ は normal ではないことがわかる. また, $\omega_1 + 1$ はコンパクト Hausdorff であり, よって, $(\omega_1 + 1)^2$ もまたコンパクト Hausdorff, 特に, T_4 空間であるが, その部分空間である $\omega_1 \times (\omega_1 + 1)$ は normal ではない.

COROLLARY 2.2. *T_4-性は, 部分空間, あるいは, 2 つの積で, かならずしも保存されない.*

それでは, 空間の積 $X \times Y$ が normal になるためには, X,Y が単に T_4 空間であるだけでなく, さらにどのような条件を仮定すればよいのか, ということが問題となった.

PROBLEM 2.3. T_4-空間とコンパクト距離空間の積は, いつも *normal* になるか？

この問題に関連して, Dowker は次の定理を証明した.

THEOREM 2.4. (*Dowker 1951 [2]*) *normal*空間 X について, 以下は同値である.

(a) 任意のコンパクト距離空間 Y について, $X \times Y$ は *normal*である.

(b) $X \times \mathbf{I}$ は *normal*である. ここで, $\mathbf{I} = [0,1]$ は実数直線の単位閉区間である.

(c) ある無限コンパクト距離空間 Y について, $X \times Y$ は *normal*である.

(d) X は可算パラコンパクトである.

可算パラコンパクト性の定義は, 以下のとおりである.

DEFINITION 2.5. 位相空間 X の部分集合族 $\mathcal{U} = \langle U_i \mid i \in I \rangle$, $\mathcal{V} = \langle V_i \mid i \in I \rangle$ について, $V_i \subseteq U_i$ がすべての $i \in I$ について成り立つとき, $\mathcal{V}$ は $\mathcal{U}$ の *partial shrinking*, あるいは, $\mathcal{U}$ は $\mathcal{V}$ の **expansion** であるということにする. *partial shrinking*で 空間全体を被覆するものを **shrinking** という. $\mathcal{V}$ が局所有限 (*resp.* **discrete**) であるとは, X の任意の点 x に対して, その近傍 P で, $|\{i \in I \mid P \cap V_i \neq \emptyset\}| < \omega$ (*resp.* ≤ 1) となることである. X の任意の可算開被覆が局所有限な開 *shrinking* をもつとき, 空間 X は可算パラコンパクトであるという. 可算パラコンパクトではない T_4 空間を **Dowker** 空間, *normal*でない可算パラコンパクト空間を **anti-Dowker** 空間という.

上の問題は, 「Dowker 空間は存在するか？」と言いかえることができるが, この問題が (ZFC に他の公理を付加せずに) 解決されるのは, 1971 年である. 上の Dowker の定理から 20 年かかっていること, また, 問題の内容が位相空間論において基本的かつ重要なものであることを考えると, この問題はなかなかの難問だったのだと思われる.

THEOREM 2.6. (*Rudin 1971*) *Dowker*空間は存在する.

Rudin の構成した Dowker 空間は, 次のようなものである.

$$X = \{x \in \Box_{n<\omega}(\omega_n + 1) \mid \exists m < \omega \forall n < \omega \ (\omega < \mathrm{cf}\, x(n) < \omega_m)\}$$

ここで, $\square_{i\in I}X_i$ は Box 積とよばれる積空間の一種で, 集合としては通常の直積空間 (Tychonoff 積とよばれる) と同じものだが, Tychonoff 積よりも強い位相をもつ. 各 $i \in I$ について P_i が X_i の開集合であるときの $\Pi_{i\in I}P_i$ たちがこの空間の開基である. (Tychonoff 積では, 有限個の $i \in I$ を除いて $P_i = X_i$ であることが要求される点で, 両者は異なることに注意せよ.)

このように, 順序数の積空間は, 簡単な例をつくるだけでなく, 位相空間論における重要かつ難解な問題の解決に貢献している.

上の定理の方法を応用して, Rudin と厚地はさらなる normality の壊れやすさをあらわす次の定理を証明している.

THEOREM 2.7. (*Rudin 1975, Atsuji 1977*) どんな T_4 空間との積も T_4 空間になる空間は, 離散空間のみである.

一方, anti-Dowker 空間の存在を示すのは簡単で, $\omega_1 \times (\omega_1 + 1)$ がその例となっている. それでは, 「ω_1^2 には anti-Dowker な部分空間は存在するか?」というと, これに関しては次の定理が知られている.

THEOREM 2.8. (*Kemoto, Smith, Szeptycki [12]*) $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ か, または, **PMEA** が成り立てば, ω_1^2 には *anti-Dowker* な部分空間は存在しない.

ここで, **PMEA** は Product Measure Extension Axiom とよばれる公理で, consistensy strength は, compact cardinal の存在より弱く (Nyikos), measurable cardinal の存在より強い (Fleissner) ことが知られている.

上の定理で, $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ や **PMEA** を仮定からはずせるか否かは, 未解決である.

PROBLEM 2.9. ω_1^2 の *anti-Dowker* 部分空間の非存在は **ZFC** のみから証明できるか?

このように, 有限積であっても, その位相的性質を知ることはかならずしも簡単ではない. **ZFC** から独立な事象もあるかもしれず, 集合論的にも興味深いのではなかろうか.

3　ω_1 の有限冪の部分空間の subnormality と mild normality

1990 年代に入って、順序数の積空間の位相的性質を組み合わせ論的に, 特に stationary の概念を使って特徴付けようとする動きがおこる. その発

端になったのは, 家本, 大田, 玉野による順序数の 2 つの部分空間の積の normality, collectionwise normality, shrinking property, 可算パラコンパクト性などの特徴づけであろう.

THEOREM 3.1. (*Kemoto, Ohta, Tamano 1992 [11]*)
各順序数 $\alpha \leq \mu$ に対して, $e_\alpha : \mathrm{cf}\,\alpha \longrightarrow \alpha$ を *strictly increasing* かつ連続な *cofinal sequence* とする. $A, B \subseteq \mu + 1$ に対して, 以下が成り立つ.

(1) 次は同値である.

(a) $A \times B$ は *shrinking* である.

(b) $A \times B$ は *collectionwise normal* である.

(c) $A \times B$ は *normal* である.

(d) $\lambda = \mathrm{cf}\,\alpha = \mathrm{cf}\,\beta \geq \omega_1$ となる各 $\alpha, \beta \leq \mu$ に対して, 以下の条件が成り立つ.

(d_1) $\alpha \notin A$, かつ, $\beta \notin B$ ならば, $A \cap \alpha$ が α で *non-stationary* か, $B \cap \beta$ が β で *non-stationary* か, $(e_\alpha^{-1}$“$A) \cap (e_\beta^{-1}$“$B)$ が λ で *stationary* である.

(d_2) $\alpha \in A$, かつ, $\beta \notin B$ ならば, $A \cap \alpha$ が α で *bounded* か, $B \cap \beta$ が β で *non-stationary* である.

(d_3) $\alpha \notin A$, かつ, $\beta \in B$ ならば, $A \cap \alpha$ が α で *non-stationary* か, $B \cap \beta$ が β で *bounded* である.

(2) 次は同値である.

(e) $A \times B$ は *strong D-property* をもつ.

(f) $A \times B$ は *expandable* である.

(g) $A \times B$ は可算パラコンパクト性をもつ.

(h) $A \times B$ は *weak* $D(\omega)$*-property* をもつ.

(i) $\lambda = \mathrm{cf}\,\alpha = \mathrm{cf}\,\beta \geq \omega_1$ となる各 $\alpha, \beta \leq \mu$ に対して, $(e_\alpha^{-1}$“$A) \cap (e_\beta^{-1}$“$B)$ が λ で *non-stationary* ならば, 以下の条件が成り立つ.

(i_1) $\alpha \notin A$, かつ, $\beta \notin B$ ならば, $A \cap \alpha$ が α で *non-stationary* か, *or* $B \cap \beta$ が β で *non-stationary* である.

(i_2) $\alpha \in A$, かつ, $\beta \notin B$ ならば, $A \cap \alpha$ が α で *bounded* か, $B \cap \beta$ が β で *non-stationary* である.

(i_3) $\alpha \notin A$, かつ, $\beta \in B$ ならば, $A \cap \alpha$ が α で *non-stationary* か, $B \cap \beta$ が β で *bounded* である.

ここで, collectionwise normality と shrinking property はともに normality よりも強い位相的性質で, 定義は次のとおりである. (その他の概念の定義については [11] を参照されたい.)

DEFINITION 3.2. 位相空間の任意の開被覆が閉 *shrinking* をもつとき, その空間は **shrinking** であるという. 位相空間の任意の *discrete* な族が, *pairwise disjoint* な開 *expansion* をもつとき, その空間は **collectionwise normal** であるという.

この定理を ω_1 に限定すると次のようになる.

COROLLARY 3.3. $A, B \subseteq \omega_1$ について, 以下は同値である.

(a) $A \times B$ は *shrinking.*

(b) $A \times B$ は *collectionwise normal.*

(c) $A \times B$ は *normal.*

(e) $A \times B$ は *strong D-property* をもつ.

(f) $A \times B$ は *expandable.*

(g) $A \times B$ は可算パラコンパクト.

(h) $A \times B$ は *weak* $D(\omega)$*-property* をもつ.

(d·i) A か B のいずれかが ω_1 で *non-stationary* か, $A \cap B$ が *stationary.*

よく知られているように, ω_1 には交わらない ω_1 個の stationary set があるので, 特に次のことがわかる.

COROLLARY 3.4. $A \times B$ が *normal* ではないような $A, B \subseteq \omega_1$ が存在する.

このように, 順序数の積空間では, normality は non-trivial なものの中では最も簡単な形のものであってもこわれてしまう. 以下, normality を弱めた概念である subnormality と mild normality について考える.

DEFINITION 3.5. 位相空間の任意の交わらない閉集合の対が G_δ-集合の対で分離されるとき，その空間は **subnormal** であるという．位相空間の任意の開被覆が F_σ-*shrinking* をもつとき，その空間は **subshrinking** であるという．

定義から簡単にわかるように, shrinking な空間は subshrinking かつ normal であり, subshrinking か normal な空間は subnormal である．

subnormality は normality より実際に弱い概念である．特に ω_1^2 においてはその差は顕著である．

THEOREM 3.6. (*Kemoto 2002 [10]*) ω_1^2 のすべての部分空間は *subshrinking,* よって *subnormal* である．

上の定理から, 任意の $n < \omega$ に対して, ω_1^n のすべての部分空間は subnormal になるのではないかと予想された．しかしながら, これは成り立たないことが, 著者と家本によって証明された．

THEOREM 3.7. (*Hirata, Kemoto 2003 [6]*)

(1) ω_1^3 には *subnormal* ではない部分空間が存在する．

(2) $n < \omega$, $X \subseteq \{x \in \omega_1^n \mid x(i) < x(j)(\forall i < \forall j < n)\}$ ならば, X は *subshrinking,* よって, *subnormal.*

ここで, $n = 2$ のときと $n = 3$ のときで差が生じる原因について簡単に触れておきたい．$X \subseteq \omega_1^n$ に対して, $n = 2$ の場合は, $\{x \in X \mid x(j_0) = x(j_1)(\forall j_0, j_1 < n)\}$ が stationary か, あるいは, すべての $j_0 \neq j_1 < n$ について $\{\alpha < \omega_1 \mid x(j_0) = x(j_1) = \alpha(\exists x \in X)\}$ が non-stationary かのいずれかであるが, $n \geq 3$ では, そのどちらでもない場合が存在する．これが両者の相違である．そのような可能性を排除することで, (2) は成り立つ．

位相空間の閉集合の interior を **regular open** 集合といい, 開集合の closure を **regular closed** 集合という．位相空間 X の部分集合 U が regular open であるためには $U = \mathrm{int}_X\,\mathrm{cl}_X\,U$ となることが, F が regular closed であるためには $F = \mathrm{cl}_X\,\mathrm{int}_X\,F$ となることが必要十分である．よく知られているように, regular open 集合の全体は完備ブール代数になり, forcing に使われている．

subnormality が, 分離するときに使ってよい集合のクラスを開集合全体から G_δ 集合全体に広げることによって normality を弱めたのに対して,

mild normality は, 分離しなければならない集合のクラスを閉集合全体から regular closed 集合全体に狭めることによって normality を弱めたものである.

DEFINITION 3.8. 位相空間の任意の交わらない *regular closed* 集合の対が開集合 (G_δ-集合) の対で分離できるとき, その空間は **mildly normal** (**mildly subnormal**) であるという.

FACT 3.9. *(sub)normal* な空間は *mildly (sub)normal* である.

mild normality は normality よりも真に弱い. 前述の通り, $\omega_1 \times (\omega_1 + 1)$ は normal でないが, 順序数の任意個の積は mildly normal である.

THEOREM 3.10. (*Kalantan, Szepticki 2002 [9]*) 各 $i \in I$ について α_i が順序数ならば, $\Pi_{i \in I}\alpha_i$ は *mildly normal* である.

この定理の Kalantan, Szepticki による証明には, elementary submodel が使われている. (後に elementary submodel を使わない証明が [13] で与えられている.)

Kalantan, Kemoto は次の定理を示し, (1) が 3 つ以上の積に対しても成り立つかどうかを問うた.

THEOREM 3.11. (*Kalantan, Kemoto 2003 [8]*)

(1) 順序数の部分空間 A, B の積 $A \times B$ は *mildly normal.*

(2) $(\omega + 1) \times \omega_1$ には *mildly normal* でない部分空間がある.

COROLLARY 3.12. $A, B \subseteq \omega_1$ ならば, $A \times B$ は *subnormal* かつ *mildly normal* である.

著者と家本は ω_1 の部分空間の有限積の mild normality を stationary の概念を使って特徴づけた. また, 著者は同じ条件で subnormality も特徴付けられることを示した.

THEOREM 3.13. (*Hirata, Kemoto [7], Hirata [5]*)
$\mathcal{A} = \langle A_k \mid k \in N \rangle$ を ω_1 の空でない部分空間からなる有限族, $X = \Pi_{k \in N} A_k$ とする. このとき以下は同値である.

(a) X は *subshrinking.*

(b) X は *subnormal.*

(c) X は mildly normal.

(d) X は mildly subnormal.

(e) N の相異なる元からなる長さ 2 以上の任意の列 $\langle k_i \mid i < l\rangle$ に対して, すべての $0 < i < l$ に対して $A_{k_{i-1}} \cap A_{k_i}$ が ω_1 で stationary ならば, $\bigcap_{i<l} A_{k_i}$ も stationary である.

この定理は, 上述の Kalantan, Kemoto の問題への解となっていて, mildly normal に関しても, 2 つの積と 3 つの積とで様子が異なる例となっている.

COROLLARY 3.14. *$A \times B \times C$ が subnormal でも mildly normal でもないような $A, B, C \subseteq \omega_1$ が存在する.*

Proof. S_0, S_1, S_2 を互いに交わらない ω_1 の stationary set とする. $A = S_0 \cup S_1$, $B = S_1 \cup S_2$, $C = S_2 \cup S_0$ とおく. $A \cap B = S_1$ と $B \cap C = S_2$ は stationary だが, $A \cap B \cap C = \emptyset$. よって, $\langle A, B, C\rangle$ は定理の (e) の条件を満たさない. □

順序数の部分空間の無限積の mild normality についてはまだ解決されていない.

PROBLEM 3.15. *ω_1 の pairwise disjoint な stationary subset の可算積は mildly normal か?*

4 順序数の部分空間の積の subnormality と mild normality

前節で述べた家本, 大田, 玉野の定理から, 順序数の 2 つの部分空間の積において, normality, collectionwise normality, shrinking property が同値であるが, より一般に, 次の定理が成り立つ.

THEOREM 4.1. (*Fleissner 2002 [3]*)
X が順序数の有限積の部分空間ならば, 以下は同値である.

(a) X は normal.

(b) X は normal かつ strongly zero-dimensional.

(c) X は collectionwise normal.

(d) X は shrinking.

ここで空間がstrongly zero-dimensional とは, 任意の交わらないゼロ集合の対がclopen 集合で分離されることである. Urysohn の定理により, 空間が normal かつ strongly zero-dimensional であるためには, 任意の交わらない閉集合の対が clopen 集合で分離されることが必要十分である.

上の同値性には X が順序数の有限積の部分空間であるという仮定が必要である. normal かつ subshrinking な空間は可算パラコンパクトであることが知られているので, Dowker 空間は normality が subshrinking 性を導かない例となっている. さらに Rudin が作った Dowker 空間は collectionwise normal でもあり, よって, collectionwise normality からも subshrinking 性はでてこない. また, subshrinking property が normality を導かない例が $A, B \subseteq \omega_1$ についての $A \times B$ の形で得られることは, Corollary 3.4, Theorem 3.6 よりわかる.

ω_1 の部分空間からなる有限積では, subnormality, subshrinking, mild normality, mild subnormality は同値であったが, 一般の位相空間ではこの同値性は成り立たない. 特にそのうちのいくつかは, 順序数の有限積の部分空間においても同値ではない. subshrinking だが mildly normal ではない $X \subseteq (\omega + 1) \times \omega_1$ の存在は, Therorem 3.6, Theorem 3.11 より得られる. また, $\omega_1 \times (\omega_1 + 1)$ は mildly normal であるが, subnormal ではないことが知られている.

本節では, 任意の順序数の部分空間からなる有限積の subnormality と mild normality を特徴付ける定理を紹介する. 上記の通り, mildly normal と subnormal とでは異なる特徴づけを必要とする. ω_1 の部分空間の場合に比べて statement がやや複雑になるので, 定理を述べる前に, その特徴づけから得られる corollary を先に述べる.

COROLLARY 4.2. $X = \Pi_{k \in N} A_k$ が順序数の部分空間からなる有限積のとき, 以下が成り立つ.

(1) X が subshrinking であることと subnormal であることとは同値である.

(2) X が mildly normal であることと, mildly subnormal であることとは同値である.

(3) よって, X が subnormal ならば, X は mildly normal である.

DEFINITION 4.3. $K = \langle K_-, K_+, S_K \rangle$ が *(-+S)-triple* とは $K = K_- \cup K_+$ が *disjoint union* で, $S_K \subseteq \mathcal{P}(K)$, かつ, 任意の $r \in S_K$ と $r' \subseteq r$ について $r' \in S_K$ となることとする. *(-+S)-triple* $K = \langle K_-, K_+, S_K \rangle$ に関する性質をいくつか, 以下に定義する.

- K が **well partitioned** とは, K_- が空か, あるいは, K の相異なる元からなる長さ *2* 以上の有限列 $\langle k_i \mid i < l \rangle$ で, $\{k_{i-1}, k_i\} \in S_K$ がすべての $i < l$ で成り立つものはかならず $\{k_i \mid i < l\} \in S_K$ となること.
- K が **even** とは, すべての $k_0 \in K_-$, $k_1, k_2 \in K_+$ について, $\{k_0, k_1\} \in S_K$ であることと $\{k_0, k_2\} \in S_K$ であることが同値になること.
- K が **separated** とは, すべての $k_0 \in K_-$ と $k_1 \in K_+$ について, $\{k_0, k_1\} \notin S_K$ となること.
- $K' \subseteq K$ とする. K が K'**-flat** とは, K' か K_- のいずれかが空か, あるいは $K \in S_K$ となること.

DEFINITION 4.4. $\mathcal{A} = \langle A_k \mid k \in N \rangle$ を順序数の部分空間の有限族とする. $O(\mathcal{A})$ を以下の条件をみたす $\langle K, \langle \langle \alpha_k, c_k \rangle \mid k \in K \rangle, \kappa \rangle$ の全体のクラスとする.

- $K = \langle K_-, K_+, S_K \rangle$ は *(-+S)-triple* で, $K (= K_- \cup K_+) \subseteq N$.
- κ は正則非可算基数.
- 各 $k \in K$ について, α_k は *cofinality* が κ の順序数で, c_k は κ から α_k への *strictly increasing* かつ連続な *cofinal sequence*.
- S_K は $\bigcap_{k \in r} c_k{}^{-1}``A_k$ が κ で *stationary* になるような $r \subseteq K$ の全体.
- $k \in K_-$ ならば, $\alpha_k \notin A_k$ で, $A_k \cap \alpha_k$ は α_k で *stationary*.
- $k \in K_+$ ならば, $\alpha_k \in A_k$ で, $A_k \cap \alpha_k$ は α_k で *cofinal*.
- $k \in N \setminus K$ ならば, A_k は空でない.

THEOREM 4.5. (*Hirata*)
$\mathcal{A} = \langle A_k \mid k \in N \rangle$ を順序数の部分空間の有限族, $X = \Pi\mathcal{A}$ とする. このとき, 以下は同値である.

(a) X は *mildly normal* である.

(b) X は *mildly subnormal* である.

(c) 任意の $\langle K, \langle\langle \alpha_k, c_k\rangle \mid k \in K\rangle, \kappa\rangle \in O(\mathcal{A})$ について, K は *well partitioned* かつ *even* である.

THEOREM 4.6. (*Hirata*)
$\mathcal{A} = \langle A_k \mid k \in N\rangle$ を順序数の部分空間の有限族, $X = \Pi\mathcal{A}$ とする. このとき, 以下は同値である.

(a) X は *subshrinking* である.

(b) X は *subnormal* である.

(c) 任意の $\langle K, \langle\langle \alpha_k, c_k\rangle \mid k \in K\rangle, \kappa\rangle \in O(\mathcal{A})$ について, K' を $\{\beta < \alpha_k \mid \mathrm{cf}\,\beta \geq \kappa\}$ が α_k で *stationary* になるような $k \in K$ の全体とすると, K は *well partitioned, separated,* かつ, K'*-flat* である.

参考文献

[1] Atuji, *On normality of the product of two spaces*, Gen. Top. IV Proc. Fourth Prague Top. Conf., B. 25-27, 1976.

[2] C. H. Dowker, *On countably paracompact spaces*, Canad. J. Math. 3 (1951), 219-224

[3] W. G. Fleissner, Normal subspaces of products of finitely many ordinals, Proc. AMS 131 (2002), 2279-2287.

[4] W. G. Fleissner, N. Kemoto and J. Terasawa, *Strong Zero-dimensionality of products of ordinals*, Topology Appl. 132 (2003), 109-127.

[5] Y. Hirata, *Subnormal finite products of subspaces of* ω_1, preprint.

[6] Y. Hirata and N. Kemoto, *Separating by G_δ-sets in finite powers of* ω_1, Fund. Math. 177 (2003), 83-94

[7] Y. Hirata and N. Kemoto, *Mild normality of finite products of subspaces of* ω_1, preprint.

[8] L. Kalantan and N. Kemoto, *Mild normality in products of ordinals*, Houston J. Math, 29(4) (2003) 937-947.

[9] L. Kalantan and P. J. Szeptycki, *κ-normality and products of ordinals*, Topology Appl. 123 (2002), 537-545.

[10] N. Kemoto, *Subnormality in ω_1^2*, Topology Appl. 122 (2002), 287-296.

[11] N. Kemoto, H. Ohta and K. Tamano, *Products of spaces of ordinal numbers*, Topology Appl. 45 (1992), 119-130.

[12] N. Kemoto, K. D. Smith and P. J. Szeptycki, Countable paracompactness versus normality in ω_1^2, Top. Appl., 104 (2000)141–154.

[13] N. Kemoto and P. J. Szeptycki, *Toplogical properties of products of ordinals*, to appear.

[14] K. Kunen, *Set theory*, North-Holland, Amsterdam, 1980.

[15] M. E. Rudin, *A normal space X for which $X \times I$ is not normal*, Fund. Math. 73 (1971), 179-186.

[16] M. E. Rudin, *Dowker Spaces*, in Handbook of set-theoretic topology, K. Kunen and J.E. Vaughan eds. Elsevier Science Publishers, 1984.