数理解析研究所講究録 1362 巻 2004 年 56-61

Navier-Stokes 方程式の解に対する数値的検証の現状と動向

State of the Art for the Numerical Verification Method of Navier-Stokes Equations

渡部 善隆 †
Yoshitaka Watanabe

† 九州大学情報基盤センター (Computing and Commmunications Center, Kyushu University)

1 はじめに

本稿では，流体解析の基礎方程式である Navier-Stokes 方程式に対して，数値的に求めた近似解の周りに真の解 (解析解) が存在することを定量的誤差評価とともに検証する手法のアイデアと，これまでに得られた成果をいくつか紹介する．

2 基本的な数値的検証のアイデア

Navier-Stokes 方程式に限らず，関数方程式の解に対する数値的検証法の多くは，Banach 空間 X 上で定義される非線形作用素 F の不動点問題:

$$u = Fu$$

として定式化され，無限次元不動点定理 (Schauder, Banach など) が成立するための十分条件を確認する問題に帰着される．不動点定理の成立条件の中でもっとも重要なものは，不動点を包含することが期待される集合 $U \subset X$ (以下「候補者集合」と呼ぶ) に対する F の値域 $FU := \{Fv \in X \mid v \in U\}$ の縮小性:

$$\boxed{FU \subset U}$$

である．以下，縮小性を確認する手段として Newton 法を基礎にする 2 つの手法を紹介する．

2.1 手法 I (Nakao の方法)

Nakao の方法 [1] では，X から有限次元部分空間 $X_h \subset X$ への射影 P_h を用いることにより，不動点問題 $u = Fu$ を有限次元部分と無限次元部分に

$$\begin{cases} P_h u &= P_h F u \\ (I - P_h)u &= (I - P_h)Fu \end{cases}$$

と分解し，さらに有限次元部分を Newton-like な作用素

$$N_h u := P_h u - [I - P_h F'(u_h)]_h^{-1} P_h(u - Fu) : \quad X \longrightarrow X_h$$

を用いて

$$P_h u = P_h F u \iff P_h u = N_h u$$

と同値変形する．ここで $u_h \in X_h$ は近似解，$F'(u_h)$ は F の u_h における Fréchet 微分，$[I - P_hF'(u_h)]_h^{-1}$ は制限写像 $P_h(I - P_hF'(u_h))|_{S_h} : X_h \longrightarrow X_h$ の逆要素とする．$[I - P_hF'(u_h)]_h^{-1}$ の存在は，対応する有限次元行列の正則性を計算機内で確認することにより厳密に保証することが可能である．

候補者集合 $U \subset X$ は，有限次元部分 $U_h \subset X_h$ と射影の誤差部分 $U_* \subset X$ の和:

$$U = U_h + U_*$$

として構成され，有限次元と無限次元それぞれの縮小性:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} N_hU & \subset & U_h \\ (I - P_h)FU & \subset & U_* \end{array} \right. \tag{1}$$

を確認することで $FU \subset U$ を導く．(1) の確認のために，有限次元部分は連立 1 次方程式の解の包み込みや行列の特異値評価などを計算機の丸め誤差を考慮した形で行ない，無限次元部分は近似解のノルム評価，射影の a priori 誤差評価などを利用する．

2.2 手法 II (無限次元 Newton 法に基づく方法)

手法 II は，Banach 空間 X, Y で定義される非線形作用素 $\mathcal{F} : X \to Y$ に対して

$$\mathcal{F}u = 0 \tag{2}$$

を満たす $u \in X$ を求める問題を考え，(2) に Newton-like な手法を適用する．すなわち，ある線形作用素 $L : X \to Y$ が逆作用素 $L^{-1} : Y \to X$ を持つとして

$$Tu := u - L^{-1}\mathcal{F}u : X \longrightarrow X$$

に対する不動点 $u = Tu$ を求めることで (2) の解が得られる．ここで，L は $\mathcal{F}$ の u_h での Fréchet 微分 $\mathcal{F}'(u_h)$ にとられることが多く，その場合 T は準 Newton 型作用素となる．

手法 II において，候補者集合は近似解 u_h に半径 $\varepsilon > 0$ の無限次元の微小なボールを加えた

$$U = u_h + W, \qquad W := \{w \in X \mid \|w\|_X \leq \varepsilon\}$$

として構成され，解 $u \in U$ が存在するための縮小性 $TU \subset U$ の十分条件は

$$\sup_{w \in W} \|L^{-1}(Lw - F(u_h + w))\|_X \leq \varepsilon,$$

または作用素ノルムを用いて上に評価された

$$\sup_{w \in W} \|Lw - F(u_h + w)\|_X \ \|L^{-1}\|_{B(Y,X)} \leq \varepsilon$$

で与えられる．ここで，もし $L = \mathcal{F}'(u_h)$ であり，$\varepsilon > 0$ が十分小さいならば

$$Lw - F(u_h + w) \approx Fu_h \approx 0$$

であることが期待される．一方，L^{-1} の値域またはノルム $\|L^{-1}\|_{B(Y,X)}$ 評価は簡単ではなく，L の可逆性の数学的保証と逆作用素のノルム評価が必要となる．

3 検証例

以下，前節で述べた手法を用いた定常 Navier-Stokes 方程式および関連する問題に対する検証例を紹介する．

3.1 一般的な定常問題

文献 [2] では，手法 I に基づき 2 次元凸多角形領域 Ω における定常 Navier-Stokes 方程式:

$$\begin{cases} -\Delta u + \nabla p &= -R(u\cdot\nabla)u + f \quad \text{in} \quad \Omega, \\ \operatorname{div} u &= 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

の弱解 $u \in H_0^1(\Omega)^2$ が有限要素近似解 u_h の周りで存在することを定量的誤差評価付きで検証するアルゴリズムを提案した．ここに $R > 0$ は Reynolds 数，p は圧力場，f は与えられた関数とする．数値例としては Ω が矩形領域，$u \in H_0^1(\Omega)^2$ が真の解となるようなモデル問題を考え，原理的な有効性を明らかにした．

3.2 周期境界条件

Heywood[3] は $\Omega = (0,1)\times(0,1)$ に対し

$$\begin{cases} -\Delta u + \nabla p &= -R(u\cdot\nabla)u + f \quad \text{in} \quad \Omega, \\ \operatorname{div} u &= 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \\ \displaystyle\int_\Omega u(x)dx &= 0 \end{cases} \tag{4}$$

を満たす周期解

$$u(x+K) = u(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}^2,\ K \in \mathbf{Z}^2$$

の局所一意性付きの存在検証条件を手法 II に基づき与えた．ただし，f は u と同じ周期条件を持つ外力項とする．検証条件は，近似解 u_h から出発する簡易 Newton 法の収束条件として与えられる．

主たる検証コストは，ノルム $\|L^{-1}\|_{B(Y,X)}$ の評価である．[3] では，先ず L を自然数 N に依存する簡単な無限次元作用素 L_N で近似する．L_N は L と同じ有限次元部分を持ち，$N \to \infty$ のとき L 自身に収束するような作用素である．次に L_N の有限次元への制限 $\widetilde{L}_N$ の性質を用いて $\|L_N^{-1}\|_{B(Y,X)}$ の一様有界性を示し，この結果と誤差評価 $\|L - L_N\|_{B(Y,X)}$ を用いて $\|L^{-1}\|_{B(Y,X)}$ の限界を数値的に算定している．

3.3 Driven Cavity 問題

Wieners[4], Storck[5], Nagatou, Hashimoto and Nakao[6] は，2 次元領域 $\Omega = (0,1)\times(0,1)$ における driven cavity problem の定常問題:

$$\begin{cases} -\Delta u + \nabla p &= -R(u\cdot\nabla)u \quad \text{in} \quad \Omega, \\ \operatorname{div} u &= 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \\ u &= g \quad \text{on} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{5}$$

に対する解の検証手法を提案している．ここで g は $(\varphi_y, -\varphi_x) = g$ を満たす φ が存在するものと仮定する．それぞれ手法 II に基づく方法であり，線形作用素 L^{-1} の評価が必要である．

Wieners[4] は，準 Newton 作用素の直接的なノルム評価を与え，divergence free の空間の中での弱解の存在検証に成功している．しかしながら，この評価は原理的に小さな Reynolds 数でしか成り立たない．

Storck[5], Nagatou[6] は (5) の流れ関数表示を行なうことで圧力項を消去し，問題を非線形 4 階楕円型問題に帰着させる．Storck は L の逆作用素ノルム評価を自己随伴作用素 L^* を用いた L^*L の最小固有値を求める問題に帰着させ，固有値を Homotopy 法によって評価する手法を提案している．しかしながら，定式化中に評価が (現状) 困難な内積計算があり，数値例も数学的に厳密とはいえない．

Nagatou, Hashimoto and Nakao [6] は，自明解 $u=0$ が $Lu=0$ の唯一解であることを示せば L の可逆性が保証されることに着目し，$Lu=0$ と同値な不動点方程式 $u=Fu$ に対して手法 I を適用することにより，L の可逆性と L^{-1} のノルム評価を導き，ある程度大きい Reynolds 数に対しても線形化作用素の可逆性および解の存在検証に成功した．

3.4 Rayleigh-Bénard 問題

文献 [7], [8] では，2 次元 (x-z 座標) の Rayleigh-Bénard 対流を記述する Oberbeck-Boussinesq 方程式の基本解からの摂動を表す無次元化方程式の定常問題を流れ関数 Ψ および温度場を用いて表現した方程式:

$$\left\{\begin{array}{rcll} \mathcal{P}\Delta^2\Psi &=& \sqrt{\mathcal{PR}}\,\Theta_x - \Psi_z\Delta\Psi_x + \Psi_x\Delta\Psi_z & \text{in } \Omega, \\ -\Delta\Theta &=& -\sqrt{\mathcal{PR}}\,\Psi_x + \Psi_z\Theta_x - \Psi_x\Theta_z & \text{in } \Omega \end{array}\right. \tag{6}$$

に対する精度保証付き数値計算法を提案した．領域 Ω は長方形領域 $\{0<x<2\pi/a,\ 0<z<\pi\}$，$a>0$ は与えられた正定数，境界条件は速度場については $z=0,\pi$ で stress free, $x=0,2\pi/a$ で周期境界条件を仮定し，温度場については Dirichlet 条件を課している．

手法は方法 I に基づき，(6) の解 Ψ,Θ の形を

$$\begin{aligned} \Psi &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\sin(amx)\sin(nz), \\ \Theta &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}\cos(amx)\sin(nz) \end{aligned}$$

に限定した関数空間の中で，分岐解と思われるいくつかの非自明解の存在検証に成功した．図 1 は $\mathcal{R}=40, \mathcal{P}=10, a=1/\sqrt{2}$ における異なる 2 つの温度場を表す．

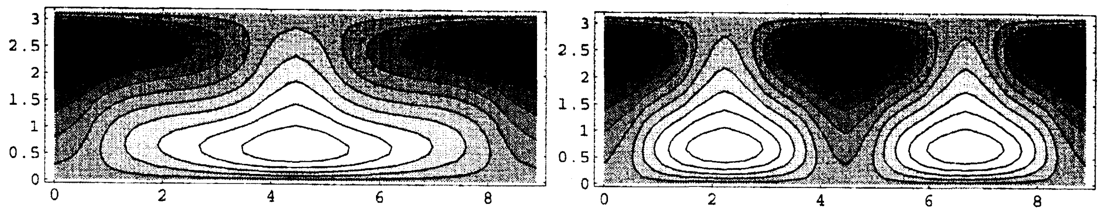

図 1: 非自明解 (温度場)

3.5 Orr-Sommerfeld 問題

文献 [9] では，2 次元平行流の安定特性を記述する非自己共役複素固有値問題である Orr-Sommerfeld 方程式:

$$\left\{\begin{array}{c} (-D^2+a^2)^2u + iaR[U(-D^2+a^2)+U'']u = \lambda(-D^2+a^2)u \\ u(x_1)=u(x_2)=u'(x_1)=u'(x_2)=0 \end{array}\right. \tag{7}$$

を満たす固有対 (λ,u) を精度保証付きで求める手法を提案した．ここで $D=\partial/\partial x$, $a>0$ は波数である．(7) は Navier-Stokes 方程式を満足する基本流れからの摂動を基準モードで分解して得られる 4 階複素固有値問題である．

[9] では，特に Poiseuille 流れ:

$$U=1-x^2, \qquad x_1=-1, x_2=1$$

に対し $a, R > 0$ を動かしながら (7) の複素固有値 λ を精度保証付きで計算し，不安定性が生じる可能性のある R の範囲を一部特定することに成功した．

図 2 は，各 a に対して固有値の実部が負になることが検証できた最小の R をプロットしたものである．$Re(\lambda) = 0$ を与える中立曲線はこの下に存在すると予想される．

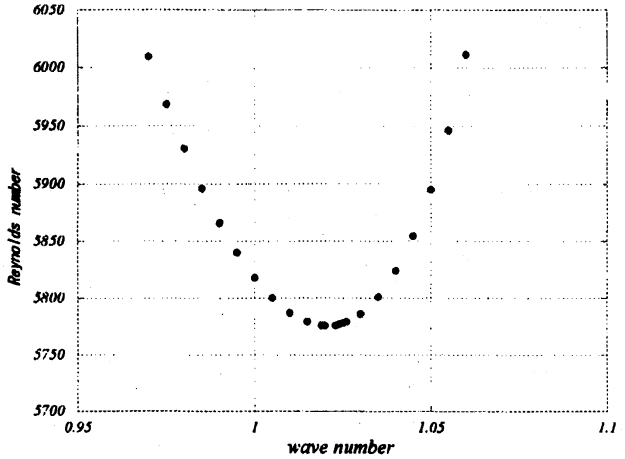

図 2: $Re(\lambda) < 0$ が検証された $[a, R]$

3.6 Kolmogorov 問題

Nagatou[10] は，アスペクト比 $0 < \alpha < 1$ を持つ矩形領域

$$\Omega = \left(-\frac{\pi}{\alpha}, \frac{\pi}{\alpha}\right) \times (-\pi, \pi)$$

に対して，Navier-Stokes 方程式の一種である Kolmogorov 問題を流れ関数を用いて記述した非線形方程式:

$$\Delta^2\phi = -R\,J(\phi, \Delta\phi) - \cos(y) \quad \text{in} \quad \Omega \tag{8}$$

の安定性問題を考察した．ここで J は

$$J(u, v) := u_x v_y - u_y v_x$$

で定義される双一次形式である．

[10] では，いくつかの周期性および対称性の仮定のもと $\alpha = 0.4, 0.7, 0.8$ において，線形化問題である固有値問題を方法 I に基づき精度保証付き数値計算で解くことにより，不安定化を起こす臨界 Reynolds 数の包み込みに成功した．

また，最近の結果として，特定の $R > 0$ に対して，(8) の非自明解自体の存在を局所一意性付きで検証するアルゴリズムも得られている．

4 おわりに

前節で紹介したように，Navier-Stokes 方程式に関連する解の数値的検証方法は着実にその適用範囲を広げつつある．しかしながら，まだまだ条件 (境界条件，関数空間，領域の形状，次元など) が限定されており，今後いっそう研究の進展が期待される．

参考文献

[1] 中尾 充宏, 山本 野人: 精度保証付き数値計算—コンピュータによる無限への挑戦—, 149, 日本評論社 (1998) ISBN 4-535-78258-X

[2] Watanabe, Y., Yamamoto, N. & Nakao, M.T.: A numerical verification method of solutions for the Navier-Stokes equations, *Reliable Computing* **5** (1999) pp.347–357.

[3] Heywood, J.G., Nagata, W. & Xie, W.: A numerically based existence theorem for the Navier-Stokes equations, *Journal of Mathematical Fluid Mechanics* **1** (1999) pp.5-23.

[4] Wieners, C.: Numerical enclosures for solutions of the Navier-Stokes equation for small Reynolds numbers, *Numerical methods and error bounds*: proceedings of the IMACS-GAMM International Symposium on Numerical Methods and Error Bounds held in Oldenburg, Germany, July 9-12, 1995 / edited by Götz Alefeld, Jürgen Herzberger, Mathematical research Vol.89, Berlin: Akademie Verlag (1996) pp.280 286.

[5] Storck, U.: Numerical enclosure for solutions of the incompressible stationary Navier-Stokes equation in two dimensions, Book of Abstracts of SCAN 2000/Interval 2000 held in Karlsruhe, Germany, September 19-22, 2000, pp.118.

[6] 長藤 かおり, 橋本 弘治, 中尾 充宏: Driven Cavity Problem の定常解に対する数値的検証法について, 応用数学合同研究集会報告集 (2003).

[7] Watanabe, Y., Yamamoto, N., Nakao, M.T. & Nishida, T.: A numerical verification of nontrivial solutions for the heat convection problem, to appear in *Journal of Mathematical Fluid Mechanics.*

[8] Watanabe, Y., Yamamoto, N., Nakao, M.T. & Nishida, T.: Some computer assisted proofs for solutions of the heat convection problems, *Reliable Computing* **9** (2003) pp.359-372 (Special Issue Proceedings of the Validated Computing 2002 conference, May 23-25, 2002, Toronto, Canada, Guest Editor: R. Baker Kearfott).

[9] 渡部 善隆, 中尾 充宏, Michael Plum: Orr-Sommerfeld 問題に対する数値的検証法, 日本数学会 2003 年度秋季総合分科会応用数学分科会講演アブストラクト (2003) pp106-109.

[10] Nagatou, K.: A computer-assisted proof on the stability of the Kolmogorov flows of incompressible viscous fluid, to appear in *Journal of Computational and Applied Mathematics.*