数理解析研究所講究録 1362 巻 2004 年 62-70

パス追跡回路

— 式を回路で記述する SPICE 指向型数値解析法 —

Path Following Circuits — SPICE-Oriented Numerical Methods Where Formulas Are Described by Circuits —

中央大学理工学部電気電子情報通信工学科　山村 清隆　大熊 秀明

Kiyotaka Yamamura and Hideaki Okuma (Chuo University)

あらまし　パス追跡回路は,「式を回路で記述する」という逆転的発想に基づく方法論である．すなわち，一般に非線形システムの数値解析ではシステム（例えば回路）を方程式で記述し，それに数値解法を適用するが，パス追跡回路の方法では数値解法の式を回路で記述し，それに回路シミュレータ SPICE を適用する．それにより手軽でプログラミングのいらない数値解析を実現することができる．また，SPICE に搭載された様々な手法が数値解析の効率を大幅に向上させることが期待される．本稿では，ホモトピー法 (Mathematica や MATLAB にはない機能）の公式を記述するパス追跡回路を，回路解析以外の問題，具体的には不動点問題，線形計画問題，非線形計画問題などに応用する．これらは古くからのホモトピー法の応用分野であると同時に，ホモトピー法の大域的収束性が証明されている分野で，これにより数値解析やオペレーションズ・リサーチの分野に新しい方法論を導入することを試みる．

1. まえがき

大規模集積回路の設計では，回路シミュレーション，すなわち回路を方程式で記述し，それに数値解法を適用して解を求めることが中心的作業の一つとなる．回路シミュレーションのためのプログラムを回路シミュレータといい，現在では SPICE（スパイス）とよばれるシミュレータが世界中の設計現場で採用されている．SPICE は線形回路の直流解析（連立1次方程式の解法），非線形回路の直流解析（非線形方程式の解法），非線形回路の過渡解析（非線形常微分方程式の解法）など多彩な機能をもち，また長年培われたノウハウや様々な洗練された技法が集積されている非常に優れたソフトウェアであるため，その適用対象を回路に限定するのは大きな損失であると考えられる．

一般に非線形システムの数値解析では，システム（例えば回路）を方程式で記述し，それに数値解法を適用する．その際，数値解法のプログラミング（あるいは Mathematica や MATLAB などの既製ソフトウェアの利用）が必要となる．しかし，ホモトピー法などの高度な数値解法は専門的知識を必要するためプログラムの作成が容易ではない．

本稿では,「数値解法の式を回路で記述して SPICE で解く」という逆転的発想に基づく方法論である“パス追跡回路”について議論する．

パス追跡回路 (path following circuit: PFC) は最初は非線形回路の多価関数型特性曲線を回路シミュレータを用いて容易に求める方法として開発・実用化された [1]．その後この方法はホモトピー法を用いた非線形回路の大域的求解法（直流動作点を確実に求める

方法）へと発展し，広く利用されている [2],[3]．最近では，このアイデアを回路解析以外のより一般的な理工学問題へ応用する試みがなされている [4]〜[6]．その結果，より一般的な方程式（連立1次方程式，非線形方程式，非線形常微分方程式）に対してパス追跡回路の利用が可能となっている．

本稿では，Mathematica や MATLAB にはない機能であるホモトピー法を対象に，パス追跡回路を不動点問題，線形計画問題，非線形計画問題などに応用する[1]．これらは古くからのホモトピー法の応用分野であると同時に，ホモトピー法の大域的収束性が証明されている分野で，これにより数値解析やオペレーションズ・リサーチの分野に新しい方法論を導入することを試みる．

2. パス追跡回路を用いたホモトピー法

非線形方程式

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

の解を求める問題を考える．但し f は n 次元ユークリッド空間 R^n から R^n への連続微分可能な写像，$x \in R^n$ は n 次元変数ベクトル，0 は n 次元零ベクトルとする．

非線形方程式の数値解法として最も多用されているのがニュートン法である．しかしニュートン法は初期値 x^0を解 x^*の近傍にとらないと収束しない（解を求められない）という欠点がある．このような方法は「大域的収束性がない」という．逆に任意の初期値から必ず解に収束する方法，もしくは解に収束するような初期値を事前に選べる方法を「大域的収束性がある」という．大域的収束性は非線形方程式の数値解析における最も重要な課題の一つである．

ホモトピー法では式 (1) を解くのに，まず初期値 $x^0 \in R^n$ を選び，x^0を解とする別の方程式

$$f^0(x) = 0 \tag{2}$$

を考える．ただし f^0も R^nから R^nへの写像である．次にパラメータ t を導入し，写像 $h: R^{n+1} \to R^n$ を

$$h(x,t) = tf(x) + (1-t)f^0(x) \tag{3}$$

で定義する．ここで (x,t) を変数とする方程式

$$h(x,t) = 0 \tag{4}$$

を考えると，式 (4) は方程式の数よりも変数の数の方が一つだけ多いので，その解集合 $\{(x,t) \mid h(x,t) = 0\}$ は一般に R^{n+1} 空間における曲線となる．このような曲線を解曲線あるいはパスとよぶ．

x^0 は式 (2) の解であるから，$(x^0,0)$ はパス上の点となる．もし $(x^0,0)$ を含むパスが $t=1$ 超平面 $R^n \times \{1\}$ とある点 $(x^*,1)$ で交わっているならば，x^* は式 (1) の解となる．したがって，$(x^0,0)$ を出発点としてこのパスを追跡し，$t=1$ まで到達すれば，式 (1) の解を得ることができる．このような方法をホモトピー法とよぶ．

---

[1] 文献 [4],[5] でも示されているように，SPICE を用いて一般的な非線形方程式や非線形常微分方程式を解く（SPICE の改良ニュートン法や各種数値積分法を適用する）ことも可能であるが，これらは Mathematica や MATLAB にも搭載されている機能なので，本稿では議論をホモトピー法に限定する．

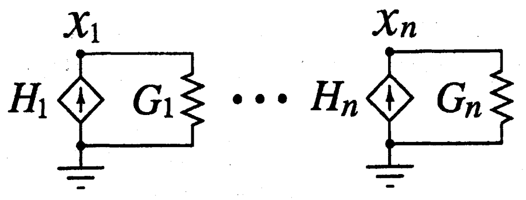


図 1　式 (4) を記述する回路

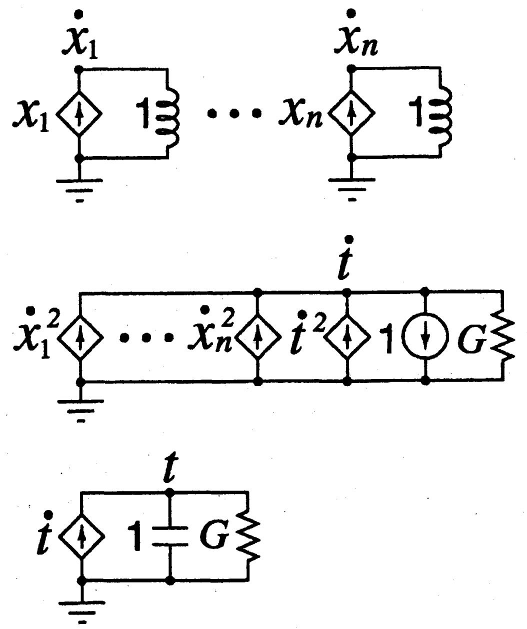


図 2　式 (5) を記述する回路

パス追跡回路では，式 (4) のパスを次のようにして追跡する [1]〜[6]．$(x^0, 0)$ を始点としたときのパスの弧長を s とする．このとき，式 (4) と "弧長の微小変化に関する方程式"

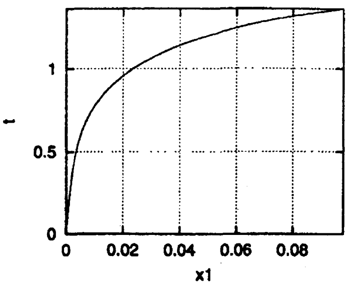
$$\left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{ds}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{dx_n}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 1 \tag{5}$$

を連立させて得られる微分代数方程式を $(x^0, 0)$ から始めて数値積分することによりパスを追跡することができる [5]．

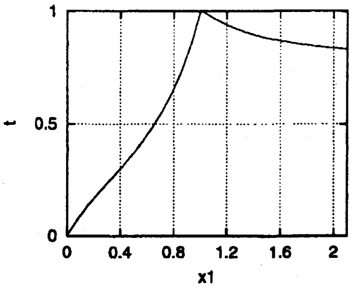
このような作業を SPICE 上で実現するには，まず式 (4) を図 1 のような回路で記述する．ただし図中の H_i は従属電流源の特性を表す制御式で，具体的には

$$H_i(x, t) = h_i(x, t) + G_i x_i \tag{6}$$

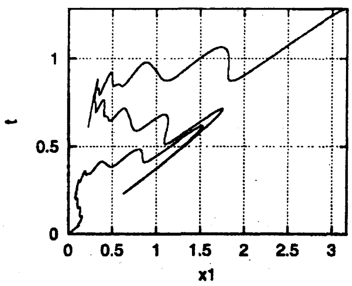
が記述される．ここで G_i の値としては 1 を用いるのがシンプルだが，例えば回路方程式に対しては実際のコンダクタンスがとりうるオーダーの値を用いるみたいに，問題に応じて適切なオーダーの値を用いる方が数値的に安定となる場合が多い．なお，SPICE の従



(a)



(b)



(c)

図 3　不動点問題に対する計算結果

属電源の制御式には加減乗除のほかに指数関数，対数関数，三角関数，べき級数，絶対値など多くの関数が使用できることを付記する．

また，式 (5) を図 2 のような回路で記述する．図 2 の回路は上から順に微分回路，二乗加算回路，積分回路を表す[2]．ただし G は SPICE の制約を満たすためのダミー抵抗で，本稿の数値実験では $G = 10^{-12}$ としている．

図 1,2 の回路の回路方程式は式 (4),(5) となるので，この回路を SPICE で過渡解析することにより式 (4) のパスを追跡することができる．ただし，弧長 s は過渡解析における時間に対応する．図 1,2 のような回路をパス追跡回路とよぶ．

この方法では，ひとたび図 1,2 の回路のネットリストを作成すれば（そのようなネットリストの作成は非常に容易），あとは問題ごとに制御式 $H_i(x,t)$ を書き込むだけでよいので，実現が極めて容易である．

3. 不動点問題への応用

本章以降では，ホモトピー法の大域的収束性が証明されている様々な問題に前章の方法を適用し，その可能性について考察する．なお SPICE としてはフリーソフトウェアである SPICE3f5 を用いた．また計算機は Sun Ultra 10 (UltraSPARC-IIi 360MHz) を使用した．

まず不動点問題への応用について検討する．ホモトピー法の不動点問題への応用は歴史が古く [7]〜[9]，経済均衡論，ゲームの理論，最適化理論等の分野から派生する様々な問題に応用されてきた．本章では，文献 [7],[9] 等で例題として使われている三つの不動点問題（$n = 100, 100, 10$）に本手法を適用する．

このときの計算結果（得られたパス）を図 3 に示す．ただし縦軸は t, 横軸は x_1 とした．図 3(b) でパスが $t = 1$ で折れ曲がっているのは，この問題の解が正則でないことによる．換言すれば，このような非正則問題に対してもパス追跡回路は正常に動作することがわかる．また図 3(c) では非常に複雑な形状のパスが得られている．すなわち，SPICE には stiff な回路方程式に対応できるよう様々な手法が導入されているので，パス追跡回

[2] 例えば図 2 の三番目の回路で，従属電流源の $\dot{t}$ は t の微分と考えるのではなく，二番目の回路の節点電圧を表す（t とは別の）変数で，それが三番目の回路の節点電圧 t の微分に一致すると考える．

路は非線形性の強い問題やパスが複雑な形状となる問題に対してもロバストな性質をもつことがわかる．

4. 線形計画問題への応用

線形計画問題の解法としては単体法と内点法が代表的である．特にオペレーションズ・リサーチの分野では1984年のKarmarkarの研究以来内点法の研究が非常に活発に行われている．現在最もよく使われている内点法はインフィージブル主双対内点法であるが，文献[10]ではこの方法が次のような非線形方程式（式の説明は省略する）に対するホモトピー法と等価であることが示されている．ただし，tは1から0へ変化させるものとする．

$$
\begin{aligned}
&Ax - b - t(Ax^0 - b) = 0\\
&A^T y + u - c - t(A^T y^0 + u^0 - c) = 0\\
&Xu - tX^0 u^0 = 0
\end{aligned}
$$

このような方程式のパスを図1,2のパス追跡回路で追跡することができるが，このときのパスはtに関して単調となることが示されているので[10]，ここでは別の方法，すなわち弧長sの概念を捨て，時刻0で$t=1$, 時刻1で$t=0$と単調に減少していく（区分的線形）独立電圧源を用いてtを表し，時刻0から1まで過渡解析を行うことによりパス追跡を行った．具体的には，図1の回路と図4の回路でパス追跡を行った．ただし独立電圧源のコードは

```
Vt t 0 DC 0 PWL(0 1 1 0)
```

である．また初期値としては$(x^0, y^0, u^0) = (1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0, 1, \cdots, 1)$あるいは文献[11]で推奨されている値を用いた．

例題は標準的なベンチマーク問題であるNetlib問題集[11]（http://www.netlib.org/lp）から30種類の問題を採用した．図5(a)はAFIRO（制約条件の数27, 変数の数32），図5(b)はSTOCFOR1（制約条件の数117, 変数の数111）に本手法を適用したときの計算結果である．ただし左側が目的関数の値の変化，右側がx_1の値の変化を表している．なおパスは$t=1$から$t=0$方向に進んでいることに注意する．

また，SHIP08S（制約条件の数778, 変数の数2,387）とSHIP12S（制約条件の数1,151, 変数の数2,767）に本手法を適用したときの計算結果を表6(a),(b)にそれぞれ示す．計算時間は最も小さいAFIROで10秒，SHIP08Sで約14分，最も大きいSHIP12Sで約20分である．このように数千変数クラスの問題ならSPICEを用いて線形計画問題を短時間で解くことができる．

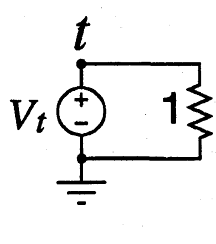


図4　tの生成回路

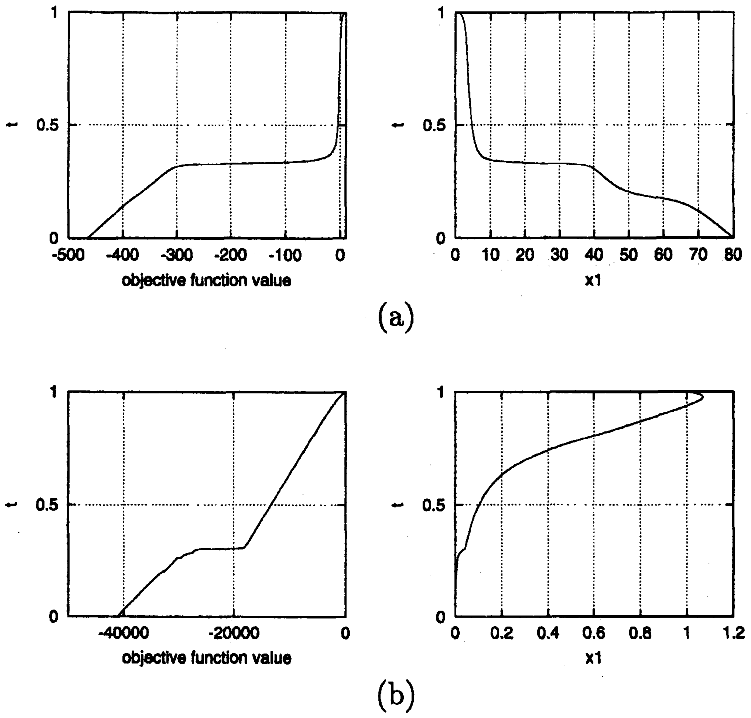


図 5 線形計画問題に対する計算結果 1

5. 非線形計画問題への応用

非線形凸計画問題

$$\begin{array}{lll} \text{目的関数} & f(x) \to \text{最大化} & \\ \text{制約条件} & g_j(x) \geq 0, & j = 1, 2, \cdots, r \\ & h_j(x) = 0, & j = 1, 2, \cdots, s \end{array}$$

は Kuhn-Tucker 方程式にホモトピー法を適用することにより解くことができる [8]. このときのホモトピー方程式は次のようになる.

$$\begin{aligned} & -(1-t)(x-x^0) + t\nabla f(x)^T \\ & \quad + \sum_{j=1}^{r} \alpha_j^+ \nabla g_j(x)^T + \sum_{j=1}^{s} \mu_j \nabla h_j(x)^T = 0 \\ & \alpha_j^- - g_j(x) = 0, \qquad j = 1, 2, \cdots, r \\ & h_j(x) = 0, \qquad j = 1, 2, \cdots, s \end{aligned}$$

ここで, α_j^+, α_j^- は与えられた実数 α_j に対して

$$\begin{aligned} \alpha_j^+ &= \max\{0, \alpha_j\} \\ \alpha_j^- &= \max\{0, -\alpha_j\} \end{aligned}$$

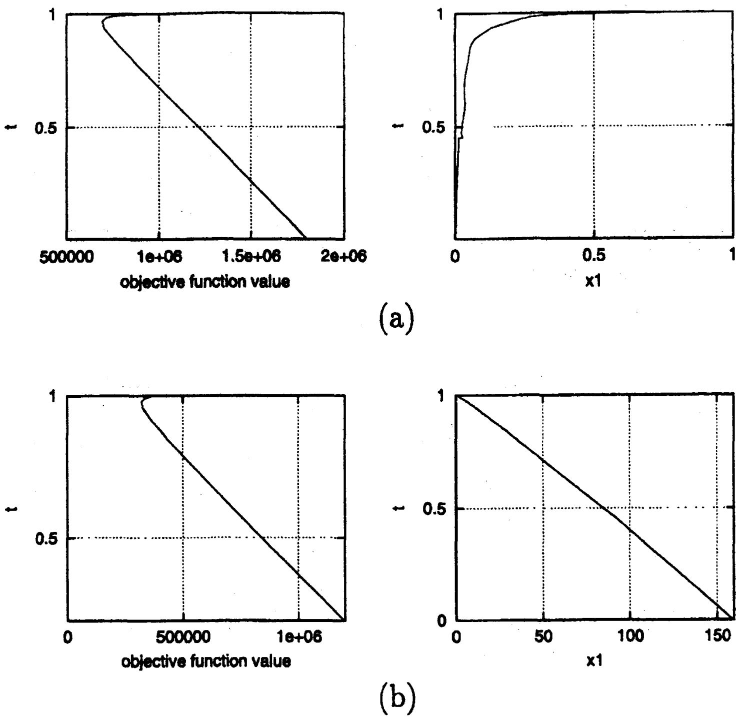


図 6　線形計画問題に対する計算結果 2

で定義される.

Kuhn-Tucker 方程式に本手法を適用する場合，上記の α_j^+, α_j^- を SPICE 上で実現するため次のような方程式を新たに加える.

$$\begin{aligned} \alpha_j^+ &= \frac{1}{2}(|\alpha_j| + \alpha_j) \\ \alpha_j^- &= \frac{1}{2}(|\alpha_j| - \alpha_j), \quad j = 1, 2, \cdots, r \end{aligned}$$

これを図 7 のような回路で記述する．ただし従属電流源の制御式は

$$\begin{aligned} A_j^+ &= \frac{1}{2}(|\alpha_j| + \alpha_j) \\ A_j^- &= \frac{1}{2}(|\alpha_j| - \alpha_j) \end{aligned}$$

とする.

例題として文献 [8] の p.67 に示されている凸計画問題に本手法を適用したときの結果を図 8 に示す．計算時間は 7 秒である.

その他，非線形境界値問題や通信路容量の計算問題（いずれもホモトピー法の大域的収束性が保証されている）に対しても本手法を適用し，良好な結果を得たが，紙面の都合により省略する.

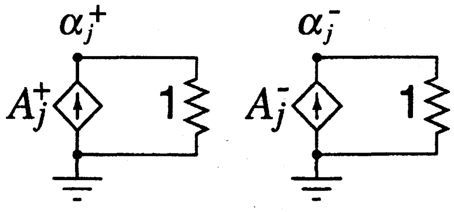


図 7　α_j^+, α_j^- の生成回路

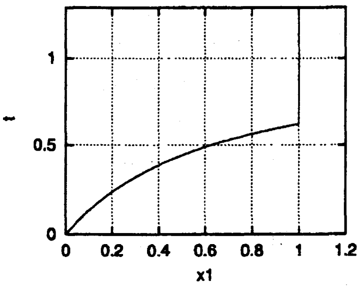


図 8　非線形凸計画問題に対する計算結果

6. むすび

本稿では,「式を回路で記述する」という逆転的発想に基づく方法論であるパス追跡回路について取り上げ，ホモトピー法の大域的収束性が証明されている問題に対してパス追跡回路を用いたホモトピー法を適用し，その可能性について論じた．SPICE は長年培われたノウハウや様々な洗練された技法が集積されている非常に優れたソフトウェアであるため，このような発想は数値解析やオペレーションズ・リサーチの分野に新しい方法論を提供することが期待される．特に stiff な問題に対しては大きな有効性が期待される．また SPICE ユーザーにとっては，使い慣れた SPICE を用いて手軽に数理計画問題などを解くことのできる，極めて実現容易な方法となる．

今後の課題としては，本手法をより広いクラスの問題に適用しその有効性を検証することや，ホモトピー法以外の数値解法を SPICE で実現することなどがあげられる．

謝辞　貴重な御示唆を頂きました早稲田大学大学院の井上靖秋教授並びに徳島文理大学の牛田明夫教授に感謝致します．なお本研究の一部は文部科学省 21 世紀 COE プログラム「電子社会の信頼性向上と情報セキュリティ」(中央大学研究拠点，http://www.21coe.chuo-u.ac.jp/security/) の補助を受けました．ここに謝意を表します．

文　献

[1] Y. Inoue and K. Yamamura, "Practical algorithms for dc operating-point analysis of large-scale circuits," Proc. 1995 Int. Symp. Nonlinear Theory and its Applications, Las Vegas, Nevada, pp.1153–1158, Dec. 1995.

[2] Y. Inoue, S. Kusanobu, and K. Yamamura, "A practical approach for the fixed-point homotopy method using a solution-tracing circuit," IEICE Trans. Fundamentals, vol.E85-A, no.1, pp.222–233, Jan. 2002.

[3] A. Ushida, Y. Yamagami, Y. Nishio, I. Kinouchi, and Y. Inoue, "An efficient algorithm for finding multiple DC solutions based on SPICE-oriented Newton homotopy method," IEEE Trans. Comput.-Aided Des. Integrated Circuits and Systems, vol.21, no.3, pp.337–348, March 2002.

[4] 高橋朋弘, "ホモトピー法を用いた非線形回路の大域的求解法に関する研究," 中央大学大学院理工学研究科修士論文（山村研究室）, Feb. 2002.

[5] 牛田明夫, 田中衛, "電子回路シミュレーション," コロナ社, 2002.

[6] 牛田明夫, "SPICE シミュレータの理工学問題への応用," 第16回 回路とシステム（軽井沢）ワークショップ論文集, pp.31–36, April 2003.

[7] 小島政和, "相補性と不動点 — アルゴリズムによるアプローチ," 産業図書, 1981.

[8] C.B. Garcia and W.I. Zangwill, "Pathways to Solutions, Fixed-Points, and Equilibria," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1981.

[9] E.L. Allgower and K. Georg, "Simplicial and continuation methods for approximating fixed points and solutions to systems of equations," SIAM Rev., vol.22, pp.22–84, Jan. 1980.

[10] 水野眞治, "ホモトピー法と内点法," 統計数理, vol.46, no.2, pp.335–343, 1998.

[11] 小島政和, 土屋隆, 水野眞治, 矢部博, "内点法," 朝倉書店, 2001.

山村清隆 (http://www.elect.chuo-u.ac.jp/yamamura/)

1987年早稲田大学大学院理工学研究科博士課程修了．工学博士．1985年早稲田大学理工学部電子通信学科助手．1988年群馬大学工学部情報工学科助教授．1999年中央大学理工学部電気電子情報通信工学科教授，現在に至る．非線形システムの数値解析を中心とする情報数理工学の研究に従事．1986年丹羽記念賞，1986年電子情報通信学会篠原記念学術奨励賞，1989年井上研究奨励賞，1990年，1999年及び2002年電気通信普及財団テレコムシステム技術賞，1999年電子情報通信学会論文賞，1999年日本ＩＢＭ科学賞，2000年電気科学技術奨励会オーム技術賞，2003年情報処理学会業績賞，2000年，2001年，2003年及び2004年中央大学学術研究奨励賞 各受賞．

大熊秀明

2002年中央大学理工学部電気電子情報通信工学科卒業．現在，同大大学院博士前期課程在学中．非線形システムの数値解析に関する研究に従事．