学 位 審 査 報 告 書

（ ふ り が な ） 氏 名	ほりなが しゅうじ 堀永 周司
学位（専攻分野）	博 士 （ 理 学 ）
学 位 記 番 号	理 博 第 号
学位授与の日付	令 和 2 年 3 月 23 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研 究 科・専 攻	理学研究科 数学・数理解析 専攻

（学位論文題目）

Constructions of nearly holomorphic Siegel modular forms of degree two

（次数 2 の概正則ジーゲル保型形式の構成について）

論 文 調 査 委 員	（主査） 主査 池田 保 教授 副査 雪江 明彦 教 授 副査 並河 良典 教 授

理 学 研 究 科

（ 続紙 1 ）

京都大学	博士（理　学）	氏名	堀永　周司
論文題目	Constructions of nearly holomorphic Siegel modular forms of degree two		

（論文内容の要旨）

保型形式の構成は保型形式論における基本的な問題の一つといえる．例として，ポワンカレ級数，テー関数，アイゼンシュタイン級数やRankin-Cohen 括弧積などがある．本論文ではRankin-Cohen 括弧積を用いた概正則保型形式を構成を提示した．志村氏はcritical value におけるアイゼンシュタイン級数の解析的な性質に関する問題を提起した．その問題を考察するために，概正則保型形式が志村氏により定義された．例えば，重さが2のアイゼンシュタイン級数 E_2 は概正則保型形式の典型例である．そのフーリエ展開は

$$E_2(z) = \frac{3}{\pi y} - 1 + 24 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{d|n} d \right) e^{2\pi\sqrt{-1}nz}, \quad z = x + \sqrt{-1}y \in \{ z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) > 0 \}$$

で表される．E_2 のときと非常に似たような形で重さが $(n+3)/2$ の概正則な次数 n のジーゲルアイゼンシュタイン級数が志村氏により構成された．本論文では，その次数n のアイゼンシュタイン級数が本質的な働きをする．概正則保型形式のリー環の表現論的な側面はPitale, Saha と Schmidt らにより調べられた．彼らは SL_2 と Sp_4 の場合に概正則保型形式が生成しうるリー環の表現を分類している．SL_2 の場合は，自明表現，正則離散系列表現とその極限に加え，上記アイゼンシュタイン級数 E_2 が生成する直既約表現に限る．その直既約表現は自明表現を部分表現に持ち，自明表現で割った際に重さが2 の正則離散系列表現に同型になる．これは最低ウェイト0 のVerma 加群の反傾表現に同型である．Sp_4 の場合も同様に，ユニタリな最低ウェイト表現に加え，特定の放物型Verma 加群の反傾表現が候補として挙げられている．しかし，分類された表現すべてが保型形式の空間に実現できるかも分かっていない．本論文では可約な表現に着目し，その表現を生成する概正則保型形式を構成している．$\mathfrak{g}$ を $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ のリー環とする．今，$\mathfrak{H} = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) = K_\infty$ はエルミート対称空間である．ここで，K_∞ は $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ の極大コンパクト部分群であり，基点 $\mathbf{i} = \sqrt{-1}\mathbf{1}_n \in \mathfrak{H}$ は K_∞ に対応する点とする．このとき，次の分解が存在する:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{p}_-$$

ここで，部分リー環 $\mathfrak{k}$ は極大コンパクト部分群 K_∞ のリー環の複素化であり，$\mathfrak{p}_+$ (resp. $\mathfrak{p}_-$) は $\mathfrak{H}_n$ の基点 $\mathbf{i}$ に関する正則接空間 (resp. 反正則接空間) に対応するリー環である．以下では，論文に合わせ，$\mathfrak{g}$ の正ルート系を次のように取る:

$$\{ e_i - e_j \,|\, 1 \le i < j \le n \} \cup \{ -(e_i + e_j) \,|\, 1 \le i < j \le n \}$$

（論文審査の結果の要旨）

この場合, 上記最低ウェイト表現を最高ウェイト表現と読み替えることができる. $\lambda_i - \lambda_{i+1} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を満たすウェイト $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}$ に対して, $(\rho_\lambda, V_\lambda)$ を $\mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ の既約表現で, 最高ウェイト λ を持つものとする. $\mathfrak{p}_-$ が自明に作用することで, ρ を $\mathfrak{p}_- + \mathfrak{k}$ の既約表現とみなす. 以下, リー環 $\mathfrak{a}$ に対して, $U(\mathfrak{a})$ を $\mathfrak{a}$ の普遍包絡環とする. ここで, 最高ウェイト λ をもつ generalized Verma module $N(\lambda)$ を

$$N(\lambda) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}_- + \mathfrak{k})} V_\lambda$$

により定義する. $N(\lambda)$ は一意の既約商 $L(\lambda)$ を持つ. $N(\lambda)^\vee$ を $N(\lambda)$ の反傾表現とする. $U(\mathfrak{k})$-加群として, 制限された表現たち $N(\lambda)^\vee|_{U(\mathfrak{k})}$ に $N(\lambda)|_{U(\mathfrak{k})}$ は互いに同型である. Pitale-Saha-Schmidt の結果により, $n = 2$ のとき, $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{R})$ 上の概正則保型形式の空間に現れる直既約だが可約な表現は, ある 2 以上の整数 m が存在して $N(m+1;1)^\vee$ に同型となる. 一般の n において半整数の場合も含めると, 次が分かる:

定理. E^* を志村氏の構成した次数 n のジーゲルアイゼンシュタイン級数とする. このとき, E^* は $\mathfrak{g}$-加群として $N((n-1)/2, \ldots, (n-1)/2)^\vee$ を生成する.

$n = 2$ とすると, アイゼンシュタイン級数 E^* はウェイトが $5/2$ であり, $N(1/2, 1/2)^\vee$ を生成する. この事実は Rankin-Cohen 括弧積で概正則保型形式を構成する重要な事実となっている. Rankin-Cohen 括弧積は保型形式を構成する強力な手法の一つである. Rankin-Cohen 括弧積はリー環の表現のテンソル積の分岐則とみることが出来る. $\mathcal{D}$ を Maass-Shimura 微分作用素とする.

定理. E^* を志村氏の構成した次数 2, ウェイト $5/2$ のジーゲルアイゼンシュタイン級数とする. このとき, 正の整数 m に対して, 保型形式 $[\mathcal{D}E^*; E^*]_m$ は 0 ではなく, $\mathfrak{g}$-加群として $N(1+2m, 1)^\vee$ を生成する.

構成した保型形式 $[\mathcal{D}E^*; E^*]_m$ が 0 ではないことは, 具体的なフーリエ係数の計算に基づいている. また, そのフーリエ係数の計算により保型形式 $[\mathcal{D}E^*, E^*]_m$ が正則ではないこともわかる. そして, 正則ではないことと Pitale-Saha-Schmidt の表現の分類を組み合わせることで $[\mathcal{D}E^*, E^*]_m$ が $N(1+2m, 1)^\vee$ を生成することが分かる.

要旨公開可能日：　　　年　　月