数理解析研究所講究録 1365 巻 2004 年 95-103

ON NONLINEAR STRONG ERGODIC THEOREMS IN BANACH SPACES (BANACH空間における非線形強エルゴード定理について)

芝浦工業大学 厚芝 幸子 (Sachiko Atsushiba)
Department of Mathematics
Shibaura Institute of Technology

1. 序

C を実 Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とする. C から C への写像 T が C から C への nonexpansive であるとは任意の $x, y \in C$ に対して

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$$

をみたすときである. $F(T)$ で集合 $\{x \in C : x = Tx\}$ を表す. $N(C)$ を C 上のすべての all nonexpansive mappings からなる集合とする. 任意の $x \in C$ に対して, この x の ω-limit set を

$$\omega(x) = \{z \in C : z = \lim_{i \to \infty} T^{n_i} x \quad (i \to \infty \text{ のとき } n_i \to \infty)\}.$$

と定義する. Edelstein [13] は狭義凸な Banach 空間において, 定義域がコンパクトである nonexpansive mappings に対する非線形強エルゴード定理を証明した: C を狭義凸な Banach 空間 E の空でないコンパクト凸部分集合とする. T を C から C への nonexpansive mapping とする. x を C の元とする. このとき, 任意の $\xi \in \overline{co}\omega(x)$ に対して, $S_n(\xi) = (1/n)\sum_{k=0}^{n-1} T^k \xi$ は T の不動点に強収束する. ここで, $\overline{co}A$ は A の凸包の閉包とする. また, Dafermos and Slemrod [11] が狭義凸な Banach 空間において, 定義域がコンパクトである one-parameter nonexpansive semigroup に対する非線形強エルゴード定理を証明した. 一方, 定義域が有界である nonexpansive mappings に対する最初の非線形強エルゴード定理は Hilbert 空間において Baillon [5] が確立した: C を Hilbert 空間 H の空でない有界閉凸部分集合とする. T を C から C への nonexpansive mapping とする. x を C の元とする. このとき, $S_n(x) = (1/n)\sum_{k=0}^{n-1} T^k x$ は T の不動点に弱収束する. Bruck [8] は Baillon の定理 [5] を一様凸で Fréchet 微分なノルムをもつ Banach 空間へ一般化した. Brézis-Browder [6] は odd-type の nonexpansive mappings に対する非線形強エルゴード定理を Hilbert 空間において証明した (Reich [20] も参照). Atsushiba-Takahashi [2] は Bruck [8, 9] の考えを用いて, Edelstein [13] の強収束定理の改良をし

Key words and phrases. Fixed point, nonexpansive mapping, nonexpansive semigroup, strong convergence, nonlinear ergodic theorem.

た: x を C の任意の元とする. このとき, $S_n(x) = (1/n)\sum_{k=0}^{n-1} T^k x$ は T の不動点に強収束する. [3] では狭義凸な Banach 空間のコンパクト凸集合での one-parameter nonexpansive semigroup に対する非線形強エルゴード定理を証明した. さらに, [4] で, 狭義凸な Banach 空間のコンパクト凸集合で可換な semigroup をパラメタとする nonexpansive mappings の semigroup に対する非線形強エルゴード定理を証明した.

本研究では 写像に仮定する条件として, コンパクト性に関連する性質について探究してきた. そこで写像の定義域がコンパクトであること (あるいは写像がコンパクト写像であること) より弱い仮定のもとで考察し, 得られた非線形強エルゴード定理を報告する.

2. 準備

本論文では以後, E は実 Banach 空間を表し, E^* は E の共役空間とし, $\langle y, x^*\rangle$ は $x^* \in E^*$ の $y \in E$ での値を表す. $x_n \to x$ は点列 $\{x_n\}$ が x に強収束することを表し, また $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ も x_n が x に強収束することを表す. $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^+$ はそれぞれ, すべての実数からなる集合, すべての非負の実数からなる集合とする. さらに, $\mathbb{N}$ はすべての非負の整数からなる集合を表す. E の部分集合 A に対して, $\mathrm{co}A$, $\overline{\mathrm{co}}A$ と $\mathrm{co}_p A$ はそれぞれ, A の凸包, 閉凸包, 集合 $\{\sum_{i=0}^{p} a_i y_i : y_i \in A, a_i \geq 0, \sum_{i=0}^{p} a_i = 1\}$ とする. また $D_r(x)$ で $x \in E$ を中心する半径 r の開球をあらわす.

C を E の空でない閉凸部分集合とする. Γ で狭義単調増加, 連続で凸で $\mathbb{R}^+$ から $\mathbb{R}^+$ への関数で $\gamma(0) = 0$ をみたすもの全体をあらわすことにする. C から C への写像 T は, ある $\gamma \in \Gamma$ について任意の $x, y \in C$ と $\lambda \in [0,1]$ に対して

$$\gamma(\|\lambda Tx + (1-\lambda)Ty - T(\lambda x + (1-\lambda)y)\|) \leq (\|x-y\| - \|Tx - Ty\|)$$

をみたすならば *type* (γ) であるという ([8] 参照). ある $\gamma \in \Gamma$ に対して T が type (γ) であるならば, 明らかに T は nonexpansive である. すべての affine nonexpansive mapping はすべての $\gamma \in \Gamma$ に対して type (γ) である. 狭義凸な Banach 空間のコンパクト凸部分集合 C から C への nonexpansive mapping は type (γ) である ([2, 8] 参照). また一様凸な Banach 空間の有界閉凸部分集合 C から C への nonexpansive mapping は type (γ) である ([8] 参照). C から C への写像 T と $\varepsilon > 0$ に対して集合 $F_\varepsilon(T)$ を

$$F_\varepsilon(T) = \{x \in C : \|Tx - x\| \leq \varepsilon\}$$

で定義する.

以後, S は単位元をもつ commutative semigroup とする. $(S, \leq)$ は binary relation が次のように定義されているとき directed system になる. 以後, この論文では S にこの binary relation が入っているものとする: $a \leq b$ であることの必要十分条件は $a + c = b$ をみたす $c \in S$ が存在することである.

C から C への写像の族 $\mathcal{S} = \{T(s) : s \in S\}$ が次の (i),(ii) をみたすとき,$\mathcal{S} = \{T(s) : s \in S\}$ は C 上の *nonexpansive semigroup* であるという.

(i) $T(s+t) = T(s)T(t)$ が任意の $t, s \in S$ に対して成立する;

(ii) $\|T(s)x - T(s)y\| \le \|x - y\|$ が任意の $x, y \in C$ と $s \in S$ に対して成立する.

また, C から C への写像の族 $\mathcal{S} = \{T(s) : s \in S\}$ が次の (i),(ii) をみたすとき, $\mathcal{S} = \{T(s) : s \in S\}$ は C 上の *type* (γ) *semigroup* であるという.

(i) $T(s+t) = T(s)T(t)$ 任意の $t, s \in S$ に対して成立する;

(ii) 任意の $s \in S$ に対して $T(s)$ は type (γ) である.

ここで $\gamma \in \Gamma$ である. $F(\mathcal{S})$ は $\{T(s) : s \in S\}$ の共通不動点, すなわち $F(\mathcal{S}) = \bigcap_{s \in S} F(T(s))$ を表す.

以後, $B(S)$ は S 上の有界実数値関数全体からなる Banach 空間とし, そのノルムは supremum-norm とする. また, X は $B(S)$ の部分空間を表す. $\mu \in X^*$ に対して, $\mu(f)$ は μ の $f \in X$ での値を表すが, $\mu(f)$ は $\mu_t(f(t))$ とかくこともある. X が 1 を含むとき, X 上の線形汎関数 μ は $\|\mu\| = \mu(1) = 1$ をみたすならば X 上の mean という.

C を Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とする. $\mathcal{S} = \{T(t) : t \in S\}$ を C 上の nonexpansive semigroup で $F(\mathcal{S})$ が空でないとする. をみたすとする. さらに任意の $x \in C$ に対して $\{T(t)x : t \in S\}$ の弱閉包が弱コンパクトであることを仮定する.X を $B(S)$ の部分空間で $1 \in X$ で任意の $s \in S$ に対して r_s-invariant であり, また任意の $x \in C$ と $x^* \in E^*$ に対して, $t \mapsto \langle T(t)x, x^* \rangle$ は X の元とする. x を C の元とする. このとき, X 上の任意の mean μ に対して $\langle T_\mu x, y \rangle = \mu_s \langle T(s)x, y \rangle$ が任意の $y \in E^*$ に対して成立する $T_\mu : C \to C$ を考えられる ([23, 16]). また, T_μ は C から C への nonexpansive mapping になることや $x \in F(\mathcal{S})$ に対して $T_\mu x = x$ が成立することも知られている.

任意の $s \in S$ と $f \in B(S)$ に対して, $r_s f \in B(S)$ を

$$(r_s f)(t) = f(ts), \qquad t \in S$$

で定義する. また r_s^* で r_s の共役作用素を表す.

μ は X^* の元とする. $\mu(f)$ で μ の $f \in X$ における値をあらわす. $\mu(f)$ を $\mu_t(f(t))$ や $\int f(t) d\mu(t)$ であらわすこともある. さらに X は r_s-invariant であるとする, つまり $r_s(X) \subset X$ がすべての $s \in S$ に対して成り立つとする. このとき, 任意の $s \in S$ と $f \in X$ に対して $\mu(r_s f) = \mu(f)$ が成立するならば, X 上の mean μ は invariant という. $s \in S$ に対して, point evaluation δ_s を $\delta_s(f) = f(s)$ をすべての $f \in B(S)$ に対して成立させるものと定義する. point evaluations の凸結合を S 上の finite mean という. S 上の finite mean は $B(S)$ の部分空間で 1 を含む任意の部分空間 X 上の mean でもある.

$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq \cdots A$ は E の空でない閉部分集合の decreasing chain とする. このとき $A_n \overset{\text{dis}}{\to} A$ は $x_n \in A_n$ をみたす任意の $\{x_n\}$ に対して $\lim_{n\to\infty} \operatorname{dis}(x_n, A)$ となることを意味するものとする. C が E の空でないコンパクト部分集合ならばその C の任意の decreasing chain $\{A_n\}$ は $A_n \overset{\text{dis}}{\to} \cap_i A_i$ をみたす.

3. 補題

本研究では写像に仮定する条件として, コンパクトに関連する性質について探究してきた. そこで, この節では写像の定義域がコンパクトであること (あるいは写像がコン

パクト写像であること) より弱い仮定のもとで考察し, 得られた基本的補題を記述する. また, type(γ) mapping について成立する基本的補題についても記述する.

次の補題は Bruck [9, Lemma 2.1] によって証明された ([2] も参照).

Lemma 3.1 (Bruck). C を Banach 空間 E の空でない有界閉凸部分集合とする. このとき, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, ある $\gamma_n \in \Gamma$ が存在し, $\gamma_n(0) = 0$ が成立して

$$\gamma_n\left(\left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i T y_i - T\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i\right)\right\|\right) \leq \max_{1\leq i,j\leq n}(\|y_i - y_j\| - \|Ty_i - Ty_j\|)$$

が C 上のすべての type (γ) mapping T, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ をみたす非負の実数列 $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$ と C の点列 $\{y_i\}_{i=1}^{n}$ に対して成立する.

Lemma 3.1 を用いて [1, 4] と同様の証明方法で次の補題を証明できる ([14, 16] も参照).

Lemma 3.2. C を Banach 空間 E の空でない有界閉凸部分集合とし, $\mathcal{S} = \{T(t) : t \in S\}$ は C 上の type (γ) semigroup とする. x を C の元とする. このとき, S の任意の finite mean μ と $\varepsilon > 0$ に対してある $w_0 = w_0(\mu, \varepsilon) \in S$ が存在して,

$$\left\|\int T(h+s+w)xd\mu(s) - T(h)\left(\int T(s+w)xd\mu(s)\right)\right\| < \varepsilon$$

がすべての $h \in S$, $w \geq w_0$ について成立する.

Lemma 3.2 を用いて [1, 4] と同様の証明方法で次の補題を証明できる ([14, 16] も参照).

Lemma 3.3. C を Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とし, $\mathcal{S} = \{T(t) : t \in S\}$ は C 上の type (γ) semigroup で $F(\mathcal{S})$ が空でないとする. x は C の元とする. $\{\mu_\alpha : \alpha \in I\}$ と $\{\lambda_\beta : \beta \in J\}$ を S 上の finite means の net で

$$\lim_\alpha \|\mu_\alpha - r_t^*\mu_\alpha\| = 0 \quad \text{and} \quad \lim_\beta \|\lambda_\beta - r_t^*\lambda_\beta\| = 0 \quad (t \in S). \qquad (*)$$

をみたすとする. このとき, S のある net$\{p_\alpha : \alpha \in I\}$ と $\{q_\beta : \beta \in J\}$ が存在して任意の $z \in F(\mathcal{S})$ に対し,

$$\lim_\alpha \left\|\int T(p_\alpha + t)xd\mu_\alpha(t) - z\right\| = \lim_\beta \left\|\int T(q_\beta + t)xd\lambda_\beta(t) - z\right\|.$$

が成立する.

Remark 3.4. Lemma 3.3 において $p_\alpha{}' \geq p_\alpha$, $q_\beta{}' \geq q_\beta$ をみたす S の nets $\{p_\alpha{}'\}$,$\{q_\beta{}'\}$ をとる. このとき, 任意の $z \in F(\mathcal{S})$ に対して

$$\lim_\alpha \left\|\int T(p_\alpha{}' + t)xd\mu_\alpha(t) - z\right\| = \lim_\beta \left\|\int T(q_\beta{}' + t)xd\lambda_\beta(t) - z\right\|$$

が成立する.

C を Banach 空間 E の空でない部分集合とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して ある $m \in \mathbb{N}$ が存在し, $\mathrm{co}M \subset \mathrm{co}_m M + D_\varepsilon(0)$ が C のすべての部分集合 M について成立するとき, C は convex approximation property をもつという. Banach 空間 E のコンパクト部分集合は convex approximation property をもつ ([2, Lemma 2.4]). 狭義凸な Banach 空間のコンパクト凸集合上の nonexpansive mappings に対する非線形強エルゴード定理 ([2, 3, 4]) の証明は convex approximation property が重要な役割を担っている形の証明である.

コンパクト性より弱く, この convex approximation property とは別の仮定で, 非線形強エルゴード定理が成立するか探求していた中で得られた基本的補題を報告する. ここでは特に, 次の性質に関連して探求した補題を記す: C を Banach 空間 E の空でないコンパクト凸部分集合とし, T は C から C への nonexpansive mapping とする. このとき,$\overline{\mathrm{co}}F_{1/n}(T) \overset{\mathrm{dis}}{\to} F(T)$ が成立する.

Lemma 3.5. C を Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とし, T は C から C への nonexpansive mapping で $F(T)$ が空でないとする. $\overline{\mathrm{co}}F_{1/n}(T) \overset{\mathrm{dis}}{\to} F(T)$ が成立するとする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して

$$\overline{\mathrm{co}}F_\delta(T) \subset F_\varepsilon(T)$$

が成立する.

Lemma 3.5 を用いて次の補題を証明できる. ([4, 14, 16] 参照).

Lemma 3.6. C を Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とし, $\mathcal{S} = \{T(t) : t \in S\}$ は C 上の type (γ) semigroup で $F(\mathcal{S})$ が空でないとする. ある $t \in S$ に対して $\overline{\mathrm{co}}F_{1/n}(T(t)) \overset{\mathrm{dis}}{\to} F(T(t))$ が成立するとし, x を C の元とする. $\{\mu_\alpha : \alpha \in I\}$ は

$$\lim_{\alpha} \|\mu_\alpha - r_t^* \mu_\alpha\| = 0. \tag{$*$}$$

が任意の $t \in S$ に対して成立する. S 上の finite means net とする. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ と $t \in S$ に対してある $\alpha_0(\varepsilon, t) \in I$ が存在し,

$$\left\| \int T(s+p)x d\mu_\alpha(s) - T(t)\left(\int T(s+p)x d\mu_\alpha(s) \right) \right\| < \varepsilon$$

がすべての $\alpha \geq \alpha_0(\varepsilon, t)$ と $p \in S$ について成立する. さらに,$F(\mathcal{S})$ がコンパクトであれば, 任意の $x \in C$ と S の net$\{p_\alpha : \alpha \in I\}$ に対して, $\{\int T(s+p_\alpha)x d\mu_\alpha(s)\}$ の subnet で $F(\mathcal{S})$ の点に強収束するものがとれる.

4. 非線形強エルゴード定理

この節では Banach space 空間における非線形強エルゴード定理を証明する. Lemmas 3.3,3.6 を用いて次の補題を証明できる. この補題は主定理 (Theorem 4.2) の証明で本質的となっている.

Lemma 4.1. C を Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とする. $\mathcal{S}=\{T(t):t\in S\}$ は C 上の type (γ) semigroup で $F(\mathcal{S})$ が空でないとする. X は $B(S)$ の部分空間で $1\in X$ で任意の $s\in S$ に対して r_s-invariant であり, また 任意の $x\in C$ と $x^*\in E^*$ に対して, $t\mapsto\langle T(t)x,x^*\rangle$ は X の元とする. ある $t\in S$ に対して $\overline{\mathrm{co}}F_{1/n}(T(t))\overset{\mathrm{dis}}{\to}F(T(t))$ が成立するとする. $\{\mu_\alpha:\alpha\in I\}$ は

$$\lim_\alpha\|\mu_\alpha-r_s^*\mu_\alpha\|=0 \qquad (*)$$

が任意の $s\in S$ について成立する S 上の finite mean の net とする. x を C の元とする. もし,$F(\mathcal{S})$ がコンパクトであれば, $\int T(p+t)xd\mu_\alpha(t)$ は $\mathcal{S}=\{T(t):t\in S\}$ の共通不動点 y_0 に $p\in S$ に関して一様に強収束する. さらに,y_0 は $(*)$ をみたす finite mean の net$\{\mu_\alpha:\alpha\in I\}$ に依存しないし, また X 上の任意の invariant mean μ に対して $y_0=T_\mu x=\int T(t)xd\mu(t)$ が成立する.

X は $B(S)$ の部分空間で $1\in X$ であり, 任意の $s\in S$ に対して r_s-invariant であるとする. このとき, X 上の線形汎関数 $\{\mu_\alpha:\alpha\in I\}$ が次の性質をみたすとき strongly regular であるという ([16] 参照).

(a) $\sup_\alpha\|\mu_\alpha\|<+\infty$;
(b) $\lim_\alpha\mu_\alpha(1)=1$;
(c) $\lim_\alpha\|\mu_\alpha-r_s^*\mu_\alpha\|=0,\ s\in S$.

Lemma4.1 を用いて,次の非線形強エルゴード定理を得る.

Theorem 4.2. C を Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とする. $\mathcal{S}=\{T(t):t\in S\}$ は C 上の type (γ) semigroup で $F(\mathcal{S})$ が空でないとする. ある $t\in S$ に対して $\overline{\mathrm{co}}F_{1/n}(T(t))\overset{\mathrm{dis}}{\to}F(T(t))$ が成立するとする. X は $B(S)$ の部分空間で $1\in X$ で任意の $s\in S$ に対して r_s-invariant であり, また 任意の $x\in C$ と $x^*\in E^*$ に対して, $t\mapsto\langle T(t)x,x^*\rangle$ は X の元とする. x を C の元とする. $\{\lambda_\alpha:\alpha\in I\}$ は X 上の線形汎関数の strongly regular net とする. このとき, もし,$F(\mathcal{S})$ がコンパクトであれば, $\int T(h+t)xd\lambda_\alpha(t)$ は $\mathcal{S}=\{T(t):t\in S\}$ の共通不動点 y_0 に $h\in S$ に関して一様に強収束する. y_0 は X 上の線形汎関数の strongly regular net $\{\lambda_\alpha:\alpha\in I\}$ に依存しないし, また X 上の任意の invariant mean μ に対して $y_0=T_\mu x=\int T(t)xd\mu(t)$ が成立する. さらに, 任意の $x\in C$ に対し, $Qx=\lim_\alpha\int T(t)xd\lambda_\alpha(t)$ とおくと, この Q は C 上から $F(\mathcal{S})$ の上への nonexpansive mapping になり, $QT(t)=T(t)Q=Q$ がすべての $t\in S$ に対して成立し, かつ $Qx\in\overline{\mathrm{co}}\{T(s)x:s\in S\}$ がすべての $x\in X$ に対して成立する.

次の結果が Theorem 4.2 の系として得られる.

Theorem 4.3. E,C,X と $\mathcal{S}=\{T(t):t\in S\}$ は Theorem 4.2 と同様とし, x を C の元とする. ある $t\in S$ に対して $\overline{\mathrm{co}}F_{1/n}(T(t))\overset{\mathrm{dis}}{\to}F(T(t))$ が成立するとする. もし,$F(\mathcal{S})$ がコンパクトであれば, $\{T(t)x:t\in S\}$ が強収束するための必要十分条件は任意の $s\in S$

に対して

$$T(s+t)x - T(t)x \to 0$$

が成立することである．このとき,$\{T(t)x : t \in S\}$ の極限点は $\{T(t) : t \in S\}$ の共通不動点になる．

5. 応用

Theorem 4.2 の系として得られる非線形強エルゴード定理を記す ([16, 24] などを参照)

Theorem 5.1. C を Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とする．T は C から C への type (γ) mapping で $F(T)$ は空でないとする．$\overline{\mathrm{co}}F_{1/n}(T) \overset{\mathrm{dis}}{\to} F(T)$ が成立するとし，x は C の元とする．このとき，もし $F(T)$ がコンパクトであれば，$(1/n)\sum_{i=0}^{n-1} T^{i+k}x$ は T の不動点に $k \in \mathbb{N}$ に関して一様に強収束する．

Theorem 5.2. E, C, T は Theorem 5.1 と同様とする．$\overline{\mathrm{co}}F_{1/n}(T) \overset{\mathrm{dis}}{\to} F(T))$ が成立し，x は C の元とする．このとき，もし $F(T)$ がコンパクトであれば　$(1-s)\sum_{i=0}^{\infty} s^i T^{i+k}x$ は $s \uparrow 1$ のとき,T の不動点に $k \in \mathbb{N}$ に関して一様に強収束する．

$Q = \{q_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ は次の条件をみたす matrix とする:

(a) $\displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m=0}^{\infty} |q_{n,m}| < \infty$;

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{\infty} q_{n,m} = 1$;

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |q_{n,m+1} - q_{n,m}| = 0$.

このとき Q は strongly regular matrix という ([19])．もし Q が strongly regular matrix であれば，任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して，$n \to \infty$ のときに $|q_{n,m}| \to 0$ が成立する ([16] も参照)．

Theorem 5.3. E, C と T は Theorem 5.1 と同様とする．$Q = \{q_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ は strongly regular matrix とする．$\overline{\mathrm{co}}F_{1/n}(T(t)) \overset{\mathrm{dis}}{\to} F(T(t))$ が成立するとし,x は C の元とする．このとき，もし $F(T)$ がコンパクトであれば $\sum_{m=0}^{\infty} q_{n,m}T^{m+k}x$ は T の不動点に $k \in \mathbb{N}$ に関して一様に強収束する．

Theorem 5.4. C を Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とする．U,T は C から C への type (γ) mapping で $UT = TU$ であり，$F(U) \cap F(T)$ が空でないとする．$\overline{\mathrm{co}}F_{1/n}(T) \overset{\mathrm{dis}}{\to} F(T)$ かまたは $\overline{\mathrm{co}}F_{1/n}(U) \overset{\mathrm{dis}}{\to} F(U)$ が成立するとし，x は C の元とする．このとき，もし，$F(T) \cap F(U)$ がコンパクトであれば，$(1/n^2)\sum_{i,j=0}^{n-1} U^{i+k}T^{j+h}x$ は T と U の共通不動点に $k, h \in \mathbb{N}$ に関して一様に強収束する．

C を Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とし, $\mathcal{S} = \{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ を C から C への写像の族とする. このとき,$\mathcal{S}$ がつぎの条件をみたすならば C 上の one-parameter type (γ) semigroup という:

(i) 任意の $t \in S$ に対して $T(t)$ は type (γ) である;
(ii) $T(0) = I$;
(iii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ が任意の $t, s \in S$ に対して成立する;
(iv) 任意の $x \in C$ に対して $t \mapsto T(t)x$ は連続である.

Theorem 5.5. C を Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とする. $\mathcal{S} = \{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ は C 上の one-parameter type (γ) semigroup で $F(\mathcal{S})$ が空でないとする. ある $t \in \mathbb{R}^+$ に対して $\overline{\mathrm{co}}F_{1/n}(T(t)) \overset{\mathrm{dis}}{\to} F(T(t))$ が成立するとし, x は C の元とする. もし,$F(\mathcal{S})$ がコンパクトであれば $(1/s)\int_0^s T(t+k)xdt$ は $\mathcal{S}$ の共通不動点に $k \in \mathbb{R}^+$ に関して一様に強収束する.

Theorem 5.6. $E, C, \mathcal{S} = \{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ は Theorem 5.5 と同様とする. ある $t \in \mathbb{R}^+$ に対して $\overline{\mathrm{co}}F_{1/n}(T(t)) \overset{\mathrm{dis}}{\to} F(T(t))$ が成立するとし, x は C の元とする. もし,$F(\mathcal{S})$ がコンパクトであれば, $r\int_0^\infty e^{-rt}T(t+k)xdt$ は $r \downarrow 0$ のとき, $\mathcal{S}$ の共通不動点に $k \in \mathbb{R}^+$ に関して一様に強収束する.

$\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ から $\mathbb{R}$ への関数 Q が次の条件をみたすとする:

(a) $\displaystyle\sup_{s\in\mathbb{R}^+}\int_0^\infty |Q(s,t)|dt < \infty$;

(b) $\displaystyle\lim_{s\to\infty}\int_0^\infty Q(s,t)dt = 1$;

(c) $\displaystyle\lim_{s\to\infty}\int_0^\infty |Q(s,t+h) - Q(s,t)|dt = 0,\ h \in \mathbb{R}^+$

このとき Q は strongly regular kernel という.

Theorem 5.7. $E, C, \mathcal{S} = \{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ は Theorem 5.5 と同様とする. Q:$\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ は strongly regular kernel とする. ある $t \in \mathbb{R}^+$ に対して $\overline{\mathrm{co}}F_{1/n}(T(t)) \overset{\mathrm{dis}}{\to} F(T(t))$ が成立するとし, x は C の元とする. もし,$F(\mathcal{S})$ がコンパクトであれば $\int_0^\infty Q(s,t)T(t+h)xdt$ は $s \to \infty$ のとき, $\mathcal{S}$ の共通不動点に $h \in \mathbb{R}^+$ に関して一様に強収束する.

References

[1] S. Atsushiba and W. Takahashi, *Nonlinear ergodic theorems in a Banach space satisfying Opial's condition*, Tokyo J. Math. **21** (1998), 61–81.

[2] S. Atsushiba and W. Takahashi, *A nonlinear strong ergodic theorem for nonexpansive mappings with compact domains*, Math. Japon. **52** (2000), 183–195.

[3] S. Atsushiba and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for one-parameter nonexpansive semigroups with compact domains*, Fixed Point Theory and Applications **3**, Nova Science Publishers, (2002), 15–31.

[4] S. Atsushiba, A.T.Lau and W. Takahashi, *Nonlinear Strong Ergodic Theorems for Commutative Nonexpansive Semigroups on Strictly Convex Banach Spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **1** (2000), 213–231.

[5] J. B. Baillon, *Quelques propriétés de convergence asymptotique pour les semigroups de contractions impaires,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **283** (1976), 75-78.

[6] H. Brézis and F. E. Browder, *Nonlinear ergodic theorems*, Bull. Amer. Math. Soc. **82** (1976), 959–961.

[7] F. E. Browder, Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **54** (1965), 1041–1044.

[8] R. E. Bruck, *A simple proof of the mean ergodic theorem for nonlinear contractions in Banach spaces*, Israel J. Math. **32** (1979), 107-116.

[9] R. E. Bruck, *On the convex approximation property and the asymptotic behavior of nonlinear contractions in Banach spaces*, Israel J. Math. **38** (1981), 304-314.

[10] R.B. Burkel, Weakly almost periodic functions on semigroups, Gordon and Breach, 1970.

[11] C.M. Dafermos and M. Slemrod, *Asymptotic behavior of nonlinear contraction semigroups*, J. Funct. Anal. **13** (1973), 97–106.

[12] M. M. Day, *Amenable semigroups*, Illinois J. Math. **1** (1957), 509–544.

[13] M Edelstein, *On non-expansive mappings of Banach spaces*, Proc. Camb. Phil. Soc. **60** (1964), 439–447.

[14] N. Hirano, *Nonlinear ergodic theorems and weak convergence theorems*, J. Math. Soc. Japan **34** (1982), 35–46.

[15] N. Hirano, K. Kido and W. Takahashi, *Asymptotic behavior of commutative semigroups of nonexpansive mappings in Banach Spaces*, Nonlinear Anal. **10** (1986), 229–249.

[16] N. Hirano, K. Kido and W. Takahashi, *Nonexpansive retractions and nonlinear ergodic theorems in Banach spaces*, Nonlinear Analysis, **12** (1988), 1269-1281.

[17] K. Kido and W. Takahashi, *Mean ergodic theorems for semigroups of linear continuous operators in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **103** (1984), 387–394.

[18] K. Kido and W. Takahashi, *Means on commutative semigroups and nonlinear ergodic theorems*, J. Math. Anal. Appl. **111** (1985), 585–605.

[19] G. G. Lorentz, *A contribution to the theory of divergent series,* Acta Math. **80** (1948), 167-190.

[20] S. Reich, *Almost convergence and nonlinear ergodic theorems,* J. Approx. Theory **24** (1978), 269-272.

[21] G. Rodé, *An ergodic theorem for semigroups of nonexpansive mappings in a Hilbert space,* J. Math. Anal. Appl. **85** (1982), 172-178.

[22] N. Shioji and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for asymptotically nonexpansive semigroups in Banach spaces,* J. Nonlinear and Convex Anal. **1** (2000), 73–87.

[23] W. Takahashi, *A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space,* Proc. Amer. Math. Soc. **81** (1981), 253-256.

[24] W. Takahashi, Nonlinear Functional Analysis, –Fixed Point Theory and its Applications, Yokohama Publishers, Yokohama (2000).

(S. Atsushiba) DEPARTMENT OF MATHEMATICS, SHIBAURA INSTITUTE OF TECHNOLOGY, FUKASAKU, MINUMA-KU, SAITAMA-CITY, SAITAMA 330–8570, JAPAN

E-mail address: `atusiba@sic.shibaura-it.ac.jp`