

# Convergence Theorems for Relatively Nonexpansive mappings in Banach spaces with Applications

Shin-ya Matsushita (松下 慎也), Wataru Takahashi (高橋 渉)  
Department of Mathematical and Computing Sciences,  
Tokyo Institute of Technology  
(東京工業大学 大学院情報理工学研究科)

## 1 はじめに

$H$  を Hilbert 空間とする. また,  $A \subset H \times H$  を極大単調作用素とする. 非線形解析学における多くの問題は

$$0 \in Au$$

を満たす点  $u \in H$  ( $A$  のゼロ点) を求める問題に一般化されることがよく知られている. 例えば,  $f: H \rightarrow (-\infty, \infty]$  を proper で下半連続な凸関数とする. このとき,  $x \in H$  に対して,

$$\partial f(x) = \{x^* \in H : f(y) \geq f(x) + \langle y - x, x^* \rangle, \forall y \in H\}$$

で定義される集合  $\partial f(x)$  を  $x$  の劣微分という. このとき,  $\partial f$  は極大単調作用素であり,  $0 \in \partial f(u)$  であることと  $f(u) = \min_{x \in H} f(x)$  であることは同値である.

Hilbert 空間における  $A$  のゼロ点を求める最も一般的な近似法の一つは, Martinet[11] によって導入された近接点法 (Proximal Point Algorithm) である. 近接点法とは, 初期点  $x_0 \in H$  とし

$$x_{n+1} = J_{r_n} x_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.1)$$

で帰納的に点列  $\{x_n\}$  を生成し,  $A$  のゼロ点を求めるものである. ただし,  $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ ,  $J_{r_n} = (I + r_n A)^{-1}$  である. 1976 年, Rockafellar[20] は次の弱収束定理を証明している.

**定理 1.1** (Rockafellar[20])  $H$  を Hilbert 空間,  $A \subset H \times H$  を極大単調作用素とする.  $x_0 \in H$  とし,  $\{x_n\} \subset H$  を (1.1) によって構成された点列とする.

ただし,  $\liminf_{n \rightarrow \infty} r_n > 0$  を満たすものとする. このとき,  $A^{-1}0 \neq \emptyset$  ならば, 点列  $\{x_n\}$  は  $A$  のゼロ点に弱収束する.

一方, 上村-高橋 [6] は, 極大単調作用素のゼロ点への近似法に関して, 次の点列的近似法を導入した.  $x_0 = x \in H$  とし,

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n) J_{r_n} x_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.2)$$

ここで  $\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$ ,  $\{r_n\} \subset (0, \infty)$  である. 上村-高橋 [6] は,  $A^{-1}0$  が空でないとき, (1.2) で構成された点列  $\{x_n\}$  が  $A^{-1}0$  の点に強収束することを証明した. 最近, 高阪-高橋 [9] は, 上村-高橋による点列的近似法のアイデアをもとに, 次に述べる Banach 空間における極大単調作用素のゼロ点への収束定理を証明した.

**定理 1.2** (高阪-高橋 [9])  $E$  を一様凸で滑らかな Banach 空間とし,  $J: E \rightarrow E^*$  を  $E$  の双対写像とする.  $A \subset E \times E^*$  を極大単調作用素とする. また,  $r > 0$  に対して  $J_r = (J + rA)^{-1}J$  とし, 点列  $\{x_n\} \subset E$  をつぎのように定義する.  $x_0 = x \in E$  とし,

$$x_{n+1} = J^{-1}(\alpha_n Jx + (1 - \alpha_n) J J_{r_n} x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.3)$$

ここで  $\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$  と  $\{r_n\} \subset (0, \infty)$  は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \infty$$

を満たすとする. このとき,  $A^{-1}0 \neq \emptyset$  ならば,  $\{x_n\}$  は  $Q_{A^{-1}0}x$  に強収束する. ここで  $Q_{A^{-1}0}$  は  $E$  から  $A^{-1}0$  の上への generalized projection である.

一方, 我々は, Mann [10] によって導入された nonexpansive 写像の不動点近似法を知っている. これは, Hilbert 空間上で定義された nonexpansive 写像  $S$  に対して,  $x_0 \in H$ ,  $\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$  とし,

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) Sx_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.4)$$

による点列  $\{x_n\}$  で  $S$  の不動点を求める近似法である.

本研究では, 高阪-高橋による点列的近似法 (1.3) と, Mann による点列的不動点近似法 (1.4) の2つのアイデアをもとに, Banach 空間上で定義された relatively nonexpansive 写像 (Butnariu-Reich-Zaslavski [4]) の不動点収束定理を証明する. さらに, これらの定理を, Banach 空間における制約可能性問題と関係のある収束定理, また極大単調作用素のゼロ点への近似法に応用する.

## 2 準備

$E$  を Banach 空間とし,  $E^*$  をその共役空間とする.  $x \in E$  における  $x^* \in E^*$  の値を  $\langle x, x^* \rangle$  で表す.  $E$  における点列  $\{x_n\}$  が  $x$  に強収束することを  $x_n \rightarrow x$  で表し, 弱収束することを  $x_n \rightharpoonup x$  と表す.

Banach 空間  $E$  が狭義凸であるとは,  $\|x\| = \|y\| = 1$  で  $x \neq y$  ならば  $\|\frac{x+y}{2}\| < 1$  が成り立つことをいう. また,  $E$  が一様凸であるとは,  $E$  の元からなる点列  $\{x_n\}, \{y_n\}$  に対して,

$$\|x_n\| = \|y_n\| = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n + y_n\| = 2 \text{ ならば } \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0$$

が成り立つことをいう. また, Xu[25] は次の結果を証明した.

**補助定理 2.1** (Xu[25])  $E$  を一様凸な Banach 空間とし,  $r > 0$  とする. このとき狭義単調増加な凸関数  $g: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  で  $g(0) = 0$  を満たすものが存在して, 任意の  $x, y \in \{z \in E: \|z\| \leq r\}$  と  $\alpha \in [0, 1]$  に対して,

$$\|\alpha x + (1 - \alpha)y\|^2 \leq \alpha\|x\|^2 + (1 - \alpha)\|y\|^2 - \alpha(1 - \alpha)g(\|x - y\|)$$

が成り立つ.

$U = \{x \in E: \|x\| = 1\}$  とする.  $E$  のノルムが滑らかであるとは, 任意の  $x, y \in U$  に対して,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \quad (2.1)$$

が存在することをいう. また,  $E$  のノルムが Fréchet 微分可能であるとは, 任意の  $x \in U$  に対して, (2.1) が  $y \in U$  に関して一様に収束することをいう.  $E$  が一様に滑らかであるとは, (2.1) が  $x, y \in U$  に関して一様に収束することをいう.  $E$  の元  $x$  に対して,  $E$  から  $E^*$  への集合値写像  $J$  が

$$J(x) = \{x^* \in E^*: \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

で定義されるが, この  $J$  を  $E$  上の双対写像という. 双対写像  $J$  に関して次の性質が知られている ([22, 23]).

1.  $E$  が滑らかならば, 双対写像  $J$  は 1 価写像になる;
2.  $E$  が Fréchet 微分可能ならば, 双対写像  $J$  が  $E$  上で連続である;
3.  $E$  が一様に滑らかならば, 双対写像  $J$  は  $E$  の有界集合上で一様連続である;
4.  $E^*$  が一様凸ならば,  $E$  は一様に滑らかである.

$E$  を滑らかで狭義凸な回帰的 Banach 空間とする. また,  $\phi : E \times E \rightarrow (-\infty, \infty]$  を

$$\phi(x, y) = \|x\|^2 - 2\langle x, Jy \rangle + \|y\|^2 \quad (\forall x, y \in E)$$

によって定義する.  $C \subset E$  を空でない閉凸集合とし,  $x \in E$  とする. このとき, 一意の  $x_0 \in C$  が存在して

$$\phi(x_0, x) = \min_{y \in C} \phi(y, x)$$

となる. このとき,  $E$  から  $C$  の上への写像  $Q_C$  を  $Q_C = x_0$  によって定義する. 写像  $Q_C$  を generalized projection と呼ぶ [1, 7].  $E$  が Hilbert 空間のとき,  $\phi(x, y) = \|x - y\|^2$  となるので,  $Q_C$  は距離射影と一致する. generalized projection は次の性質を持つことが知られている [1, 7].

**命題 2.1**  $E$  を滑らかな回帰的 Banach 空間とし,  $C$  を  $E$  の空でない閉凸集合とする. また,  $x \in E, x_0 \in C$  とする. このとき,  $x_0 = Q_C x$  であることと, 任意の  $y \in C$  に対して,

$$\langle x_0 - y, Jx - Jx_0 \rangle \geq 0$$

が成り立つことは同値である.

**命題 2.2**  $E$  を滑らかで, 狭義凸な回帰的 Banach 空間とし,  $C$  を  $E$  の空でない閉凸集合とする. また,  $x \in E$  とする. このとき任意の  $y \in C$  に対して,

$$\phi(y, Q_C x) + \phi(Q_C x, x) \leq \phi(y, x)$$

が成り立つ.

$C$  を Banach 空間  $E$  の閉凸集合とし,  $T : C \rightarrow C$  とする. また  $F(T)$  は  $T$  の不動点集合を表すことにする. このとき,  $p \in C$  が写像  $T$  の asymptotic fixed point であるとは,  $\{x_n\}$  が  $p$  に弱収束し, かつ  $\{x_n - Tx_n\}$  が  $0$  に強収束するような点列  $\{x_n\} \subset C$  が存在するときをいう [18]. ここで,  $T$  の asymptotic fixed point の全体を  $\hat{F}(T)$  と表すことにする. 以後,  $E$  は滑らかで, 狭義凸な回帰的 Banach 空間であるとする. 写像  $T$  が relatively nonexpansive 写像であるとは,  $F(T) = \hat{F}(T)$  を満たし, かつ任意の  $x \in C, p \in F(T)$  に対して,  $\phi(p, Tx) \leq \phi(p, x)$  が成り立つときをいう [4]. relatively nonexpansive 写像には, 次のような例がある.

1.  $S$  が Hilbert 空間上で定義された nonexpansive 写像ならば,  $S$  は relatively nonexpansive 写像になる;
2.  $Q_i : E \rightarrow C_i (i = 1, 2, \dots, m)$  を  $E$  の閉凸部分集合  $C_i$  の上への generalized projection とする. このとき,  $Q_m Q_{m-1} \cdots Q_2 Q_1$  は relatively nonexpansive 写像である;

3.  $J_r = (J+rA)^{-1}J$  とおく (4節を参照). ここで,  $J: E \rightarrow E^*$  は Banach 空間  $E$  の双対写像,  $A \subset E \times E$  は極大単調作用素,  $r > 0$  とする. このとき,  $J_r$  は relatively nonexpansive 写像である.

### 3 収束定理

この節では, relatively nonexpansive 写像の強収束及び弱収束定理を証明する. その前に定義を一つ与えておく.

$E$  が滑らかな Banach 空間とする. このとき双対写像  $J$  が weakly sequentially continuous であるとは,

$$x \in E, \{x_n\} \subset E, x_n \rightarrow x \text{ ならば } J(x_n) \overset{*}{\rightharpoonup} J(x)$$

が成り立つことをいう. ここで  $\overset{*}{\rightharpoonup}$  は弱\*収束を表している.

**定理 3.1**  $E$  を滑らかで一様凸な Banach 空間とする.  $C$  を  $E$  の空でない閉凸集合,  $T$  を  $C$  から  $C$  への relatively nonexpansive 写像で,  $F(T) \neq \emptyset$  とする.  $Q_C$  を  $E$  から  $C$  の上への generalized projection とし,  $Q_{F(T)}$  を  $C$  から  $F(T)$  の上への generalized projection とする.  $x_0 \in C$  とし,

$$x_{n+1} = Q_C J^{-1}(\alpha_n J x_n + (1 - \alpha_n) J T x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

とする. ただし,  $\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$  である. このとき,  $\{Q_{F(T)} x_n\}$  は  $F(T)$  の点  $u$  に強収束する.

**証明の概要**  $F(T)$  は閉凸集合となる [12].  $p \in F(T)$  とする. このとき,  $T$  の定義と命題 2.2 及びノルムの凸性から, 任意の  $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$  に対して,

$$\phi(p, x_{n+1}) \leq \phi(p, x_n)$$

となる. よって,  $\{\phi(p, x_n)\}$  の極限が存在する.  $(\|p\| - \|x_n\|)^2 \leq \phi(p, x_n)$  であるから,  $\{x_n\}$  は有界である. このことから,  $\{T x_n\}$  も有界である. 任意の  $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$  に対して,  $u_n = Q_{F(T)} x_n$  とする.  $u_n \in F(T)$  であるから,

$$\phi(u_n, x_{n+1}) \leq \phi(u_n, x_n). \quad (3.1)$$

一方, 命題 2.2 を用いると,

$$\begin{aligned} \phi(u_{n+1}, x_{n+1}) &= \phi(Q_{F(T)} x_{n+1}, x_{n+1}) \\ &\leq \phi(u_n, x_{n+1}) - \phi(u_n, Q_{F(T)} x_{n+1}) \end{aligned}$$

となる. このとき, (3.1) から,

$$\phi(u_{n+1}, x_{n+1}) \leq \phi(u_n, x_n)$$

となる。よって、 $\{\phi(u_n, x_n)\}$  の極限が存在する。また、

$$\phi(u_n, u_{n+1}) \leq \phi(u_n, x_n) - \phi(u_{n+1}, x_{n+1})$$

となる。帰納法により、任意の  $m \in \mathbb{N}$  に対して

$$\phi(u_n, u_{n+m}) \leq \phi(u_n, x_n) - \phi(u_{n+m}, x_{n+m})$$

が示せる。ここで、 $E$  の一様凸性を用いると、 $\{u_n\}$  が Cauchy 列であることが証明できる。 $E$  は完備であり、 $F(T)$  は閉集合であるので、 $\{u_n\}$  は  $F(T)$  の点  $u$  に強収束する。■

**定理 3.2**  $E$  および  $E^*$  を一様凸な Banach 空間とし、その双対写像  $J$  を weakly sequentially continuous とする。 $C$  を  $E$  の空でない閉凸集合とし、 $Q_C$  を  $E$  から  $C$  の上への generalized projection とする。 $T$  を  $C$  から  $C$  への relatively nonexpansive 写像とし、 $F(T) \neq \emptyset$  とする。 $x_0 \in C$  とし、

$$x_{n+1} = Q_C J^{-1}(\alpha_n Jx_n + (1 - \alpha_n)JT x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

とする。ここで、 $\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$  は  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(1 - \alpha_n) > 0$  を満たす。このとき  $\{x_n\}$  は  $F(T)$  の点  $u$  に弱収束する。ここで  $u = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_{F(T)} x_n$  である。

**証明の概要** 定理 3.1 の証明より、 $\{x_n\}, \{Tx_n\}$  は有界である。ここで、 $\liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(1 - \alpha_n) > 0$  及び  $E^*$  の一様凸性から、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Jx_n - JT x_n\| = 0$$

が示せる。また、 $J^{-1}$  は  $E^*$  の有界集合上で一様連続であるから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|J^{-1}(Jx_n) - J^{-1}(JT x_n)\| = 0$$

となる。このことから、 $x_{n_i} \rightarrow v \in C$  ならば  $v \in F(T)$  である。

次に、任意の  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  に対して、 $u_n = Q_{F(T)} x_n$  とし、 $u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$  とおく。 $\{x_n\}$  は有界なので、その部分列で、 $x_{n_i} \rightarrow v \in F(T)$  となるものが存在する。命題 2.1 から、

$$\langle u_{n_i} - v, Jx_{n_i} - Ju_{n_i} \rangle \geq 0$$

となる。このとき、双対写像  $J$  は weakly sequentially continuous であるので、定理 3.1 から  $i \rightarrow \infty$  とすると

$$\langle u - v, Jv - Ju \rangle \geq 0$$

となる。ここで、 $u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$  である。一方、双対写像  $J$  は単調なので、

$$\langle u - v, Ju - Jv \rangle \geq 0$$

となる。よって、

$$\langle u - v, Ju - Jv \rangle = 0.$$

$E$  の狭義凸性から、 $u = v$  である。 $\{x_n\}$  は任意に選んだ  $\{x_n\}$  の弱収束部分列だったので、 $x_n \rightarrow u$  を証明することができる。■

**定理 3.3**  $E$  および  $E^*$  を一様凸な Banach 空間とし、 $C$  を  $E$  の空でない閉凸集合、 $Q_C$  を  $E$  から  $C$  の上への generalized projection とする。 $T$  を  $C$  から  $C$  への relatively nonexpansive 写像とする。 $x_0 \in C$  とし、

$$x_{n+1} = Q_C J^{-1}(\alpha_n Jx_n + (1 - \alpha_n)JT x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

とする。ここで、 $\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$  は  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(1 - \alpha_n) > 0$  を満たす。このとき、 $\text{int}F(T) \neq \emptyset$  ならば、 $\{x_n\}$  は  $F(T)$  の点  $u$  に強収束する。ここで  $u = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_{F(T)}x_n$  である。

**証明の概要**  $\text{int}F(T) \neq \emptyset$  より、ある  $p \in F(T)$ 、 $r > 0$  が存在して、任意の  $\|h\| \leq 1$  に対して、 $p + rh \in F(T)$  となる。一方、 $\phi$  の性質から、任意の  $u \in F(T)$  に対して

$$\phi(u, x_n) = \phi(x_{n+1}, x_n) + \phi(u, x_{n+1}) + 2\langle x_{n+1} - u, Jx_n - Jx_{n+1} \rangle.$$

これより、

$$\langle x_{n+1} - u, Jx_n - Jx_{n+1} \rangle + \frac{1}{2}\phi(x_{n+1}, x_n) = \frac{1}{2}(\phi(u, x_n) - \phi(u, x_{n+1})). \quad (3.2)$$

また、

$$\begin{aligned} \langle x_{n+1} - p, Jx_n - Jx_{n+1} \rangle &= \langle x_{n+1} - (p + rh) + rh, Jx_n - Jx_{n+1} \rangle \\ &= \langle x_{n+1} - (p + rh), Jx_n - Jx_{n+1} \rangle \\ &\quad + r\langle h, Jx_n - Jx_{n+1} \rangle \end{aligned}$$

である。 $p + rh \in F(T)$  であるので、定理 3.1 の証明から、

$$\phi(p + rh, x_{n+1}) \leq \phi(p + rh, x_n)$$

である。(3.2) から、

$$0 \leq \langle x_{n+1} - (p + rh), Jx_n - Jx_{n+1} \rangle + \frac{1}{2}\phi(x_{n+1}, x_n)$$

が成り立つ。ここで (3.2) を用いると

$$\begin{aligned} r\langle h, Jx_n - Jx_{n+1} \rangle &\leq \langle x_{n+1} - p, Jx_n - Jx_{n+1} \rangle + \frac{1}{2}\phi(x_{n+1}, x_n) \\ &= \frac{1}{2}(\phi(p, x_n) - \phi(p, x_{n+1})). \end{aligned}$$

つまり,

$$\langle h, Jx_n - Jx_{n+1} \rangle \leq \frac{1}{2r} (\phi(p, x_n) - \phi(p, x_{n+1})).$$

$h$  は  $\|h\| \leq 1$  を満たす任意の点であるから,

$$\|Jx_n - Jx_{n+1}\| \leq \frac{1}{2r} (\phi(p, x_n) - \phi(p, x_{n+1})).$$

$n > m$  とすると,

$$\begin{aligned} \|Jx_m - Jx_n\| &= \|Jx_m - Jx_{m+1} + Jx_{m+1} - \cdots - Jx_{n-1} + Jx_{n-1} - Jx_n\| \\ &\leq \sum_{i=m}^{n-1} \|Jx_i - Jx_{i+1}\| \\ &\leq \frac{1}{2r} \sum_{i=m}^{n-1} (\phi(p, x_i) - \phi(p, x_{i+1})) \\ &= \frac{1}{2r} (\phi(p, x_m) - \phi(p, x_n)). \end{aligned}$$

ここで,  $\{\phi(p, x_n)\}$  は収束する. つまり  $\{Jx_n\}$  は Cauchy 列となる.  $E^*$  は完備なので  $\{Jx_n\}$  は  $E^*$  の点  $u^*$  に強収束する.  $E^*$  は Fréchet 微分可能なノルムをもつので, 双対写像  $J^{-1}$  は  $E^*$  上で連続である. これより,  $\{x_n\}$  は  $C$  の点  $u$  に強収束する. 定理 3.2 より,  $\|x_n - Tx_n\| \rightarrow 0$  である. つまり  $u \in F(T)$  となる. ここで,  $u = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_{F(T)} x_n$  である. ■

## 4 応用

この節では, 定理 3.2 および定理 3.3 からいくつかの収束定理を証明する. まず初めに, Hilbert 空間における nonexpansive 写像の不動点収束定理を証明してみる.

**定理 4.1** (Browder and Petryshyn[3])  $C$  を Hilbert 空間  $H$  の空でない閉凸部分集合とし,  $T$  を  $C$  から  $C$  への  $F(T) \neq \emptyset$  となる nonexpansive 写像とする.  $P_{F(T)}$  を  $C$  から  $F(T)$  の上への距離射影とする.  $\lambda \in (0, 1)$  とする.  $x_0 \in C$  とし,

$$x_{n+1} = \lambda x_n + (1 - \lambda)Tx_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

とする. このとき  $\{x_n\}$  は  $F(T)$  の点  $u$  に弱収束する. ここで,  $u = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{F(T)} x_n$  である.

**証明** 任意の  $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$  に対して,  $\alpha_n = \lambda$  とおけば,  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(1 - \alpha_n) = \lambda(1 - \lambda) > 0$  である. 次に  $T$  が nonexpansive 写像ならば,  $T$  は relatively nonexpansive 写像であることを示す.  $F(T) \subset \hat{F}(T)$  である.  $u \in \hat{F}(T)$  とすると, ある  $\{x_n\} \subset C$  が存在し,  $x_n \rightharpoonup u$  かつ  $x_n - Tx_n \rightarrow 0$  と



なる.  $T$  は nonexpansive であるので,  $T$  は demiclosed である [23]. つまり  $u = Tu$ . したがって,  $F(T) = \hat{F}(T)$ . さらに, 任意の  $x, y \in H$  に対して,

$$V(x, y) = \|x - y\|^2$$

である. よって  $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$  であることは,  $V(Tx, Ty) \leq V(x, y)$  と同値である. これより,  $T$  は relatively nonexpansive 写像となる. したがって, 定理 3.2 より,  $\{x_n\}$  は  $u = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{F(T)}x_n$  に弱収束する.

■

定理 4.2  $C$  を Hilbert 空間  $H$  の空でない閉凸部分集合とし,  $T$  を  $C$  から  $C$  への nonexpansive 写像とし,  $\lambda \in (0, 1)$  とする.  $x_0 \in C$  とし,

$$x_{n+1} = \lambda x_n + (1 - \lambda)Tx_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

とする. このとき  $\text{int}F(T) \neq \emptyset$  ならば,  $\{x_n\}$  は  $F(T)$  の点  $u$  に強収束する. ここで,  $u = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{F(T)}x_n$  である.

$E$  および  $E^*$  を一様凸な Banach 空間とし,  $C_i (i = 1, 2, \dots, m)$  を  $E$  の空でない閉凸部分集合とする.  $Q_i (i = 1, 2, \dots)$  を  $E$  から  $C_i$  の上への generalized projection とする. ここでは,  $Q_i (i = 1, 2, \dots, m)$  だけを用いて  $\cap_{i=1}^m C_i$  の点への収束を考える. Reich[18] は次の結果を証明した.

補助定理 4.1 (Reich[18])  $E$  を一様 Gâteaux 微分可能なノルムをもつ一様凸な Banach 空間とし,  $C_i (i = 1, 2, \dots, m)$  を  $E$  の空でない閉凸部分集合とする.  $Q_i (i = 1, 2, \dots, m)$  を  $E$  から  $C_i$  の上への generalized projection とする. このとき,  $Q_m Q_{m-1} \dots Q_2 Q_1$  は relatively nonexpansive 写像となる. また,  $\hat{F}(Q_m Q_{m-1} \dots Q_2 Q_1) = \cap_{i=1}^m C_i$  となる.

補助定理 4.1 と定理 3.2 及び定理 3.3 から, 次の定理が証明できる.

定理 4.3  $E$  および  $E^*$  を一様凸な Banach 空間とし, その双対写像  $J$  を weakly sequentially continuous とする,  $C_i (i = 1, 2, \dots, m)$  を  $E$  の空でない閉凸部分集合とし,  $\cap_{i=1}^m C_i \neq \emptyset$  とする.  $Q_i (i = 1, 2, \dots, m)$  を  $E$  から  $C_i$  の上への generalized projection とし,  $Q_{\cap_{i=1}^m C_i}$  を  $E$  から  $\cap_{i=1}^m C_i$  の上への generalized projection とする.  $x_0 \in E$  とし,

$$x_{n+1} = J^{-1}(\alpha_n Jx_n + (1 - \alpha_n)JQ_m Q_{m-1} \dots Q_2 Q_1 x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

とする. ここで,  $\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$  は  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(1 - \alpha_n) > 0$  を満たす. このとき  $\{x_n\}$  は  $\cap_{i=1}^m C_i$  の点  $u$  に弱収束する. ここで,  $u = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_{\cap_{i=1}^m C_i} x_n$  である.

証明  $T = Q_m Q_{m-1} \dots Q_2 Q_1$  とおく.  $F(T) \subset \hat{F}(T)$  かつ  $\bigcap_{i=1}^m C_i \subset F(T)$  であることは比較的容易に示せる. 補助定理 4.1 から,  $T$  は relatively non-expansive 写像で  $F(T) = \bigcap_{i=1}^m C_i$  となる. このとき, 定理 3.2 から,  $\{x_n\}$  は  $F(T)$  の点  $u$  に弱収束する. ここで,  $u = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_{\bigcap_{i=1}^m C_i} x_n$  である. ■

定理 4.4  $E$  および  $E^*$  を一様凸な Banach 空間とし,  $C_i (i = 1, 2, \dots, m)$  を  $E$  の空でない閉凸部分集合とする.  $Q_i (i = 1, 2, \dots, m)$  を  $E$  から  $C_i$  の上への generalized projection とする.  $x_0 \in E$  とし,

$$x_{n+1} = J^{-1}(\alpha_n Jx_n + (1 - \alpha_n) JQ_m Q_{m-1} \dots Q_2 Q_1 x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

とする. ここで,  $\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$  は  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_n (1 - \alpha_n) > 0$  を満たす. このとき,  $\text{int} \bigcap_{i=1}^m C_i \neq \emptyset$  ならば,  $\{x_n\}$  は  $\bigcap_{i=1}^m C_i$  の点  $u$  に強収束する. ここで,  $u = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_{\bigcap_{i=1}^m C_i} x_n$  である.

$A \subset E \times E^*$  とする. 集合値写像  $A$  が単調 (monotone) であるとは, 任意の  $(x, x^*), (y, y^*) \in A$  に対して

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0$$

が成り立つことをいう. 単調作用素  $A \subset E \times E^*$  が極大 (maximal) であるとは,  $B \subset E \times E^*$  が単調作用素で,  $A \subset B$  ならば  $A = B$  となることをいう. 次の定理は, Rockafellar[19] によって証明された単調作用素の極大性に関する重要な定理である.

定理 4.5 (Rockafellar[19])  $E$  を滑らかで狭義凸な回帰的 Banach 空間とし,  $A \subset E \times E^*$  を単調作用素とする. このとき  $A$  が極大であることと, 任意の  $r > 0$  に対して

$$R(J + rA) = E^*$$

が成り立つことは同値である. ただし,  $R(J + rA)$  とは  $J + rA$  の値域のことである.

$E$  を滑らかで狭義凸な回帰的 Banach 空間とし,  $E^*$  をその共役空間とする. また  $A \subset E \times E^*$  を極大単調作用素とする. このとき, 定理 4.5 より, 任意の  $x \in E$  と  $r > 0$  に対して

$$Jx \in J(x_r) + rAx_r \quad (4.1)$$

は少なくとも一つの解  $x_r \in D(A)$  をもつ. また,  $E$  が狭義凸であるので, (4.1) の解は一意に定まる [22]. そこで  $J_r : E \rightarrow D(A)$  を

$$J_r x = x_r$$

と定義する. これを  $A$  の resolvent という. いいかえれば  $J_r x = (J+rA)^{-1} Jx$  である. このとき  $F(J_r) = A^{-1}0$  が成り立つ. さらに,  $J_r$  は relatively non-expansive 写像であることが知られている [18]. したがって, 定理 3.2 及び定理 3.3 から, 次の収束定理が証明できる.

**定理 4.6**  $E$  および  $E^*$  を一様凸な Banach 空間とし, その双対写像  $J$  は weakly sequentially continuous とする.  $A \subset E \times E^*$  を極大単調作用素で,  $A^{-1}0 \neq \emptyset$  とする.  $r > 0$  に対して,  $J_r = (J+rA)^{-1} J$  とし,  $Q_{A^{-1}0}$  を  $E$  から  $A^{-1}0$  の上への generalized projection とする.  $x_0 \in E$  とし,

$$x_{n+1} = J^{-1}(\alpha_n Jx_n + (1 - \alpha_n) J J_r x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

とする. ただし,  $\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$  は  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(1 - \alpha_n) > 0$  を満たす. このとき  $\{x_n\}$  は  $A^{-1}0$  の点  $u$  に弱収束する. ここで  $u = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_{A^{-1}0} x_n$  である.

**定理 4.7**  $E$  および  $E^*$  を一様凸な Banach 空間とする.  $A \subset E \times E^*$  を極大単調作用素とする.  $r > 0$  に対して,  $J_r = (J+rA)^{-1} J$  とする.  $x_0 \in E$  とし,

$$x_{n+1} = J^{-1}(\alpha_n Jx_n + (1 - \alpha_n) J J_r x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

とする. ただし,  $\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$  は  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(1 - \alpha_n) > 0$  を満たす. このとき,  $\text{int}A^{-1}0 \neq \emptyset$  ならば,  $\{x_n\}$  は  $A^{-1}0$  の点  $u$  に強収束する. ここで  $u = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_{A^{-1}0} x_n$  である.

## 参考文献

- [1] Y. I. Alber, *Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications*, in Theory and Applications of Non-linear Operators of Accretive and Monotone Type (A. G. Kartsatos Ed.), Marcel Dekker, New York, 15-50 (1996).
- [2] Y. I. Alber, A. N. Iusem and M. V. Solodov, *Minimization of nonsmooth convex functionals in Banach spaces*, J. Convex. Anal. 4 (1997), 235-255.
- [3] F. E. Browder and W. V. Petryshyn, *Construction of fixed point of nonlinear mappings in Hilbert spaces*, J. Math. Anal. Appl. 20 (1967), 197-228.
- [4] D. Butnariu, S. Reich and A. J. Zaslavski, *Asymptotic behavior of relatively nonexpansive operators in Banach spaces*, J. Appl. Anal. 7 (2001), 151-174.

- [5] T. Ibaraki, Y. Kimura and W. Takahashi, *Convergence theorems for generalized projections and maximal monotone operators in Banach spaces*, Abstr. Appl. Anal. (2003), 621-629.
- [6] S. Kamimura and W. Takahashi, *Approximating solutions of maximal monotone operators in Hilbert spaces*, J. Approx. Theory **106** (2000), 226-240.
- [7] S. Kamimura and W. Takahashi, *Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space*, SIAM J. Optim. **13** (2002), 938-945.
- [8] W. A. Kirk and B. Sims, *Convergence of Picard iterates of nonexpansive mappings*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **47** (1999), 147-155.
- [9] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Strong convergence of an iterative sequence for maximal monotone operators in a Banach space*, to appear in Abstr. Appl. Anal..
- [10] W. R. Mann, *Mean value methods in iteration*, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 506-510.
- [11] B. Martinet, *Regularisation d'inequations variationnelles par approximations seccessives*, Rev. Franc. Inform. Rech. Oper. **4** (1970), 154-159.
- [12] S. Matsushita and W. Takahashi, *A strong convergence theorem for relatively nonexpansive mappings in a Banach space*, to appear.
- [13] S. Matsushita and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, to appear in Fixed Point Theory Appl..
- [14] J. J. Moreau, *Un cas de convergence des itérées d'une contraction d'un espace hilbertien*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **286** (1978), 143-144.
- [15] G. B. Passty, *Ergodic convergence to a zero of the sum of monotone operators in Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl. **72** (1979), 383-390.
- [16] S. Reich, *Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **67** (1979), 274-276.
- [17] S. Reich, *Constructive techniques for accretive and monotone operators*, Applied nonlinear analysis (Proc. Third Internat. Conf. Univ. Texas, Arlington, Tex., 1978), Academic Press, New York (1979), 335-345.

- [18] S. Reich, *A weak convergence theorem for the alternating method with Bregman distance*, in *Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type*, (A.G.Kartsatos Ed.), Marcel Dekker, New York (1996), 313-318.
- [19] R. T. Rockafellar, *On the maximality of sums of nonlinear monotone operators*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **149** (1970), 75-88.
- [20] R. T. Rockafellar, *Monotone operators and the proximal point algorithm*, *SIAM J. Control Optim.* **14** (1976), 877-898.
- [21] W. Takahashi, *Iterative methods for approximation of fixed points and their applications*, *J. Oper. Res. Soc. Japan* **43** (2000), 87-108.
- [22] W. Takahashi, *Convex Analysis and Approximation Fixed Points* (Japanese), Yokohama-Publishers, 2000.
- [23] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis*, Yokohama-Publishers, 2000.
- [24] W. Takahashi and G. E. Kim, *Approximating fixed points of nonexpansive mappings in Banach spaces*, *Math. Japon.* **48** (1998), 1-9.
- [25] H. K. Xu, *Inequalities in Banach spaces with applications*, *Nonlinear Anal.* **16** (1991), 1127-1138.