

# カオスの区分線形写像としての 有向ネットワークとその大偏差統計

宮 崎 修 次<sup>†</sup>

有向グラフの確率行列表現と区分線形一次元写像のフロベニウス・ペロン演算子の行列表現を対応させることで、有向グラフの構造を力学系と関連付けることができることを示す。力学量の粗視量の大偏差統計を解明するというカオス力学系の研究手法をグラフ理論に適用する試みを紹介する。簡単な有向ネットワークを例にとり、統計熱力学形式により内在するループを個別に取り出したり、ノードから発する矢印の数の揺らぎをとらえたりすることができることを示す。

## Directed Network as a Chaotic Piecewise-linear Map and Large-deviation Statistics

SYUJI MIYAZAKI<sup>†</sup>

Directed network such as WWW can be represented by a stochastic matrix. Comparing this matrix to a Frobenius-Perron matrix of a chaotic piece-wise linear one-dimensional map whose domain can be divided into Markov sub-intervals, we are able to relate network structure to chaotic dynamics. Just like various large-deviation properties of local expansion rates (finite-time Lyapunov exponents) related to chaotic dynamics, we can also discuss those properties of network structure.

### 1. はじめに

散逸カオス力学系の大きな特徴は、一次元写像の場合を除いて、不規則な時系列とフラクタル構造を持ったアトラクタが対となって現れることである。この相空間の複雑な幾何学的構造と不規則な動力学的対応関係を敷衍して、ネットワークの構造そのものに対応する動力学を導くことにする。これにより、カオス力学系の解析手法を用いてネットワークを解析することを試みる。

有限の区間  $I$  を同じ区間  $I$  に写す区分的に線形な一次元写像  $f$  で制御変数（写像の傾き）を適当に選ぶと、 $I$  を重なりも隙間もない小区間にマルコフ分割できる。各小区間がどの小区間に写されるかという情報から確率行列（フロベニウス・ペロン行列）を構成できる。その絶対値最大の固有値は必ず 1 となり、これに対応する優固有ベクトルから各小区間の滞在確率を与える不変確率密度が得られる。

一方、World Wide Web (WWW) のようなリン

ク関係のネットワークは確率行列で表現でき<sup>1)</sup>、絶対値最大の固有値 1 に対する優固有ベクトルからサイトの重要度を評価する手法が商業的にも利用されている<sup>2)</sup>。ネットワークの確率行列と同じフロベニウス・ペロン行列を持つカオス的な区分線形写像をそのネットワークの対応物と考えればよい。したがって、確率行列の優固有ベクトルは前述の不変確率密度に対応している。ここでは、不変確率密度を超えた情報を大偏差統計解析を用いて取り出すことを試みる。

カオス力学系では、アトラクタの幾何学的構造を反映して、各時刻での軌道不安定性を現す軌道拡大率が大きく揺らぐ。その平均値がリヤプノフ指数であり、それが正となることが、実用的なカオスの判定条件である。系の非双曲性や分岐点近傍の長時間相関などによる大きな揺らぎをとらえるために、軌道拡大率の有限時間での平均量（有限時間リヤプノフ指数）の統計を考察するという大偏差統計理論に基づいた研究の蓄積がある<sup>3),4)</sup>。そこに現れる粗視量の揺らぎのスペクトルや重み付き平均や分散、それを導く分配関数からなる統計構造関数は一般には時系列を数値計算で処理して求めることしかできないが、一次元の区分線形写像の場合に限って、行列を用いた線形計算による導出

<sup>†</sup> 京都大学大学院情報学研究科

Graduate School of Informatics, Kyoto University

が可能となる．ネットワークを一次元写像に対応させる理由はそこにある．このとき，フロベニウス・ペロン行列を拡張した一般化フロベニウス・ペロン行列 ( $q$  次フロベニウス・ペロン行列) を用いる．

このような大偏差統計理論に基づくカオス力学系の解析手法のネットワーク解析への応用を試みる．ネットワークのリャプノフ指数とは何を意味するのであるか．

2. ネットワークに対応する一次元写像

簡単のため，図 1 のような単純なネットワーク (有向グラフ) を考える．そのリンク関係を行列  $A$  で表そう．あるページ  $i$  から別のページ  $j$  へリンクが張られている場合には  $A$  の要素  $a_{ji}$  を 1 とし，そうでない場合を 0 とする．行列  $A$  の各列を非零要素数で割ると，次の確率行列  $H$  が得られる．

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$H$  は確率行列なので，絶対値最大の固有値は必ず 1 となり，それに対応する優固有ベクトルがリンクのされ具合の大小を定量的に与えることになる．WWW のネットワークにおいて，被リンク数が多いほど重要度が高いと考えれば，優固有ベクトルの成分は各サイトの重要度を定量的に評価していることになる．これは商業的なサーチエンジンでも実際に利用されている．

上の有向グラフを区間  $I = [0, 1]$  から  $I$  への一次元写像  $f$  で表現しよう．区間  $I$  を 3 等分し，左から  $I_1, I_2, I_3$  とおく． $f(I_1) = I_2 \cup I_3, f(I_2) = I_1,$

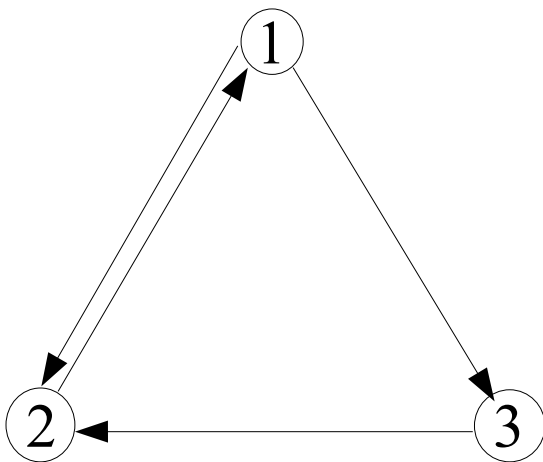


図 1 有向グラフの例  
Fig. 1 Example.

$f(I_3) = I_2$  となるような  $f$  は次式で与えられ，

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1/3 & (0 \leq x < 1/3), \\ x - 1/3 & (1/3 \leq x \leq 1), \end{cases}$$

図 2 のようなグラフとなる．実は，この有向グラフに対応する写像は複数個作ることができる．写像の傾きの絶対値が重要なので，絶対値が等しければ，正負いずれの傾きでもよい．正負のとり方で後述する不安定周期軌道の位置は変わるが，その線形安定性を定量化するフロケ指数の値は変わらない．

初期点  $x_0 \in I$  に  $f$  を作用させて得られる軌道  $x_i (i = 0, 1, \dots)$  の時刻  $n$  での確率分布関数  $\rho_n(x) \equiv \langle \delta(x_n - x) \rangle$  を考える． $\langle \dots \rangle$  は初期点  $x_0$  についての平均を表す．確率分布関数の時間発展は次式に従う．

$$\rho_{n+1}(x) = \int_0^1 \delta(f(y) - x) \rho_n(y) dy \equiv \mathcal{H} \rho_n(x)$$

ここで，線形演算子  $\mathcal{H}$  はフロベニウス・ペロン演算子と呼ばれ，

$$\mathcal{H}G(x) = \sum_j \frac{G(y_j)}{|f'(y_j)|}$$

で定義される．和は  $f(y_i) = x$  を満たすすべての解  $y_j(x)$  についてとる．ここで考えているような区分線形写像では，確率分布関数は各区間  $I_k (k = 1, 2, 3)$  で一定値をとる．このような関数は各区間でのみ値をとる 3 つの定義関数を基底にして展開でき，3 成分のベクトルで表せる．この基底を用いて  $\mathcal{H}$  は 3 行 3 列の行列で表現できる．実はこの行列は式 (1) で与えられた確率行列  $H$  にほかならない． $I_j$  が  $I_i$  に写像されるときに， $H_{ij} = 1/|f'(I_j)|$  となり，写像されないときは， $H_{ij} = 0$  となる．適当な初期分布  $\rho_0(x)$  をとると， $\rho_n$  は  $n \rightarrow \infty$  で初期分布に依存しない分布

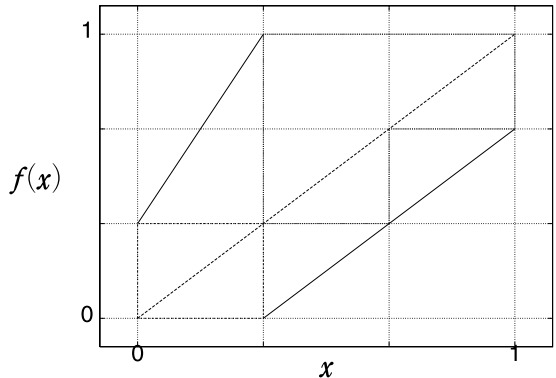


図 2 図 1 に示された有向グラフに対応する一次元写像  
Fig. 2 One-dimensional map corresponding to the directed network shown in Fig. 1.

(不変密度)  $\rho_\infty$  に近づく.  $\rho_\infty = \mathcal{H}\rho_\infty$  を満たすので, 不変密度は固有値 1 に対応する  $\mathcal{H}$  の固有関数である. マルコフ分割された区間  $I$  から  $I$  への区分線形写像の場合は行列  $H$  の固有値 1 に対応する固有ベクトルとなる.

このように, 確率行列を介してネットワーク構造を一次元写像という動力学に対応させることができる. この動力学に現れる不変密度が WWW のようなネットワークの重要度を評価する指標として商業的に利用されているのは興味深い. リヤプノフ指数やその大きな揺らぎ, あるいは, 系を特徴付ける適当な量の重み付き平均やパワースペクトルなどカオス力学系の解析で現れる諸量が WWW のネットワークのどのような特性をとらえているのであろうか. 区分線形写像のリヤプノフ指数は各区間の写像の傾きの絶対値の対数  $\log |f'(I_i)|$  を不変密度に従う重みを付けて平均したものである. 有向グラフ, 写像  $f$ , 行列  $H$  を比較すると, 区間  $I_i$  に対応する有向グラフのノード  $i$  から発する矢印の数が  $|f'(I_i)|$  の値に等しいことが分かる. したがって, ネットワーク (有向グラフ) のリヤプノフ指数とは各ノードから発する矢印の数の対数の平均ということになり, リンク関係の複雑さを定量的にとらえているものと思われる. ネットワークやグラフの構造そのものをカオス力学系と見なし, カオス力学系を特徴付ける諸量を用いてネットワークやグラフを静的および動的に特徴付けることを試みる. それに先立って, 藤坂の著書<sup>3)</sup> の表記法に従って, 大偏差統計理論を一瞥しておく.

### 3. 大偏差統計理論

定常時系列  $u\{s\}$  を時間幅  $T$  にわたってとった平均

$$\bar{u}_T(t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u\{s\} ds$$

は,  $T$  が有限であれば, さまざまな値をとり, 分布を持つ. 局所平均値  $\bar{u}_T$  の揺らぎの統計分布関数

$$P_T(u) \equiv \langle \delta(\bar{u}_T - u) \rangle \\ = \lim_{T' \rightarrow \infty} \frac{1}{T'} \int_0^{T'} \delta(\bar{u}_T(t') - u) dt'$$

を考える. これは, 定常性のために,  $T \rightarrow \infty$  では初期条件によらずデルタ関数分布  $P_\infty(u) = \delta(u - \bar{u}_\infty)$ , ( $\bar{u}_\infty = \langle u \rangle$ ) となり, 揺らぎは観測されない.

$T$  が  $u$  の相関時間よりも十分に長いけれども有限であれば,  $P_T(u) \propto e^{-S(u)T}$  の形を持つと仮定し,

$$S(u) = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log P_T(u)$$

で定義される揺らぎのスペクトル  $S(u)$  が存在すると

仮定する.

$q$  を可変な実数として, 母関数

$$M_q(T) \equiv \langle e^{qT\bar{u}_T} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} P_T(u) e^{qTu} du$$

を定義し,

$$\phi(q) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log M_q(T)$$

で定義される特性関数が存在すると仮定する.

鞍点法により特性関数と揺らぎのスペクトルとの間のルジャンドル変換が得られる.

$$\frac{dS(u)}{du} = q, \quad \phi(q) = -S(u(q)) + qu(q)$$

ここで  $u(q)$  は  $\bar{u}_T$  の重み付き平均である.

$$u(q) = \frac{d\phi(q)}{dq} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\bar{u}_T e^{qT\bar{u}_T}}{M_q(T)}$$

さらに, 感受率  $\chi(q) = \frac{du(q)}{dq}$  は重み付き分散に対応する.

$S(u), \phi(q), u(q), \chi(q)$  を統計構造関数と呼び, 時間的な揺らぎの統計熱力学形式を構成する. これらの量によって, 揺らぎの静的な特性をとらえることができる.

一方, 揺らぎの動的な特性 (時間相関) をとらえるために, スペクトル強度の重み付き平均により, 一般化 ( $q$  次) スペクトル強度を次のように定義する.

$$I_q(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \\ \times \left\langle \frac{\left| \int_0^T [u\{t+s\} - u(q)] e^{-i\omega s} ds \right|^2 e^{qT\bar{u}_T}}{M_q(T)} \right\rangle$$

一次元写像  $x_{n+1} = f(x_n)$  により生じる力学量  $u[x_n]$  の統計構造関数や一般化スペクトル密度は, 先に現れたフロベニウス・ペロン演算子を一般化し, その固有値問題を解くことで得られる. ここで,  $u[x]$  とは  $x$  の一意的な関数である. 時間的粗視量  $\bar{u}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} u[x_{j+m}]$  に対する母関数  $M_q(n)$  の  $n \rightarrow \infty$  で漸近形から特性関数  $\phi(q)$  を定めることはすでに述べた. ただし, 粗視量の時間相関は指数関数的に十分早く減衰するものと仮定する. 粗視量の分布関数から揺らぎのスペクトル  $S(u)$  が得られる. 不変密度  $\rho_\infty(x)$  を用いて母関数を表現すると次式を得る.

$$M_q(n) = \int \rho_\infty(x) \exp \left[ q \sum_{j=0}^{n-1} u[f^j(x)] \right] dx$$

$$= \int \mathcal{H}_q^n \rho_\infty(x) dx$$

ここで、任意関数  $G(x)$  に対して、一般化 ( $q$  次) フロベニウス・ペロン演算子を

$$\mathcal{H}_q G(x) = \mathcal{H}[e^{qu[x]} G(x)] = \sum_k \frac{e^{qu[y_k]} G(y_k)}{|f'(y_k)|}$$

で定義した ( $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$ )。ここで、和は  $f(y_k) = x$  を満たすすべての解  $y_k(x)$  についてとる。導出には以下の関係式を繰り返し用いた。

$$\begin{aligned} & \mathcal{H} \left\{ G(x) \exp \left[ q \sum_{j=0}^m u[f^j(x)] \right] \right\} \\ &= (\mathcal{H}_q G(x)) \exp \left[ q \sum_{j=0}^{m-1} u[f^j(x)] \right] \end{aligned}$$

したがって、特性関数  $\phi(q)$  は  $\mathcal{H}_q$  の最大固有値  $\nu_q^{(0)}$  と以下の関係式で結ばれる。

$$\phi(q) = \log \nu_q^{(0)}$$

また、一般化スペクトル強度は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} I_q(\omega) &= \int v_{(0)}(x) [u[x] - u(q)] \\ &\quad \times [J_q(\omega) + J_q(-\omega) - 1] \\ &\quad \times [u[x] - u(q)] h^{(0)}(x) dx \end{aligned}$$

ここで、 $J_q(\omega) = 1/[1 - (e^{i\omega}/\nu_q^{(0)})\mathcal{H}_q]$  で、 $v_{(0)}(x)$  と  $h^{(0)}(x)$  は最大固有値  $\nu_q^{(0)}$  に対応する  $\mathcal{H}_q$  の左固有関数と右固有関数である。 $\mathcal{H}$  が写像の特徴しか含まないのに対して、 $\mathcal{H}_q$  は観測する力学量に依存し、その力学量に対応する統計構造関数や一般化スペクトル強度を与える。局所拡大率  $u[x] = \log |f'(x)|$  の場合は、次のようになる。

$$\mathcal{H}_q G(x) = \sum_k \frac{G(y_k)}{|f'(y_k)|^{1-q}}$$

先の有向グラフに対応する次元写像の場合は、3つの区間がマルコフ分割となっており、 $\mathcal{H}$  と同様に  $\mathcal{H}_q$  も以下のような 3 行 3 列の行列で表現できる。

$$H_q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{qu(I_1)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{qu(I_2)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{qu(I_3)} \end{pmatrix}$$

力学量として局所軌道拡大率 (発する矢印の数の対数) を選べば、 $u(I_i) = \log(|f'(I_i)|)$  となる。他の例をあげよう。力学量として特定の区間 (ノード) を訪れると 1、それ以外の場合は 0 となる量を選び、その

区間 (ノード) を  $I_k$  とする。このとき、 $u(I_i) = \delta_{ik}$  となる。この場合は 1 が出現してから次の 1 が出現するまでの時間が特定の区間 (ノード) についての再帰時間となる。

藤坂らの先行研究では、局所軌道拡大率の揺らぎを統計構造関数や一般化スペクトル強度を用いて解析することで、タイプ I 間欠性や変調間欠性といった間欠性の強いカオスの特徴付けに成功している。 $q \rightarrow -\infty$  はラミナー相、 $q \rightarrow \infty$  はバースト相に対応する。このように重みの指標  $q$  を変えることで、異なる運動形態が取り出されることを  $q$ -相転移と呼ぶ。一般化スペクトル強度は、タイプ I 間欠性においては、ラミナー相では包絡線が逆冪則、バースト相では白色雑音型となる<sup>5)</sup>。変調間欠性においては、ラミナー相では 2 つの特徴的な振動数の間で逆冪則 ( $1/\sqrt{\omega}$ )、バースト相ではローレンツ型となる<sup>6)</sup>。

最近では、熱拡散のようにランダムな要素を含まない、カオス力学系から生じる決定論的拡散の速度の粗視量の大偏差統計理論に基づく解析を行い、平均値から大きくずれた弾道的運動の速度の制御変数依存性をグラフに表すと悪魔の階段が現れるという興味深い結果を得た。 $q$  の違いにより、平均的な右往左往する軌道と弾道的軌道の統計特性を個別にとらえたことになる<sup>7),8)</sup>。

#### 4. 有向グラフの統計構造関数と一般化スペクトル密度

先に示した 3 つのノードからなる単純な有向グラフの大偏差統計解析を行おう。力学量として各ノードから発する矢印の数の対数、カオス的一次元写像では局所軌道拡大率 (各区間の写像の傾きの絶対値の対数) に対応するものを選ぶと、 $u(I_1) = \log 2$ 、 $u(I_2) = 0$ 、 $u(I_3) = 0$  となる。この場合は、ノード 1 を訪れたとき 1、その他のときは 0 となる力学量  $u(I_i) = \delta_{i1}$  と本質的には変わらない。一般には、両者は異なる統計性を持つことを注意しておく。

$u$  の選び方にかかわらず、既出のフロベニウス・ペロン行列  $H$  の固有値 1 に対応する左右の固有ベクトルが定まる。左固有ベクトルは、要素の和が 1 になるように規格化すると  $(1/3, 1/3, 1/3)$  となり、マルコフ分割された各区間の幅と一致する。右固有ベクトルは確率密度を与えるので、左右固有ベクトルの内積が 1 となるように規格化すると、 $(6/5, 6/5, 3/5)$  となる。

統計構造関数は以下の  $q$  次フロベニウス・ペロン行列の最大固有値により定まる。

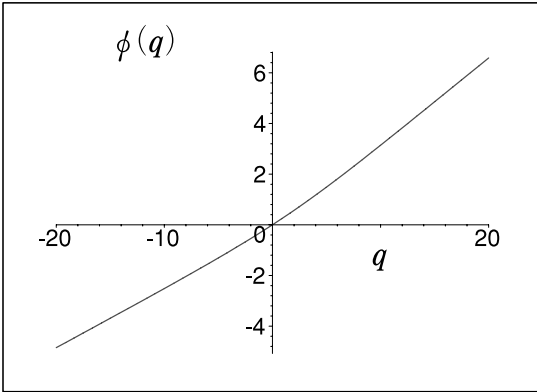


図3 特性関数  $\phi(q)$   
Fig. 3 Characteristic function  $\phi(q)$ .

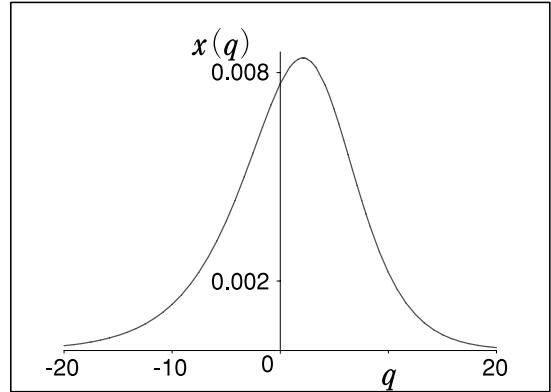


図5 重み付き分散  $\chi(q)$   
Fig. 5 Weighted variance  $\chi(q)$ .

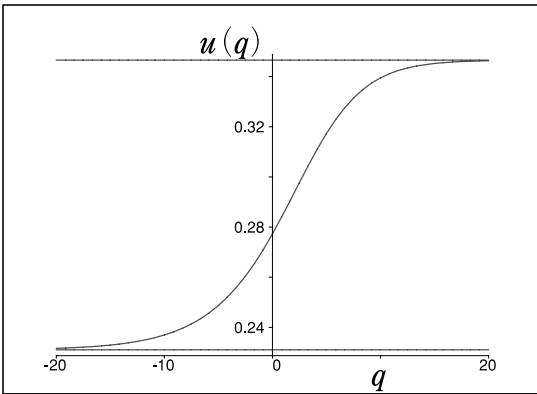


図4 重み付き平均  $u(q)$  と  $q \rightarrow \pm\infty$  での漸近線  
Fig. 4 Weighted average  $u(q)$ .

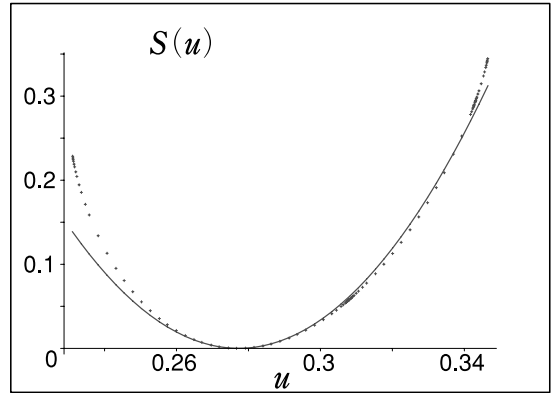


図6 揺らぎのスペクトル  $S(u)$  (実線) と中心極限定理を示す放物線 (記号)

Fig. 6 Fluctuation spectrum  $S(u)$  (line) and parabola indicating the central limit theorem (symbol).

$$\begin{aligned}
 H_q &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\times \begin{pmatrix} e^{q \log 2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{q \log 1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{q \log 1} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2^{q-1} & 0 & 1 \\ 2^{q-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

特性関数  $\phi(q)$ , 重み付き平均  $u(q)$ , 感受率  $\chi(q)$  を順に描くと図3, 図4, 図5のようになる.  $u(q)$  のグラフには, 漸近線を記してある.  $u(-\infty) = (\log 2 + \log 1 + \log 1)/3 = (\log 2)/3$  は3周期のループに対応し,  $u(+\infty) = (\log 2 + \log 1)/2 = (\log 2)/2$  は2周期のループに対応する.  $u(0)$  がノードから発する矢印に数の対数  $u$  の平均値に対応する. この値は  $H = H_0$  の固有値1に対応する右固有ベクトル(確率密度)を

用いても求まり,  $\frac{1}{3} \times \frac{6}{5} \times \log 2 + \frac{1}{3} \times \frac{6}{5} \times \log 1 + \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} \times \log 1 = \frac{2}{5} \log 2 \approx 0.28$  となる. 矢印の数に相当するものを求めると,  $2^{2/5} \approx 1.3$  となる. 2周期軌道と3周期軌道は, それぞれ,  $(0, 0) \rightarrow (0, 1/3 + 0) \rightarrow (1/3 + 0, 1/3 + 0) \rightarrow (1/3 + 0, 0) \rightarrow (0, 0)$  と  $(1/3 - 0, 1/3 - 0) \rightarrow (1/3 - 0, 1) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (2/3, 1) \rightarrow (2/3, 2/3) \rightarrow (2/3, 1/3 - 0) \rightarrow (1/3 - 0, 1/3 - 0)$  となる. ここで,  $f(1/3 - 0) = 1, f(1/3 + 0) = 0$  である. これらの周期軌道は図2の点線のグリッドラインに沿ってなぞることができる.

揺らぎのスペクトル  $S(u)$  を図6に描く.  $u(q)$  のグラフからも分かるとおり,  $S(u)$  は  $0.23 \approx (\log 2)/3 \leq u \leq (\log 2)/2 \approx 0.35$  の範囲でのみ値を持つ.  $u$  の平均値の近傍で展開し, 二次の項まで残せば, 放物線が得られ, 中心極限定理に対応する揺らぎのスペクトルが得られる. 実線が厳密なもので, 記号が中心極限定理に対応する. 平均値から大きく外れると中心極限定

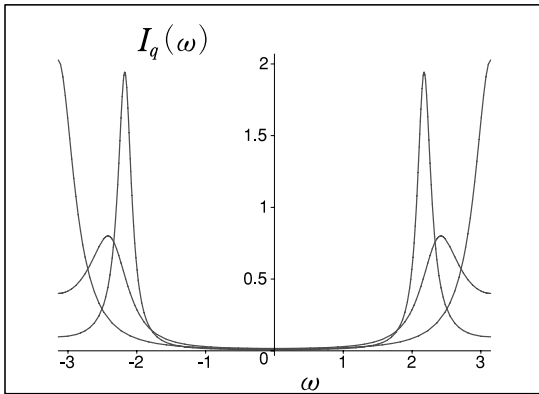


図7 一般化スペクトル密度  $I_q(\omega)$  ( $q = -5, 0, 5$ )

Fig. 7 Generalized spectral density  $I_q(\omega)$  ( $q = -5, 0, 5$ ).

理が正確な揺らぎのスペクトルを与えないことがよく分かる。

一般化スペクトル強度は  $q$  次フロベニウス・ペロン行列の最大固有値と優固有ベクトルにより定まり、図7のようになる ( $q = -5, 0, 5$ )。

$q$  が正の大きな値では、 $\omega = \pi$  で、負の大きな値では、 $\omega = 2\pi/3$  で鋭いピークを持つ。これは、重み付き平均によって、ノード1と2を往復する2周期のループと1, 3, 2の順に巡回する3周期のループを個別にとらえていることを意味する。通常のスเปクトル強度 ( $q = 0$ ) には、それぞれのループの明確な特徴が現れないことが分かる。

## 5. まとめと展望

有向ネットワークをカオス力学系と見なして、統計熱力学形式を適用すると、内在するループを個別に取り出したり、ノードから発する矢印の数の揺らぎをとらえたりすることができる。

決定論的カオスにおける、フラクタル構造をしたアトラクタの複雑な幾何学と不規則な力学の双対性を敷衍して、複雑な形、複雑なネットワーク構造には面白い不規則力学を対応付けることができるものと期待している。不規則力学の面白いところは長時間相関や大きな揺らぎに現れるが、大偏差統計解析は後者を直接とらえる手法である。この手法の実際のWWWのネットワークへの応用を試みよう。各ノード(サイト)ごとに力学量  $u(I_j)$  が定まっているが、文献2)で導入され、商業的にも利用されているサイトの重要度はWWWのネットワークの引用関係の構造が定まれば一意に定まる。ところが、WWWを利用する検索者は万事に関心があるわけではない。検索者が準備する検索語群がサイトに含まれる割合を力学量  $u(I_j)$

にすると、この検索者にカスタマイズされたサイトの重要度や関連する統計が得られることが期待される。

ここでは、カオス力学系では局所拡大率に対応する力学量  $u(I_i) = \log |f'(I_i)|$  を取り上げたが、あるノード  $k$  を訪れたときだけ1、そうでないときは0となる変数  $u(I_i) = \delta_{ik}$  という力学量も再帰時間と関連しており興味深い。特定のノードの再帰時間の大量統計という局所的な情報からどの程度ネットワーク全体のこと分かるのかという点も将来の課題として掲げておく。

カオス力学系を用いた解析にこだわる理由は、カオスが可算無限個の不安定周期軌道という確たる骨格を持つ点にある。これが粗視量の統計則に影響を与えるのであるが、酔歩やブラウン運動のような確率過程には不安定周期軌道の骨格がない。前章では再帰時間について論じたが、これはまさに不安定周期軌道の周期にはかならない。ネットワークの大偏差統計を不安定周期軌道で表現するのが次の大きな目標となる。

ここでは、説明のためきわめて単純なネットワークの例を扱ったが、ワッツ・ストロガッツモデルやスケールフリーネットワークのような複雑なネットワークの場合、対応する力学はどのようなものになるのだろうか。スモールワールド性を持つネットワークに対応する力学には、どのような特徴があるのだろうか。クラスタ係数のようなネットワークを特徴付ける諸量はカオス力学系の特徴付けにも利用できるのだろうか。それは力学系のどのような側面を定量化するのであるか。これらの方向にも研究を進展させたい。その際、問題となるのは実用的なサイズのネットワークに対して、一般化フロベニウス・ペロン行列の固有値や固有ベクトルを求めるのが困難になる点であろう。しかし、前に述べたとおり、統計量を不安定周期軌道で近似する手法がこの困難を回避し、威力を発揮するものと思われる。

謝辞 本研究は文部科学省21世紀COEプログラム「動的機能機械システムの数理モデルと設計論」(京都大学)の支援を受けた。

## 参考文献

- 1) 岩堀信子：グラフと確率行列，産業図書(1974)。
- 2) Page, L., Brin, S., Motwani, R. and Winograd, T.: The PageRank Citation Ranking: Bringing Order to the Web (1998).  
<http://www-db.stanford.edu/~backrub/pageranksub.ps>
- 3) 藤坂博一：非平衡系の統計力学，産業図書(1998)。

- 4) 森 肇, 蔵本由紀: 散逸構造とカオス, 岩波書店 (1994).
- 5) Kobayashi, T., Fujisaka, H. and Just, W.: *Phys. Rev. E*, Vol.47, p.3196 (1993).
- 6) Fujisaka, H. and Yamada, T.: *Prog. Theor. Phys.*, Vol.90, p.529 (1993).
- 7) 芳田雅臣: 京都大学情報学研究科修士論文 (2005).
- 8) Yoshida, M., Miyazaki, S. and Fujisaka, H.: unpublished.

(平成 17 年 5 月 24 日受付)

(平成 18 年 1 月 6 日採録)



宮崎 修次 (正会員)

昭和 39 年生。平成 4 年九州大学大学院理学研究科物理学専攻博士後期課程修了。同年からドイツ学术交流会留学生 (エッセン大学)。平成 8 年より広島大学工学部助手。平成 10 年より京都大学情報学研究科講師。カオスの統計物理学的研究に従事。博士 (理学)。日本物理学会, 形の科学会各会員