形式的 Fuchs 型方程式と多重 L-値の双対公式

早稲田大学大学院 理工学研究科　奥田 順一 (OKUDA, Jun-ichi)
Graduate School of Science and Engineering,
Waseda University

1　多重 L-値

[1] に於いて, modulus $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ の多重 L-値は次のように定義されました:

定義 1. $\zeta_m := \exp(2\pi i/m)$ とする. r 個の $k_i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ と $a_i \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ に対し

$$L_{ш}(k_1,\ldots,k_{r-1},k_r;a_1,\ldots,a_{r-1},a_r) := \sum_{n_1=r}^{\infty} \sum_{n_1>\cdots>n_{r-1}>n_r>0} \frac{\zeta_m^{a_1(n_1-n_2)+\cdots+a_{r-1}(n_{r-1}-n_r)+a_r n_r}}{n_1^{k_1}\cdots n_{r-1}^{k_{r-1}} n_r^{k_r}}. \tag{1.1}$$

この級数は $(k_1,a_1) \neq (1,0)$ のときに収束し, $k_1 \geq 2$ のときには絶対収束します. 多重 L-値に対して weight と depth を $k_1+\cdots+k_r$ と r で定めます. (後で見るように) 多重 L-値は積に関して閉じていて, 全体で $\mathbb{Q}$ 上無限次元な代数を成しています. 最近, これらの値は整数論や場の量子論など様々な分野に現れ, 多くの関心を集めています.

多重 L-値に関する主な問題意識としては,

- 線型空間・代数としての構造を決定したい
- 全ての (線型・代数) 関係式を書き下したい
- 具体的な値を知りたい (知られている値で書きたい)

等が挙げられます.

例 1. $m=1$ の場合は多重ゼータ値,

$$\zeta(k_1,\ldots,k_r) = L_{ш}(k_1,\ldots,k_r;0,\ldots,0) = \sum_{n_1>\cdots>n_r>0} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}} \tag{1.2}$$

として知られているものです. 日本語の解説が [8–10] にあります. 例えば, 次元に関する予想がありましたが, [14] によって解決されています. 具体的に, 綺麗な表示を持つ関係式も沢山構成されています.

例 2. $m=2$ の場合, 次のような値が現れてきます.

weight 1:

$$L_{ш}(1;1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=-\log 2.$$

weight 2:

$$L_{ш}(2;0)=\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6},\qquad L_{ш}(1,1;1,0)=\frac{(-\log 2)^2}{2}-\frac{1}{2}\zeta(2),$$
$$L_{ш}(2;1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{1}{2}\zeta(2),\qquad L_{ш}(1,1;1,1)=\frac{(-\log 2)^2}{2}.$$

weight 3:

$$\begin{aligned}
L_{ш}(3;0) &= \zeta(3),\\
L_{ш}(3;1) &= -\frac{3}{4}\zeta(3),\\
L_{ш}(2,1;0,0) &= \zeta(3),\\
L_{ш}(2,1;0,1) &= \zeta(3)+\frac{3}{2}\zeta(2)(-\log 2),\\
L_{ш}(2,1;1,0) &= -\frac{13}{8}\zeta(3)-\frac{3}{2}\zeta(2)(-\log 2),\\
L_{ш}(2,1;1,1) &= \frac{1}{8}\zeta(3),\\
L_{ш}(1,2;1,0) &= \frac{5}{8}\zeta(3)+\zeta(2)(-\log 2),\\
L_{ш}(1,2;1,1) &= -\frac{1}{4}\zeta(3)-\frac{1}{2}\zeta(2)(-\log 2),\\
L_{ш}(1,1,1;1,0,0) &= -\frac{7}{8}\zeta(3)-\frac{1}{2}\zeta(2)(-\log 2)+\frac{(-\log 2)^3}{3!},\\
L_{ш}(1,1,1;1,0,1) &= -\frac{1}{4}\zeta(3)-\frac{1}{2}\zeta(2)(-\log 2)+\frac{(-\log 2)^3}{3!},\\
L_{ш}(1,1,1;1,1,0) &= \frac{1}{8}\zeta(3)+\frac{(-\log 2)^3}{3!},\\
L_{ш}(1,1,1;1,1,1) &= \frac{(-\log 2)^3}{3!}.
\end{aligned}$$

多重 L-値の関係式としては, [4] において [14] の結果を拡張する形で次元の上限に関する式が与えられており, 具体的な関係式としては [1] に於いて, 複 shuffle 関係式

と呼ばれる多重ゼータ値の関係式の拡張が与えられています. この「拡張」という部分に注目し

多重ゼータ値の持つ性質はどれだけ多重 L-値に拡張されるか?

という問題が考えられます. [12] に於いて, 多重ゼータ値の持つ性質として最も基本的である「双対公式」に関する代数的な理解を多重 L-値へと拡張しました. 以下そのことについて説明してゆきます.

2 形式的 Fuchs 型方程式

"多重ゼータ値の最も良い母関数 ([8])" として Drinfel'd associator $\varphi(X,Y)$ が挙げられます. それは [5] に於いて非可換巾級数環 $\mathbb{C}\langle\langle X,Y\rangle\rangle$-値の Fuchs 型方程式

$$\frac{dG}{dz}=\left(\frac{X}{z}+\frac{Y}{z-1}\right)G \tag{2.1}$$

の二つの解

$$G_0(z)\sim z^X \quad (z\longrightarrow 0), \qquad\qquad G_1(z)\sim (1-z)^Y \quad (z\longrightarrow 1), \tag{2.2}$$

を結ぶ接続行列

$$\varphi(X,Y):=G_1(z)^{-1}G_0(z) \tag{2.3}$$

として定義されました. 具体的には

$$\begin{aligned}\varphi(X,Y)=&1-\zeta(2)[X,Y]-\zeta(3)\big[X,[X,Y]\big]+\zeta(2,1)\big[[X,Y],Y\big]\\ &-\zeta(4)\Big[X,\big[X,[X,Y]\big]\Big]+\zeta(3,1)\Big[X,\big[[X,Y],Y\big]\Big]+\frac{\big(-\zeta(2)[X,Y]\big)^2}{2!}\\ &-\zeta(2,1,1)\Big[\big[[X,Y],Y\big],Y\Big]+(5\text{ 次以上})\end{aligned} \tag{2.4}$$

といった風に, 各係数に多重ゼータ値が現れることが知られています ([11]). 変数 X,Y に適当なものを代入することによって $\varphi(X,Y)$ は幾つかの関係式を満たすので ([5]), 係数を比較することによって多重ゼータ値の関係式が導かれます. "Drinfel'd associator の関係式から導かれる多重ゼータ値の関係式が, 多重ゼータ値の関係式の全てを尽くすだろう" というのが予想として挙げられており, とても性質の良い母関数だと思うことができます.

そこで, Drinfel'd associator の拡張として多重 L-値が係数に現れるような接続行列を構成し, そこから多重 L-値の関係式を取り出していこう, という目論見の下, 有限集合 $\Sigma \subset \mathbb{C}$ に対し, 形式的 Fuchs 型方程式

$$\frac{dH}{dz} = \left(\sum_{c\in\Sigma} \frac{X_c}{z-c}\right) H \tag{2.5}$$

を考えます. ここで, H は $\mathcal{A}^*_\Sigma := \mathbb{C}\langle\langle X_c; c \in \Sigma\rangle\rangle$ に値を取る $\mathbb{C}$ 上の関数とします. $\mathcal{A}^*_\Sigma$ の単項式のことを語と呼ぶことにします. さらに $a, b \in \Sigma$ を固定し, 解 H^{ab}_Σ を $\{ta + (1-t)b \mid 0 < t \ll 1\}$ で定義され

$$H^{ab}_\Sigma(z) \sim \left(\frac{z-b}{a-b}\right)^{X_b} \qquad (z \longrightarrow b) \tag{2.6}$$

という挙動を持つものとして定めます. このとき接続行列

$$\Phi^{ab}_\Sigma(X_c; c \in \Sigma) := H^{ba}_\Sigma(z)^{-1} H^{ab}_\Sigma(z) \tag{2.7}$$

をなるべく具体的な形で書くことによって, 係数の間の関係式を導くことを考えます.

注意. $c \in \Sigma$ に対し

$$\mu^*(1) = 1, \qquad \Delta^*(X_c) = X_c \otimes 1 + 1 \otimes X_c, \qquad \varepsilon^*(X_c) = 0, \qquad S^*(X_c) = -X_c \tag{2.8}$$

とすると, $(\mathcal{A}^*_\Sigma, \cdot, \mu^*, \Delta^*, \varepsilon^*, S^*)$ は非可換かつ余可換な Hopf 代数になります. 特に対合射の自乗は恒等写像です.

3 Shuffle 代数

方程式 (2.5) の解 H^{ab}_Σ を記述する為に [1,7] に沿って shuffle 代数を導入します.

定義 2. 有限集合 $\Sigma \subset \mathbb{C}$ に対し非可換巾級数環 $\mathbb{C}\langle\langle x_c; c \in \Sigma\rangle\rangle$ に shuffle 積 "ш" を帰納的に次で定義する:

1. $w ш 1 = 1 ш w = w$,
2. $x_{c_1} w_1 ш x_{c_2} w_2 = x_{c_1}(w_1 ш x_{c_2} w_2) + x_{c_2}(x_{c_1} w_1 ш w_2)$.

ここで, w, w_1, w_2 は単項式 (これらも語と呼ぶ) とする. 代数 $\mathcal{A}_\Sigma := (\mathbb{C}\langle\langle x_c; c \in \Sigma\rangle\rangle, +, ш)$ を "shuffle 代数" と呼ぶ.

shuffle 積は結合的かつ可換であることが定義より直ちに分かります. $\mathbb{C}\langle\langle x_c; c \in \Sigma\rangle\rangle$ 上の準同型, 反準同型は shuffle 代数上の準同型となります.

例 3. shuffle 積とはどのような積かというと,

$$\begin{aligned}
x_{c_1} \sqcup\!\sqcup\, x_{d_1} &= x_{c_1}(1 \sqcup\!\sqcup\, x_{d_1}) + x_{d_1}(x_{c_1} \sqcup\!\sqcup\, 1) = x_{c_1}x_{d_1} + x_{d_1}x_{c_1}, \\
x_{c_1}x_{c_2} \sqcup\!\sqcup\, x_{d_1} &= x_{c_1}(x_{c_2} \sqcup\!\sqcup\, x_{d_1}) + x_{d_1}(x_{c_1}x_{c_2} \sqcup\!\sqcup\, 1) = x_{c_1}(x_{c_2}x_{d_1} + x_{d_1}x_{c_2}) + x_{d_1}x_{c_1}x_{c_2} \\
&= x_{c_1}x_{c_2}x_{d_1} + x_{c_1}x_{d_1}x_{c_2} + x_{d_1}x_{c_1}x_{c_2}, \\
x_{c_1}x_{c_2} \sqcup\!\sqcup\, x_{d_1}x_{d_2} &= x_{c_1}(x_{c_2} \sqcup\!\sqcup\, x_{d_1}x_{d_2}) + x_{d_1}(x_{c_1}x_{c_2} \sqcup\!\sqcup\, x_{d_2}) \\
&= x_{c_1}x_{c_2}x_{d_1}x_{d_2} + x_{c_1}x_{d_1}x_{c_2}x_{d_2} + x_{c_1}x_{d_1}x_{d_2}x_{c_2} \\
&\qquad + x_{d_1}x_{c_1}x_{c_2}x_{d_2} + x_{d_1}x_{c_1}x_{d_2}x_{c_2} + x_{d_1}x_{d_2}x_{c_1}x_{c_2}
\end{aligned}$$

と, 確かに $\sqcup\!\sqcup$ の左右にいる文字列を shuffle したものを返すような積になっています.

定義 3. $a, b \in \Sigma$ に対し $\mathcal{A}_\Sigma$ の部分代数 $\mathcal{A}_\Sigma^{ab} \subset \mathcal{A}_\Sigma^{b} \subset \mathcal{A}_\Sigma$ を次で定義する:

$$\mathcal{A}_\Sigma^{b} := \mathbb{C}.1 + \sum_{d \neq b} \mathcal{A}_\Sigma x_d, \qquad \mathcal{A}_\Sigma^{ab} := \mathbb{C}.1 + \sum_{\substack{c \neq a \\ d \neq b}} x_c \mathcal{A}_\Sigma x_d. \tag{3.1}$$

それぞれ "x_b で終わらない語", "x_a で始まらず x_b で終わらない語" の張る空間です. shuffle 積は語の先頭の文字と末尾の文字を保つので, これらは部分代数となります.

命題 1 (cf. [13]). $\mathcal{A}_\Sigma$ は次のように多項式環として分解される:

$$\mathcal{A}_\Sigma = \mathcal{A}_\Sigma^{b}[x_b] = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_\Sigma^{b} \sqcup\!\sqcup\, x_b^{\sqcup\!\sqcup n} \tag{3.2}$$

$$= \mathcal{A}_\Sigma^{ab}[x_a, x_b] = \bigoplus_{m=0}^{\infty}\bigoplus_{n=0}^{\infty} x_a^{\sqcup\!\sqcup m} \sqcup\!\sqcup\, \mathcal{A}_\Sigma^{b} \sqcup\!\sqcup\, x_b^{\sqcup\!\sqcup n}. \tag{3.3}$$

この分解から, $\mathcal{A}_\Sigma$ の元からその定数項を取りだすという操作が考えられます.

定義 4 (cf. [1, 7]). 正規化写像

$$\mathrm{reg}_\Sigma^{b} : \mathcal{A}_\Sigma = \mathcal{A}_\Sigma^{b}[x_b] \longrightarrow \mathcal{A}_\Sigma^{b}, \tag{3.4}$$

$$\mathrm{reg}_\Sigma^{ab} : \mathcal{A}_\Sigma = \mathcal{A}_\Sigma^{ab}[x_a, x_b] \longrightarrow \mathcal{A}_\Sigma^{ab} \tag{3.5}$$

を, 多項式環の定数項を対応させる写像として定める.

定数項を取っているということから, 正規化写像が代数準同型になるということは直ぐ分かります. 帰納的に, 正規化写像は次のように表されることも分かります.

命題 2 (cf. [7]). $w_b \in \mathcal{A}_\Sigma^b$, $w_{ab} \in \mathcal{A}_\Sigma^{ab}$ と非負整数 m, n に対し,

$$\mathrm{reg}_\Sigma^b(w_b x_b^n) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \quad w_b x_b^{n-j} ш x^j, \tag{3.6}$$

$$\mathrm{reg}_\Sigma^{ab}(x_a^m w_{ab} x_b^n) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} (-1)^{i+j} x_a^i ш x_a^{m-i} w_{ab} x_b^{n-j} ш x^j, \tag{3.7}$$

若しくは同値な表示として

$$w_b x_b^n = \sum_{j=0}^{n} \quad \mathrm{reg}_\Sigma^b(w_b x_b^{n-j}) ш x^j, \tag{3.8}$$

$$x_a^m w_{ab} x_b^n = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} x_a^i ш \mathrm{reg}_\Sigma^{ab}(x_a^{m-i} w_{ab} x_b^{n-j}) ш x^j. \tag{3.9}$$

後者の 2 本の式を $\mathcal{A}_\Sigma \hat{\otimes} \mathcal{A}_\Sigma^*$ での母関数で表示すると次のようになります ($\hat{\otimes}$ は省略してしまいます):

$$\begin{aligned}\sum_W wW &= 1 + x_a X_a + \cdots + x_b X_b \\ &\quad + x_a x_a X_a X_a + \cdots + x_a x_b X_a X_b + \cdots + x_b x_a X_b X_a + \cdots + x_b x_b X_b X_b \\ &\quad + x_a x_a x_a X_a X_a X_a + \cdots \\ &= \left(\sum_W \mathrm{reg}_\Sigma^b(w) W\right) \cdot \exp(x_b X_b) & (3.10) \\ &= \exp(x_a X_a) \cdot \left(\sum_W \mathrm{reg}_\Sigma^{ab}(w) W\right) \cdot \exp(x_b X_b), & (3.11)\end{aligned}$$

但し, 和は $\mathcal{A}_\Sigma^*$ の語 W 全てを走り, w は W を小文字にした $\mathcal{A}_\Sigma$ の語を表します. また, $\mathcal{A}_\Sigma \hat{\otimes} \mathcal{A}_\Sigma^*$ の積は

$$(x_c X_d) \cdot (x_e X_f) = (x_c ш x_e) X_d X_f \tag{3.12}$$

と計算します. この積によって exp は次の様になっています:

$$\exp(x_c X_c) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_c^{шn}}{n!} X_c^n = \sum_{n=0}^{\infty} x_c^n X_c^n. \tag{3.13}$$

注意. $c \in \Sigma$ に対し

$$\mu(1) = 1, \qquad \Delta(x_{c_1}x_{c_2}\cdots x_{c_n}) = \sum_{j=0}^{n} x_{c_1}\cdots x_{c_j} \otimes x_{c_{j+1}}\cdots x_{c_n}, \tag{3.14}$$

$$\varepsilon(x_{c_1}x_{c_2}\cdots x_{c_n}) = 0, \quad S(x_{c_1}x_{c_2}\cdots x_{c_n}) = (-1)^n x_{c_n}\cdots x_{c_2}x_{c_1} \tag{3.15}$$

とすると, $(\mathcal{A}_\Sigma, ш, \mu, \Delta, \varepsilon, S)$ は可換かつ非余可換な Hopf 代数になります. 特に対合射の自乗は恒等写像です. $\mathcal{A}_\Sigma^*$ は $\mathcal{A}_\Sigma$ の双対 Hopf 代数と同型となります.

注意. $\mathcal{A}_\Sigma \hat{\otimes}_{\mathbb{C}} \mathcal{A}_\Sigma^*$ を $\mathcal{A}_\Sigma^*$ の係数拡大だと思うと $(\mathcal{A}_\Sigma \hat{\otimes} \mathcal{A}_\Sigma^*, \cdot, \mu^*, \Delta^*, \varepsilon^*, S^*)$ も Hopf 代数になります. 特に

$$\Delta^*\left(\sum_W wW\right) = \sum_W w\,\Delta^*(W) = \left(\sum_W wW\right) \otimes \left(\sum_W wW\right), \tag{3.16}$$

つまり $\sum_W wW$ は group-like element となり, S^*, S によってその逆元は

$$\left(\sum_W wW\right)^{-1} = \sum_W w\,S^*(W) = \sum_W S(w)W \tag{3.17}$$

と表すことができます.

4 多重 polylog 関数

[2] で定義されている多重 polylog 関数を拡張したもの Li_Σ^{ab} を, shuffle 代数の言葉を用いて次の様に定義します.

定義 5. 語 $w \in \mathcal{A}_\Sigma$ を $z \in \{ta + (1-t)b \mid 0 < t \ll 1\}$ に対し $\mathrm{Li}_\Sigma^{ab}(w; z)$ を以下で定義する: 語 $w = x_b^{k_1-1}x_{c_1}\cdots x_b^{k_{r-1}-1}x_{c_{r-1}}x_b^{k_r-1}x_{c_r} \in \mathcal{A}_\Sigma^b$ に対し

$$\mathrm{Li}_\Sigma^{ab}(w; z) := (-1)^r \sum_{n_1 > \cdots > n_r > 0} \frac{\left(\frac{z-b}{c_1-b}\right)^{n_1-n_2} \cdots \left(\frac{z-b}{c_{r-1}-b}\right)^{n_{r-1}-n_r} \left(\frac{z-b}{c_r-b}\right)^{n_r}}{n_1^{k_1}\cdots n_{r-1}^{k_{r-1}} n_r^{k_r}}, \tag{4.1}$$

語 $x_b \in \mathcal{A}_\Sigma$ に対し

$$\mathrm{Li}_\Sigma^{ab}(x_b; z) := \log\frac{z-b}{a-b} = \log\left(1 - \frac{z-a}{b-a}\right) \in \mathbb{R} \tag{4.2}$$

とし，語に関して線型に拡張する．また $w \in \mathcal{A}_\Sigma$ 全体に (3.8) を用いて多項式環 $\mathcal{A}^b_\Sigma[x_b]$ から関数環への準同型となるように拡張する．

級数 (4.1) は $\{z \mid |z-b| < \min_{c\in\Sigma} |c-b|\}$ で絶対収束し，反復積分表示

$$\mathrm{Li}^{ab}_\Sigma(w;z) = \underbrace{\int_b^z \frac{dz}{z}\cdots\int_b^z \frac{dz}{z}\int_b^z \frac{dz}{z-c_1}}_{k_1}\cdots\underbrace{\int_b^z \frac{dz}{z}\cdots\int_b^z \frac{dz}{z}\int_b^z \frac{dz}{z-c_r}}_{k_r} \tag{4.3}$$

によって $\mathbb{C}\backslash\Sigma$ 上の正則関数として解析接続されます．

例 4. $r=1$ の場合は $c \neq b$ に対し

$$\mathrm{Li}^{ab}_\Sigma(x_b^{k-1}x_c;z) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{z-b}{c-b}\right)^n}{n^k} = -\mathrm{Li}_k\left(\frac{z-b}{c-b}\right) \tag{4.4}$$

と polylog 関数を用いて表すことができ，Li^{ab}_Σ はその拡張となっています．また，$w \notin \mathcal{A}^b_\Sigma$ の場合，例えば $w = x_a x_b$ の場合には，

$$x_a x_b = x_a ш x_b - x_b x_a \tag{4.5}$$

より，$\mathrm{Li}^{ab}_\Sigma(x_a x_b;z)$ は次のように定義されます．

$$\mathrm{Li}^{ab}_\Sigma(x_a x_b;z) := \mathrm{Li}^{ab}_\Sigma(x_a;z)\mathrm{Li}^{ab}_\Sigma(x_b;z) - \mathrm{Li}^{ab}_\Sigma(x_b x_a;z) \tag{4.6}$$

$$= \log\frac{z-a}{b-a}\log\frac{z-b}{a-b} + \mathrm{Li}_2\left(\frac{z-b}{a-b}\right). \tag{4.7}$$

級数表示もしくは反復積分表示，及び定義から次が分かります．

命題 3. 語 $x_c w \in \mathcal{A}_\Sigma$ に対し

$$\frac{d}{dz}\mathrm{Li}^{ab}_\Sigma(x_c w;z) = \begin{cases} \dfrac{1}{z}\mathrm{Li}^{ab}_\Sigma(w;z) & (c=b\text{ のとき}), \\ \dfrac{1}{z-c}\mathrm{Li}^{ab}_\Sigma(w;z) & (c\neq b\text{ のとき}). \end{cases} \tag{4.8}$$

この命題から部分積分を繰り返すことで次も分かります．

命題 4. 語 $w_1, w_2 \in \mathcal{A}_\Sigma$ に対し

$$\mathrm{Li}^{ab}_\Sigma(w_1;z)\times\mathrm{Li}^{ab}_\Sigma(w_2;z) = \mathrm{Li}^{ab}_\Sigma(w_1 ш w_2;z), \tag{4.9}$$

つまり $\mathrm{Li}^{ab}_\Sigma(\bullet;z)$ は $\mathcal{A}^b_\Sigma$ から関数環への準同型．

この命題は, 定義に於いて準同型であることを要請しなかったところでも準同型としての性質があることを主張しています.

命題 5. $a, b \in \Sigma$ に対し次が成立:

$$H_\Sigma^{ab}(z) = \sum_W \mathrm{Li}_\Sigma^{ab}(w; z) W. \tag{4.10}$$

証明. 方程式 (2.5) の解であることは命題 3 から明らか. 漸近挙動は (3.8) に $\mathrm{Li}_\Sigma^{ab}(\bullet; z)$ を作用させると, $\mathrm{Li}_\Sigma^{ab}(\bullet; z)$ が準同型であることから

$$\sum_W \mathrm{Li}_\Sigma^{ab}(w; z) W = \left(\sum_W \mathrm{Li}_\Sigma^{ab}(\mathrm{reg}_\Sigma^b(w); z) W\right) \exp\left(\mathrm{Li}_\Sigma^{ab}(x_b; z) X_b\right) \tag{4.11}$$

$$= \left(\sum_W \mathrm{Li}_\Sigma^{ab}(\mathrm{reg}_\Sigma^b(w); z) W\right) \left(\frac{z-b}{a-b}\right)^{X_b} \tag{4.12}$$

と, 欲しいものが出てきていることが分かります. □

5 双対公式

以下, a が Σ の中で b から一番近い点の一つであると仮定します.

定義 6. $w \in \mathcal{A}_\Sigma^{ab}$ に対する多重 polylog 関数の a での特殊値を

$$\mathcal{L}_\Sigma^{ab}(w) := \lim_{t \to 1-0} \mathrm{Li}_\Sigma^{ab}(w; at + (1-t)b) \tag{5.1}$$

$$= (-1)^r \sum_{n_1=r}^{\infty} \sum_{n_1 > \cdots > n_{r-1} > n_r > 0} \frac{\left(\frac{a-b}{c_1-b}\right)^{n_1-n_2} \cdots \left(\frac{a-b}{c_{r-1}-b}\right)^{n_{r-1}-n_r} \left(\frac{a-b}{c_r-b}\right)^{n_r}}{n_1^{k_1} \cdots n_{r-1}^{k_{r-1}} n_r^{k_r}} \tag{5.2}$$

で定義する.

例 5. $\Sigma = \{\zeta_m^n\}_{n=0}^{m-1} \cup \{0\}, a = 1, b = 0$ とすれば, 多重 L-値は

$$L_{ш}(k_1, \ldots, k_r; a_1, \ldots, a_r) = (-1)^r \mathcal{L}_\Sigma^{ab}(x_0^{k_1-1} x_{\zeta_m^{-a_1}} \cdots x_0^{k_r-1} x_{\zeta_m^{-a_r}}) \tag{5.3}$$

で表されます. また, 命題 4 から直ちに, $w_1, w_2 \in \mathcal{A}_\Sigma^{ab}$ に対し

$$\mathcal{L}_\Sigma^{ab}(w_1) \times \mathcal{L}_\Sigma^{ab}(w_2) = \mathcal{L}_\Sigma^{ab}(w_1 ш w_2) \tag{5.4}$$

が成立することが分かります. $L_ш$ の ш はこのことを象徴しています.

特異点での特殊値ということで，H^{ab}_{Σ} と H^{ba}_{Σ} の間の接続行列を $\mathcal{L}^{ab}_{\Sigma}$ を用いて表すことができます．(3.9) より 命題 5 の証明と同様に

$$H^{ab}_{\Sigma}(z) = \left(\frac{z-a}{b-a}\right)^{X_a}\left(\sum_{W}\mathrm{Li}^{ab}_{\Sigma}(\mathrm{reg}^{ab}_{\Sigma}(w);z)W\right)\left(\frac{z-b}{a-b}\right)^{X_b} \tag{5.5}$$

と分解することができ，また (3.17) より逆元も S を用いて書くことができますから，$z \to a$ とすることにより接続行列は

$$\begin{aligned}\Phi^{ab}_{\Sigma}(X_c;c\in\Sigma) &= H^{ba}_{\Sigma}(z)^{-1}H^{ab}_{\Sigma}(z) &(5.6)\\ &= \left(\frac{z-a}{b-a}\right)^{-X_a}\left(\sum_{W}\mathrm{Li}^{ba}_{\Sigma}(\mathrm{reg}^{ab}_{\Sigma}\circ S(w);z)W\right)\left(\frac{z-b}{a-b}\right)^{-X_b} & \\ &\qquad\times\left(\frac{z-a}{b-a}\right)^{X_a}\left(\sum_{W}\mathrm{Li}^{ab}_{\Sigma}(\mathrm{reg}^{ab}_{\Sigma}(w);z)W\right)\left(\frac{z-b}{a-b}\right)^{X_b} &(5.7)\\ &= \sum_{W}\mathcal{L}^{ab}_{\Sigma}(\mathrm{reg}^{ab}_{\Sigma}(w))W \qquad (z \longrightarrow a). &(5.8)\end{aligned}$$

更に，b も Σ の中で a から一番近い点だとします．すると上の式は $z \to b$ という極限も取ることができ，結果として

$$\Phi^{ab}_{\Sigma}(X_c;c\in\Sigma) = \sum_{W}\mathcal{L}^{ba}_{\Sigma}(\mathrm{reg}^{ba}_{\Sigma}\circ S(w))W \tag{5.9}$$

を得ます．この二つの表示を比較することにより結局

定理 1. a,b が Σ の中で互いに一番近いとき，語 $w \in \mathcal{A}_{\Sigma}$ に対し

$$\sum_{w_1w_2=w}\mathrm{Li}^{ba}_{\Sigma}(S(w_1);z)\,\mathrm{Li}^{ab}_{\Sigma}(w_2;z) = \mathcal{L}^{ab}_{\Sigma}(\mathrm{reg}^{ab}_{\Sigma}(w)) = \mathcal{L}^{ba}_{\Sigma}(\mathrm{reg}^{ba}_{\Sigma}\circ S(w)). \tag{5.10}$$

一つ目の等号は Euler の反転公式

$$\mathrm{Li}_2(z) + \log z\ \log(1-z) + \mathrm{Li}_2(1-z) = \zeta(2), \tag{5.11}$$

二つ目の等号は [2] にある duality のそれぞれ一般化となっています．

次に Σ が対称性を持つ場合を考えます．

定義 7. 群 $G_{\Sigma} = \{\sigma \in \mathrm{PSL}(2;\mathbb{C}) \mid \sigma(\Sigma) = \Sigma\}$ の $\mathcal{A}_{\Sigma}$, $\mathcal{A}^{*}_{\Sigma}$ への作用を次で定める:

$$\sigma(x_c) := x_{\sigma(c)} - x_{\sigma(\infty)}, \qquad\qquad \sigma(X_c) := X_{\sigma(c)}, \tag{5.12}$$

として通常の積に関する自己準同型に拡張, 但し $x_\infty = 0$, $X_\infty = -\sum_{c\in\Sigma} X_c$. また, $\mathcal{A}_\Sigma \hat{\otimes} \mathcal{A}_\Sigma^*$ へ $\mathcal{A}_\Sigma$-線型に拡張.

σ^{-1} の $\mathcal{A}_\Sigma$ への作用と σ の $\mathcal{A}_\Sigma^*$ への作用は随伴となっており, 特に

$$\sigma\left(\sum_W wW\right) = \sum_W w\,\sigma(W) = \sum_W \sigma^{-1}(w)\,W. \tag{5.13}$$

また, G_Σ の $\mathbb{C}$ 上の $\mathcal{A}_\Sigma^*$-値関数 $f(z) = \sum_W f_W(z)W$ への左右からの作用を

$$(\tau f \sigma)(z) := \sum_W f_W(\sigma(z))\,\tau(W) \tag{5.14}$$

で, Li_Σ^{ab} への左右からの作用を

$$\left(\tau \mathrm{Li}_\Sigma^{ab} \sigma\right)(w;z) = \mathrm{Li}_\Sigma^{ab}(\tau^{-1}(w);\sigma(z)) \tag{5.15}$$

で定義すると

$$\tau\left(\sum_W \mathrm{Li}_\Sigma^{ab}(w;z)W\right)\sigma = \sum_W \left(\tau \mathrm{Li}_\Sigma^{ab} \sigma\right)(w;z)W \tag{5.16}$$

と表すことができます. また $\tau \mathrm{Li}_\Sigma^{ab} \sigma$ を微分すると

命題 6. $c \in \Sigma, w \in \mathcal{A}_\Sigma, \Sigma, \tau \in G_\Sigma$ に対し

$$\frac{d}{dz}\left(\tau \mathrm{Li}_\Sigma^{ab} \sigma\right)(x_c w;z) = \left\{\frac{1}{z-(\tau\circ\sigma)^{-1}(c)} - \frac{1}{z-(\tau\circ\sigma)^{-1}(\infty)}\right\}\left(\tau \mathrm{Li}_\Sigma^{ab} \sigma\right)(w;z). \tag{5.17}$$

特に $\tau = \sigma^{-1}$ とすると $\left(\sigma^{-1}\mathrm{Li}_\Sigma^{ab}\sigma\right)(w;z)$ は $\mathrm{Li}_\Sigma^{ab}(w;z)$ と同じ微分方程式を満たし,

$$\sigma^{-1}H_\Sigma^{ab}\sigma(z) = \sigma^{-1}\left(\sum_W \mathrm{Li}_\Sigma^{ab}(w;z)W\right)\sigma = \sum_W \left(\sigma^{-1}\mathrm{Li}_\Sigma^{ab}\sigma\right)(w;z)W \tag{5.18}$$

は再び (2.5) の解となります.

更に σ が a と b を入れ替えている状況を考えましょう. このとき σ は

$$\sigma(z) = \begin{cases} a+b-z, & (\sigma(\infty) = \infty \text{ のとき}) \\ \alpha + \frac{(a-\alpha)(b-\alpha)}{z-\alpha}, & (\sigma(\infty) = \alpha \in \mathbb{C} \text{ のとき}) \end{cases} \tag{5.19}$$

と表せ，どちらの場合にも σ は対合的になります．すると (5.18) は

$$\sigma^{-1}H_\Sigma^{ab}\sigma(z)=\left(\sum_W \mathrm{Li}_\Sigma^{ab}(\mathrm{reg}_\Sigma^{b}(w);\sigma(z))\,\sigma^{-1}(W)\right)\left(\frac{z-a}{b-a}\frac{b-\sigma(\infty)}{z-\sigma(\infty)}\right)^{X_a} \tag{5.20}$$

と表すことができるので a での挙動が分かり，$H_\Sigma^{ba}(z)$ を用いて

$$\sigma^{-1}H_\Sigma^{ab}\sigma(z)=H_\Sigma^{ba}(z)\times\left(\frac{b-\sigma(\infty)}{a-\sigma(\infty)}\right)^{-X_a}, \tag{5.21}$$

逆に見ると H_Σ^{ba} を H_Σ^{ab} と σ を用いて

$$H_\Sigma^{ba}(z)=\sigma^{-1}H_\Sigma^{ab}\sigma(z)\left(\frac{a-\sigma(\infty)}{b-\sigma(\infty)}\right)^{X_a} \tag{5.22}$$

$$=\left(\frac{z-b}{a-b}\frac{a-\sigma(\infty)}{z-\sigma(\infty)}\right)^{X_b}\left(\sum_W \mathrm{Li}_\Sigma^{ab}(\mathrm{reg}_\Sigma^{ab}\circ\sigma(w);\sigma(z))W\right)\left(\frac{z-a}{b-a}\frac{a-\sigma(\infty)}{z-\sigma(\infty)}\right)^{X_a} \tag{5.23}$$

と表すことができました．b も Σ の中で a から一番近いとすれば，$z\to b$ によって

$$\Phi_\Sigma^{ab}(X_c;c\in\Sigma)=H_\Sigma^{ba}(z)^{-1}H_\Sigma^{ab}(z) \tag{5.24}$$

$$\begin{aligned}&=\left(\frac{b-a}{z-a}\frac{z-\sigma(\infty)}{a-\sigma(\infty)}\right)^{X_a}\left(\sum_W \mathrm{Li}_\Sigma^{ab}(\mathrm{reg}_\Sigma^{ab}\circ\tau(w);\sigma(z))W\right)\left(\frac{a-b}{z-b}\frac{z-\sigma(\infty)}{a-\sigma(\infty)}\right)^{X_b}\\&\quad\times\left(\frac{z-a}{b-a}\right)^{X_a}\left(\sum_W \mathrm{Li}_\Sigma^{ab}(\mathrm{reg}_\Sigma^{ab}(w);z)W\right)\left(\frac{z-b}{a-b}\right)^{X_b}\end{aligned} \tag{5.25}$$

$$=\left(\frac{b-\sigma(\infty)}{a-\sigma(\infty)}\right)^{X_a}\left(\sum_W \mathcal{L}_\Sigma^{ab}(\mathrm{reg}_\Sigma^{ab}\circ\tau(w))W\right)\left(\frac{b-\sigma(\infty)}{a-\sigma(\infty)}\right)^{X_b}\qquad(z\to b) \tag{5.26}$$

と，Φ_Σ^{ab} の別の表示が得られます．但し τ は $\tau:=\sigma\circ S=S\circ\sigma$ で定義される通常の積に関する反準同型で，特に対合的です．

定理 2. a,b が Σ の中で互いに一番近く $\sigma\in G_\Sigma$ で入れ替えられるとき，語 $w\in\mathcal{A}_\Sigma$ に対し

$$\sum_{w_1w_2=w}\mathrm{Li}_\Sigma^{ab}(\tau(w_1);\sigma(z))\,\mathrm{Li}_\Sigma^{ab}(w_2;z)=\mathcal{L}_\Sigma^{ab}(\mathrm{reg}_\Sigma^{ab}(w))=\mathcal{L}_\Sigma^{ab}(\mathrm{reg}_\Sigma^{ab}\circ\tau(w)), \tag{5.27}$$

更に二つ目の等式と同値な表示として

$$\Phi_\Sigma^{ab}(X_c;c\in\Sigma)^{-1}=\left(\frac{a-\sigma(\infty)}{b-\sigma(\infty)}\right)^{X_b}\Phi_\Sigma^{ab}(\sigma(X_c);c\in\Sigma)\left(\frac{a-\sigma(\infty)}{b-\sigma(\infty)}\right)^{X_a}. \tag{5.28}$$

(5.27) の一つ目の等式はやはり Euler の反転公式, 二つ目の等式は [3,6] にある双対公式の一般化となっています. τ を双対写像と呼びます.

例 6. $\Sigma=\{0,1\}$, $a=1$, $b=0$ とすると多重ゼータ値の場合になりますが, $x:=x_0$, $y:=-x_1$ とすると [6] にある定式化となります. σ として $\sigma(z)=1-z$ を選ぶと

$$\tau:\qquad x\mapsto y\qquad\qquad y\mapsto x \tag{5.29}$$

は [6] の多重ゼータ値の双対公式の定式化となります. $X:=X_0, Y:=X_1$ とすると

$$\varphi(X,Y)^{-1}=\left(\Phi^{ab}_{\Sigma}(X,Y)\right)^{-1}=\Phi^{ab}_{\Sigma}(\sigma(X),\sigma(Y))=\Phi^{ab}_{\Sigma}(Y,X)=\varphi(Y,X) \tag{5.30}$$

は [5] にある Drinfel'd associator の関係式の一つです.

例 7. $\Sigma=\{0,1,i,-1,-i\}$, $a=1$, $b=0$ とすると $\mathcal{L}^{ab}_{\Sigma}$ は modulus 4 の多重 L-値となります. $\sigma(z)=\frac{1-z}{1+z}$ は G_Σ の元で a,b を入れ替えます.

$$\begin{aligned}
\sigma:\quad & x_0\mapsto x_1-x_{-1}, && x_1\mapsto x_0-x_{-1}, && x_{-1}\mapsto -x_{-1},\\
& x_i\mapsto x_{-i}-x_{-1}, && x_{-i}\mapsto x_i-x_{-1}, && && (5.31)\\
& X_0\mapsto X_1, && X_1\mapsto X_0, && X_{-1}\mapsto -\sum_{c\in\Sigma}X_c,\\
& X_i\mapsto X_{-i}, && X_{-i}\mapsto X_i, && && (5.32)\\
\tau:\quad & x_0\mapsto -x_1+x_{-1}, && x_1\mapsto -x_0+x_{-1}, && x_{-1}\mapsto x_{-1},\\
& x_i\mapsto -x_{-i}+x_{-1}, && x_{-i}\mapsto -x_i+x_{-1}. && && (5.33)
\end{aligned}$$

双対公式として例えば x_0x_{-i} から次の級数の等式が得られます:

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n^2}=\sum_{n_1=2}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{n_1-1}\frac{\left(i^{3(n_1-n_2)}-i^{2(n_1-n_2)}\right)\left(1-i^{2n_2}\right)}{n_1n_2}. \tag{5.34}$$

接続行列の満たす関係式は次のようになります:

$$\Phi^{ab}_{\Sigma}(X_0,X_1,X_i,X_{-1},X_{-i})^{-1}=2^{X_0}\Phi^{ab}_{\Sigma}(X_1,X_0,X_{-i},-\sum_{c\in\Sigma}X_c,X_i)2^{X_1}. \tag{5.35}$$

また, これらの式を $\{0,1,-1\}$, つまり modulus 2 の多重 L-値に制限すると [3] にある関係式が出ます.

参考文献

[1] Arakawa T. and Kaneko M.: On multiple *L*-values, to appear in J. Math. Soc. Japan, 2002.

[2] J. M. Borwein, D. M. Bradley, D. J. Broadhurst and P. Lisoněk: Special values of multiple polylogarithms, *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 353 (2001), 907–941.

[3] D. J. Broadhurst: Massive 3-loop Feynman diagrams reducible to SC* primitives of algebras of the sixth root of unity, *Eur. Phys. J. C Part. Fields*, Vol. 8 (1999), 313–333.

[4] P. Deligne and A. B. Goncharov: Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte, preprint, 2003, arXiv:math.NT/0302267.

[5] V. G. Drinfel'd: On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with Gal($\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$), *Algebra i Analiz*, Vol. 2 (1990), 149–181.

[6] M. E. Hoffman: The algebra of multiple harmonic series, *J. Algebra*, Vol. 194 (1997), 477–495.

[7] Ihara K., Kaneko M. and D. Zagier: Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values, preprint, 2003.

[8] 金子昌信：多重ゼータ値入門, 代数的整数論とその周辺, 数理解析研究所講究録, No. 1097, 50–68, 1999.

[9] 金子昌信：多重ゼータ値, 数学, Vol. 54 (2002), 404–415.

[10] 金子昌信, 大野泰生：多重ゼータ値の関係式について, 第 45 回代数学シンポジウム報告集, 48–64, 2000.

[11] Le T. Q. T. and Murakami J.: Kontsevich's integral for the Kauffman polynomial, *Nagoya Math. J.*, Vol. 142 (1996), 39–65.

[12] Okuda J.: Duality formulas of the Special Values of Multiple Polylogarithms, preprint, 2003, arXiv:math.CA/0307137.

[13] C. Reutenauer: *Free Lie algebras*, Vol. 7 of *London Mathematical Society Monographs. New Series*, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1993, Oxford Science Publications.

[14] Terasoma T.: Mixed Tate motives and multiple zeta values, *Invent. Math.*, Vol. 149 (2002), 339–369.