数理解析研究所講究録 1367 巻 2004 年 29-32

多重ゼータ値と超幾何関数の接続公式

近畿大・理工 青木貴史 (AOKI Takashi)
近畿大・理工 大野泰生 (OHNO Yasuo)

多重ゼータ値の歴史はオイラー [3] にまで遡るが，多くの数学者の注目を集め出したのは比較的最近である．ここ十数年の間に，多重ゼータ値は，数論は勿論のこと，結び目の量子不変量，場の量子論等，様々な分野で登場し，その結果，異分野同士の思わぬ関係が多重ゼータ値を要として見出され，それが新たな興味を引き起こしつつある．ここでは，超幾何関数の接続公式から導かれる，多重ゼータ値の間に成立する線型関係式の新しい族について紹介する．

次のような微分方程式の初等的問題を考える．

問 題 x, z をパラメータとする 2 階非斉次微分方程式

$$t^2(1-t)\frac{d^2\Phi_0}{dt^2}+t\Big((1-t)(1-x)-x\Big)\frac{d\Phi_0}{dt}+(x^2-z^2)\,\Phi_0=t \tag{1}$$

の原点における正則解 (ベキ級数解)

$$\Phi_0(t)=\Phi_0(x,z;t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nt^n$$

は一意的に定まる．この解 $\Phi_0(t)$ の $t=1$ における値（が存在すると仮定して）$\Phi_0(1)$ を求めよ．

これに答えるためには，まず $\Phi_0(t)$ を求めなければならない．微分方程式の知識が多少あれば，$\Phi_0(t)$ の求め方としては，すぐに次の 2 つの方法を思いつく：

(1) 定数変化法を用いる．

(2) 未定係数法により $\Phi_0(t)$ の展開係数 a_n を定める．

実は，これらの方法以外に，もう一つ $\Phi_0(t)$ を作る方法がある．

(3) 多重ゼータ値を用いて構成された母函数 $\Phi_0(t)$ が，微分方程式 (1) を満たす．

(2), (3) を比較することにより，(等号付き）多重ゼータ値の新しい関係式が得られる．高さ $s\geq 1$，重さ $k\geq 2s$ の許容的インデックスの全体を $I_0(k,s)$ で表す．

定 理 2 [1] $s\geq 1, k\geq 2s$ を満たす，すべての自然数 s, k に対して次の等式が成り立つ：

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in I_0(k,s)}\zeta^*(\boldsymbol{k})=2\binom{k-1}{2s-1}(1-2^{1-k})\zeta(k). \tag{2}$$

証明の方針を述べる前に，記号の説明をする必要がある．多重インデックス $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ $(k_i \in \mathbf{Z},\ k_i > 0)$ は $k_1 \geq 2$ であるとき**許容的** (**admissible**) または**収束インデックス**であると呼ばれる．許容的多重インデックス $\boldsymbol{k}$ に対して多重ゼータ値 $\zeta^*(\boldsymbol{k})$ を次のように定義する：

$$\zeta^*(\boldsymbol{k}) = \zeta^*(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \sum_{m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_n \geq 1} \frac{1}{{m_1}^{k_1} {m_2}^{k_2} \cdots {m_n}^{k_n}}.$$

通常，多重ゼータの文献で多く見られる定義とは若干異なり，和を取る条件に等号が入っていることに注意しておくが，詳細は参考文献を参照されたい．

証明の方針　インデックス $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ と不定元 t に対して

$$L^*_{\boldsymbol{k}}(t) = \sum_{m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_n \geq 1} \frac{t^{m_1}}{{m_1}^{k_1} {m_2}^{k_2} \cdots {m_n}^{k_n}} \qquad (|t| < 1).$$

とおくと，明らかに $L^*_{\boldsymbol{k}}(1) = \zeta^*(\boldsymbol{k})$ である．さらに

$$X_0(k, s; t) = \sum_{\boldsymbol{k} \in I_0(k,s)} L^*_{\boldsymbol{k}}(t)$$

とおけば，$X_0(k, s; 1)$ は定理の式の左辺である．不定元 x, z に対して

$$\Phi_0(t) = \sum_{k,s \geq 0} X_0(k, s; t) x^{k-2s} z^{2s-2}$$

により $\Phi_0(t)$ を定めると，これは (1) の原点におけるベキ級数解になっていることがわかる．従って $\Phi_0(1)$ を x, z について展開して $x^{k-2s} z^{2s-2}$ の係数を見れば，定理の左辺が得られる．

一方，(2) に従って計算すれば $\Phi_0(t)$ の t^n の係数 a_n $(n \geq 1)$ は次の形に求まる：

$$a_n = \frac{\Gamma(n)\Gamma(n-x)\Gamma(1-x-z)\Gamma(1-x+z)}{\Gamma(1-x)\Gamma(1-x-z+n)\Gamma(1-x+z+n)}.$$

ここに $\Gamma(z)$ はガンマ函数である．従って $\Phi_0(1) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ である．この和を計算するために a_n を次の形に変形する：

$$a_n = \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{A^{(+)}_{n,l}}{x+z-l} + \frac{A^{(-)}_{n,l}}{x-z-l} \right)$$

ただし，

$$A^{(\pm)}_{n,l} = (-1)^l \binom{n-1}{l-1} \frac{(\pm z - l + 1)(\pm z - l + 2) \cdots (\pm z - l + n - 1)}{(\pm 2z - l + 1)(\pm 2z - l + 2) \cdots (\pm 2z - l + n)}.$$

である．従って，和の順序を交換すると

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{n=l}^{\infty} A_{n,l}^{(+)} \frac{1}{x+z-l} + \sum_{n=l}^{\infty} A_{n,l}^{(-)} \frac{1}{x-z-l} \right)$$

を得るが，n に関する $A_{n,l}^{(\pm)}$ の和は次のように求められる：

$$\sum_{n=l}^{\infty} A_{n,l}^{(\pm)} = (-1)^l \frac{(\pm z - l + 1)(\pm z - l + 2)\cdots(\pm z - 1)}{(\pm 2z - l + 1)(\pm 2z - l + 2)\cdots(\pm 2z)} F(l, \pm z, \pm 2z + 1, 1).$$

ここに $F(\alpha, \beta, \gamma; t)$ はガウスの超幾何級数である．ガウスの公式

$$F(\alpha, \beta, \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}$$

により

$$\sum_{n=l}^{\infty} A_{n,l}^{(\pm)} = \pm \frac{(-1)^l}{z}$$

となる．よって

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{z} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \left(\frac{1}{x+z-l} - \frac{1}{x-z-l} \right).$$

を得るが，右辺を x と z に関して展開し $x^{k-2s} z^{2s-2}$ の係数を見ると

$$2\binom{k-1}{2s-1} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{l^k}$$

となっているが，$\displaystyle\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{l^k} = (1 - 2^{1-k})\zeta(k)$ を用いて書き直すと定理の式 (2) の右辺を得る．

さて，上述の方法 (1)，すなわち定数変化法を用いて解いてみればどうなるか．斉次方程式の解の基本系は，超幾何函数を用いて書き下すことができる．それを用いて定数変化法を実行し，得られた解に $t = 1$ を代入した式を接続公式により変形すると，定理 2 と同等な式として次の定理を得る：

定 理 3 パラメータについての適当な条件の下に，次の式が成り立つ：

$$\frac{1}{1-x} \int_0^1 (1-t)^{z-x} F(1-x+z, 1+z, 2-x; t)\, dt = \frac{1}{z} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \left(\frac{1}{x+z-l} - \frac{1}{x-z-l} \right).$$

参考文献

[1] T. Aoki and Y. Ohno, Sum relations for multiple zeta values and connection formulas for the Gauss hypergeometric functions, preprint (arXiv.org:math.NT/0307264).

[2] T. Arakawa and M. Kaneko (荒川恒男，金子昌信), 多重ゼータ値および多重L値ノート，www.math.kyushu-u.ac.jp/~mkaneko/mzv-lecnote.pdf

[3] L. Euler, Meditationes circa singulare serierum genus, Novi Comm. Acad. Sci. Petropol bf 20 (1775), 140-186, reprinted in Opera Omnia ser. I, vol. 15, B. G. Teubner, Berlin (1927), 217-267.

[4] M. Hoffman and Y. Ohno, Relations of multiple zeta values and their algebraic expression, *J. Algebra*, **262** (2003), 332-347.

[5] M. Kaneko (金子昌信), 多重ゼータ値, 数学 **54** (2002), 404-415.

[6] Y. Kombu (昆布康博), 多重ゼータ値の和公式と超幾何微分方程式, 近畿大学大学院修士論文 (2003).

[7] T. Q. T. Le and J. Murakami, Kontsevich's integral for the Homfly polynomial and relations between values of multiple zeta functions, *Topology and its Applications*, **62** (1995), 193-206.

[8] Y. Ohno, A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values. *J. Number Theory*, **74** (1999), 39-43.

[9] Y. Ohno and D. Zagier, Multiple zeta values of fixed weight, depth, and height, *Indag. Math.*, **12** (2001), 483-487.

[10] J. Okuda and K. Ueno, Relations for multiple zeta values and Mellin transforms of multiple polylogarithms. preprint (arXiv.org:math.NT/0301277).

[11] T. Terasoma, Mixed Tate motives and multiple zeta values, *Invent. Math.*, **149** (2002), 339-369.

[12] D. Zagier, Values of zeta functions and their applications. In Proceedings of ECM 1992, *Progress in Math.*, **120** (1994), 497-512.