数理解析研究所講究録 1368 巻 2004 年 152-159

Rayleigh-Benard対流における振動不安定性

広島大理　八幡英雄 (Hideo YAHATA)

Rayleigh-Benard(RB) 対流におけるカオスは、小さなアスペクト比をもつ直方体容器中の流体系に対する実験において典型的に、連続自由度をもつ系に出現する小数自由度カオスとして観測されているので、それと同じ境界条件をもつNavier-Stokes方程式系でこれらを再現することは興味ある課題と考えてきた。種々の切断模型系 (truncated model system)[1] や差分法[2,3] を用いた計算はこれまでにも試みられてきたが、ここではGalerkin 法に基づいて力学系を構成する試みを述べる。その目的はいくつかあるが、まず第一に偏微分方程式+境界条件が常微分方程式系に等価であることは標語的には周知の事実であるが、カオスの理論は有限自由度力学系にたいして展開されていることを考えると、実際Navier-Stokes系から力学系を具体的に構成してそのカオス解を算出して実験結果および差分法による計算結果と比較することは興味がある。第二にNavier-Stokes系の解を直接差分法によって計算する際対流項の差分化スキームの選択に問題が生じうる。MAC法ではstaggerd lattice、QUICK法では3次の風上差分が用いられるが、これらの方法を用いていま考えている直方体中のRB対流の計算を行ってみると、それらが生ずる解の分岐構造が必ずしも同等の結果を与えないことが見出される。第三に解の安定性解析は、解ベクトル場の展開振幅の時間発展を記述する力学系において実際上扱いが可能になる。

水平に置かれた高さ $2d$、アスペクト比 Γ_x, Γ_y の直方体容器中の流体に現れるRB対流を考える。境界条件は、速度にかんして粘着的、温度にかんして水平壁で等温的、垂直壁で断熱的とする。容器の中心を原点にとり、鉛直上向きに z 軸をとる。上下水平壁面 $(z=d,-d)$ を一様温度 T_U, T_L $(T_U<T_L)$ に保つと、対流のない定常熱伝導状態において、速度 $\mathbf{u}_s=0$, 温度 $T_s=(T_L+T_U)/2-(T_L-T_U)z/(2d)$ となり、これに対応して圧力 p_s を定めることができる。運動方程式において速度 $\mathbf{u}=0+\mathbf{u}(u_x,u_y,u_z)$, 温度 $T=T_s+\delta T$, 圧力 $p=p_s+\delta p$ とおいて得られる対流を支配する運動方程式を無次元化形でかくと、Boussinesq近似の範囲で、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}=-\nabla\frac{\delta p}{\rho}+\nabla^2\mathbf{u}+\mathrm{Pr}\delta T\mathbf{e}_z\ . \tag{1}$$

$$\frac{\partial \delta T}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\delta T=\frac{1}{16}\mathrm{Ra}u_z+\nabla^2\delta T\ . \tag{2}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u}=0\ . \tag{3}$$

となり、2つの無次元パラメータ Prandtl 数 $\mathrm{Pr}=\nu/\kappa$, Rayleigh 数 $\mathrm{Ra}=\alpha g(2d)^3(T_L-T_U)/\kappa\nu$ を含む。ここで、平均密度 ρ, 動粘性率 ν, 温度伝導率 κ, 体膨張係数 α, 重力加速度 g を定義した。直方体の領域 $D=\{(x,y,z):-\Gamma_x<x<\Gamma_x,-\Gamma_y<y<\Gamma_y,-1<z<1\}$, その各表面 $\partial D_x^{(\pm)}=\{(y,z):x=\pm\Gamma_x,-\Gamma_y<y<\Gamma_y,-1<z<1\}$, $\partial D_y^{(\pm)}=\{(x,z):y=$

$\pm\Gamma_y, -\Gamma_x < x < \Gamma_x, -1 < z < 1\}$, $\partial D_z^{(\pm)} = \{(x,y) : z = \pm1, -\Gamma_x < x < \Gamma_x, -\Gamma_y < y < \Gamma_y\}$ を定義すると、境界条件は

$$u_x = \partial_x u_x = u_y = u_z = \partial_x \delta T = 0 \quad \text{on} \quad \partial D_x^{(\pm)} \tag{4}$$
$$u_x = u_y = \partial_y u_y = u_z = \partial_y \delta T = 0 \quad \text{on} \quad \partial D_y^{(\pm)} \tag{5}$$
$$u_x = u_y = u_z = \partial_z u_z = \delta T = 0 \quad \text{on} \quad \partial D_z^{(\pm)} \tag{6}$$

によって定まる。

この偏微分方程式系から Galerkin 法を用いて力学系を導く。まず流速場 $\mathbf{u}$, 温度場 δT を同じ境界条件をみたす正規直交関数系を用いて

$$u_x(x,y,z,t) = \sum_{\ell=0}^{L-1}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} A_{\ell mn}(t)\varphi_\ell\left(\frac{x}{\Gamma_x}\right)\chi_m\left(\frac{y}{\Gamma_y}\right)\chi_n(z) \tag{7}$$
$$u_y(x,y,z,t) = \sum_{\ell=0}^{L-1}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} B_{\ell mn}(t)\chi_\ell\left(\frac{x}{\Gamma_x}\right)\varphi_m\left(\frac{y}{\Gamma_y}\right)\chi_n(z) \tag{8}$$
$$u_z(x,y,z,t) = \sum_{\ell=0}^{L-1}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} C_{\ell mn}(t)\chi_\ell\left(\frac{x}{\Gamma_x}\right)\chi_m\left(\frac{y}{\Gamma_y}\right)\varphi_n(z) \tag{9}$$
$$\delta T(x,y,z,t) = \sum_{\ell=0}^{L-1}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} \Theta_{\ell mn}(t)\psi_\ell\left(\frac{x}{\Gamma_x}\right)\psi_m\left(\frac{y}{\Gamma_y}\right)\chi_n(z) \tag{10}$$

のように展開する。ここで、$\varphi_n(x), \chi_n(x), \psi_n(x)$ $(n = 0, 1, ..., N-1)$ は、境界条件

$$\varphi_n(\pm1) = \partial_x\varphi_n(\pm1) = \chi_n(\pm1) = \partial_x\psi_n(\pm1) = 0 \tag{11}$$

および内積 $(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ にたいして正規直交条件

$$(\varphi_m, \varphi_n) = (\chi_m, \chi_n) = (\psi_m, \psi_n) = \delta_{m,n} \tag{12}$$

を満たすように Chebyshev 多項式を用いて構成された直交多項式系である [4)]。

一方圧力場に対しては、速度場の方程式 (1) の発散をとって圧力 Poisson 方程式

$$\nabla^2\frac{\delta p}{\rho} = \mathrm{Pr}\frac{\partial T}{\partial z} - \partial_i(u_j\partial_j u_i) \tag{13}$$

を満たす。ここで、境界条件は

$$\partial_i\left(\frac{\delta p}{\rho}\right)\bigg|_{\partial D_i^{(\pm)}} = \mathrm{Pr}\nabla^2 u_i\bigg|_{\partial D_i^{(\pm)}} \qquad (i = x,y,z) \tag{14}$$

となる。これを解くには、通例にしたがって δp を 2 項に分けて $\delta p = \delta p^{(1)} + \delta p^{(2)}$ とおき、それぞれの項を次の方程式と境界条件を満たすように定めればよい:

$$\nabla^2\frac{\delta p^{(1)}}{\rho} = 0, \quad \text{with b.c.} \quad \partial_i\left(\frac{\delta p^{(1)}}{\rho}\right)\bigg|_{\partial D_i^{(\pm)}} = \mathrm{Pr}\nabla^2 u_i\bigg|_{\partial D_i^{(\pm)}} \qquad (i = x,y,z) \tag{15}$$
$$\nabla^2\frac{\delta p^{(2)}}{\rho} = \mathrm{Pr}\frac{\partial T}{\partial z} - \partial_i(u_j\partial_j u_i), \quad \text{with b.c.} \quad \partial_i\left(\frac{\delta p^{(2)}}{\rho}\right)\bigg|_{\partial D_i^{(\pm)}} = 0 \quad (i = x,y,z) \tag{16}$$

このうち $\delta p^{(1)}$ はさらに分割して $\delta p^{(1)} = \delta p^{(11)} + \delta p^{(12)} + \delta p^{(13)}$ とおいて、$\delta p^{(11)}$ は次の方程式と境界条件を満たすように定める:

$$\nabla^2 \frac{\delta p^{(11)}}{\rho} = 0, \quad \text{with b.c.} \quad \partial_x \left(\frac{\delta p^{(11)}}{\rho} \right) \bigg|_{\partial D_x^{(\pm)}} = \mathrm{Pr} \nabla^2 u_x \bigg|_{\partial D_x^{(\pm)}}$$

$$\partial_y \left(\frac{\delta p^{(11)}}{\rho} \right) \bigg|_{\partial D_y^{(\pm)}} = 0; \qquad \partial_z \left(\frac{\delta p^{(11)}}{\rho} \right) \bigg|_{\partial D_z^{(\pm)}} = 0 \tag{17}$$

この境界値問題の解は次のような形に書くことができる:

$$\frac{\delta p^{(11)}}{\rho} = \mathrm{Pr} \sum_{\ell'=0}^{L-1} \sum_{m'=0}^{M-1} \sum_{n'=0}^{N-1} [P_{\ell' m' n'}^{(11+)} + P_{\ell' m' n'}^{(11-)}] A_{\ell' m' n'}(t) \tag{18}$$

ここで

$$P_{\ell' m' n'}^{(11+)} = \sum_{m,n} \frac{\Gamma_x \cosh \left(\frac{D_{mn}^{(1)}}{\Gamma_x} x \right)}{D_{mn}^{(1)} \sinh(D_{mn}^{(1)})} v_m \left(\frac{y}{\Gamma_y} \right) v_n(z) \frac{\varphi_{\ell'}''(1) - \varphi_{\ell'}''(-1)}{2\Gamma_x^2} (v_m, \chi_{m'})(v_n, \chi_{n'}) \tag{19}$$

$$P_{\ell' m' n'}^{(11-)} = \sum_{m,n} \frac{\Gamma_x \sinh \left(\frac{D_{mn}^{(1)}}{\Gamma_x} x \right)}{D_{mn}^{(1)} \cosh(D_{mn}^{(1)})} v_m \left(\frac{y}{\Gamma_y} \right) v_n(z) \frac{\varphi_{\ell'}''(1) + \varphi_{\ell'}''(-1)}{2\Gamma_x^2} (v_m, \chi_{m'})(v_n, \chi_{n'}) \tag{20}$$

であり、関数 $v_n(x), (n = 0, 1, \ldots)$ は区間 $(-1, 1)$ 上の固有値問題

$$\frac{d^2 v_n}{dx^2} + \beta_n^2 v_n = 0, \quad \text{with b.c.} \quad \partial_x v_n(\pm 1) = 0 \tag{21}$$

によって定まる正規直交固有関数系で条件 $(v_m, v_n) = \delta_{m,n}$ を満たし、β_n は対応する固有値である。さらに、$D_{mn}^{(1)} = \Gamma_x \sqrt{(\beta_m/\Gamma_y)^2 + \beta_n^2}$ で定義される。

$\delta p^{(12)}, \delta p^{(13)}$ に対しても同様な表式を得る。

一方、$\delta p^{(2)}$ は線形項からの寄与と非線形項からの寄与を分けて、$\delta^{(2)} = \delta p_L^{(2)} + \delta p_{NL}^{(2)}$ と書くと、Neumann 型の境界条件を満たす級数型の Green 関数を用いて次のように表わされる:

$$\frac{\delta p_L^{(2)}}{\rho} = -\mathrm{Pr} \sum_{\ell,m,n} \sum_{\ell' n' n'} \frac{v_\ell \left(\frac{x}{\Gamma_x} \right) v_m \left(\frac{y}{\Gamma_y} \right) v_n(z)}{\left(\frac{\beta_\ell}{\Gamma_x} \right)^2 + \left(\frac{\beta_m}{\Gamma_y} \right)^2 + \beta_n^2} (v_\ell \psi_{\ell'})(v_m \psi_{m'})(v_n \partial \chi_{n'}) \Theta_{\ell' m' n'} \tag{22}$$

$$\frac{\delta p_{NL}^{(2)}}{\rho} = \sum_{\ell,m,n} \frac{v_\ell \left(\frac{x}{\Gamma_x} \right) v_m \left(\frac{y}{\Gamma_y} \right) v_n(z)}{\left(\frac{\beta_\ell}{\Gamma_x} \right)^2 + \left(\frac{\beta_m}{\Gamma_y} \right)^2 + \beta_n^2} (v_\ell v_m v_n | \partial_j (u_i \partial_i u_j)) \tag{23}$$

ここで、

$$(v_\ell v_m v_n | \partial_j (u_i \partial_i u_j)) = \int_{-\Gamma_x}^{\Gamma_x} \int_{-\Gamma_y}^{\Gamma_y} \int_{-1}^{1} v_\ell \left(\frac{\xi}{\Gamma_x} \right) v_m \left(\frac{\eta}{\Gamma_y} \right) v_n(\zeta) \partial_j (u_i \partial_i u_j) \frac{d\xi}{\Gamma_x} \frac{d\eta}{\Gamma_y} d\zeta \tag{24}$$

で定義される。これらの表式を運動方程式 (1) – (2) に代入して Galerkin 法を用い、展開基底 (7) – (10) へのモーメントを計算すると、展開振幅ベクトル

$$\mathbf{X}^t = \left(\mathbf{u}^t, \theta^t\right) = (\{A_{\ell mn}(t)\}, \{B_{\ell mn}(t)\}, \{C_{\ell mn}(t)\}, \{\Theta_{\ell mn}(t)\}) \tag{25}$$

の時間発展を支配する力学系

$$\frac{d\mathbf{X}^t}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}^t) = \mathbf{L}\cdot\mathbf{X}^t + \mathbf{N}(\mathbf{X}^t, \mathbf{X}^t) \tag{26}$$

又は、

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \mathbf{u}^t \\ \theta^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{X}^t) \\ h(\mathbf{X}^t) \end{pmatrix} \tag{27}$$

が構成される。ここで、$\mathbf{L}\cdot\mathbf{X}^t$ は線形項、$\mathbf{N}(\mathbf{X}^t, \mathbf{X}^t)$ は２次非線形項を表わし、$\mathbf{X}^t$ が定まれば、ベクトル場 $\mathbf{F}(\mathbf{X}^t)$ を計算することができる。ただし、このままでは速度場の非圧縮性の条件が満たされないので、SMAC 法と同様に修正圧力場 $p^{(2)}(x, y, z)$ を導入して、先ず

$$\frac{\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^t}{\tau} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^t) \tag{28}$$

によって $\tilde{\mathbf{u}}$ を予測し (ただし、τ は時間差分の間隔)、さらに

$$\frac{\mathbf{u}^{t+\tau} - \tilde{\mathbf{u}}}{\tau} = -\nabla p^{(2)} \tag{29}$$

とおいて、$\nabla\cdot\mathbf{u}^{t+\tau} = 0$ となるように、即ち、Poisson 方程式

$$\nabla^2 p^{(2)} = \frac{\nabla\cdot\tilde{\mathbf{u}}}{\tau} \quad \text{with b.c.} \quad \partial_i p^{(2)}|_{\partial D_i^{(\pm)}} = 0, \quad p^{(2)}|_{\partial D_i^{(\pm)}} = 0, \quad (i = x, y, z) \tag{30}$$

を満たすように $p^{(2)}$ を定めて、$\mathbf{u}^{t+\tau}$ を修正する。ただし、境界条件は (29) の両辺が整合的になるように通常の Neumann 条件を拡張して上記 (30) のようにとった。通常の MAC 法では差分格子上で $p^{(2)}$ を定めるが、ここでは $p^{(2)}$ を上記境界条件 (30) を満すように

$$p^{(2)}(x, y, z) = \sum_{\ell=0}^{L-1}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} P^{(2)}_{\ell mn}\varphi_\ell\left(\frac{x}{\Gamma_x}\right)\varphi_m\left(\frac{y}{\Gamma_y}\right)\varphi_n(z) \tag{31}$$

と展開し、非圧縮性条件 $\nabla\cdot\mathbf{u}^{t+\tau} = 0$ の Galerkin 形式

$$\begin{aligned}\sum_{\ell'=0}^{L-1}\sum_{m'=0}^{M-1}\sum_{n'=0}^{N-1}[\quad \cdot \quad & \frac{1}{\Gamma_x}(\varphi_\ell\partial\varphi_{\ell'})(\varphi_m\chi_{m'})(\varphi_n\chi_{n'})A_{\ell'm'n'}(t+\tau) \\ \cdot \quad + \quad & \frac{1}{\Gamma_y}(\varphi_\ell\chi_{\ell'})(\varphi_m\partial\varphi_{m'})(\varphi_n\chi_{n'})B_{\ell'm'n'}(t+\tau) \\ \cdot \quad + \quad & (\varphi_\ell\chi_{\ell'})(\varphi_m\chi_{m'})(\varphi_n\partial\varphi_{n'})C_{\ell'm'n'}(t+\tau)] = 0\end{aligned} \tag{32}$$

を満たすようにスペクトル空間で $\{p^{(2)}_{\ell mn}\}$ を定める。$\tilde{\mathbf{u}}$ の展開 (7) – (9) の係数を $\tilde{A}_{\ell,m,n}$, $\tilde{B}_{\ell,m,n}$, $\tilde{C}_{\ell,m,n}$ として (29) の直交関数展開を具体的にかき、展開関数の正規直交性を用いるとその各係数成分にたいして、

$$A^{t+\tau}_{\ell,m,n} = \tilde{A}_{\ell,m,n} + \tau \sum_{\ell'=0}^{L-1}\sum_{m'=0}^{M-1}\sum_{n'=0}^{N-1} \frac{1}{\Gamma_x}(\partial\varphi_\ell\varphi_{\ell'})(\chi_m\varphi_{m'})(\chi_n\varphi_{n'})p^{(2)}_{\ell',m',n'} \tag{33}$$

$$B^{t+\tau}_{\ell,m,n} = \tilde{B}_{\ell,m,n} + \tau \sum_{\ell'=0}^{L-1}\sum_{m'=0}^{M-1}\sum_{n'=0}^{N-1} (\chi_\ell\varphi_{\ell'})\frac{1}{\Gamma_y}(\partial\varphi_m\varphi_{m'})(\chi_n\varphi_{n'})p^{(2)}_{\ell',m',n'} \tag{34}$$

$$C^{t+\tau}_{\ell,m,n} = \tilde{C}_{\ell,m,n} + \tau \sum_{\ell'=0}^{L-1}\sum_{m'=0}^{M-1}\sum_{n'=0}^{N-1} (\chi_\ell\varphi_{\ell'})(\chi_m\varphi_{m'})(\partial\varphi_n\varphi_{n'})p^{(2)}_{\ell',m',n'} \tag{35}$$

を得る。式の見通しをよくするため 3 組の添字 $(\ell, m; n)$ をもつ以下の行列にたいして次のように $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$ を定義する:

$$\mathbf{D} = \{D_{\ell,m,n;\ell',m',n'}\} = \frac{1}{\Gamma_x}\{(\partial\varphi_\ell\varphi_{\ell'})(\chi_m\varphi_{m'})(\chi_n\varphi_{n'})\} \tag{36}$$

$$\mathbf{E} = \{E_{\ell,m,n;\ell',m',n'}\} = \frac{1}{\Gamma_y}\{(\chi_\ell\varphi_{\ell'})(\partial\varphi_m\varphi_{m'})(\chi_n\varphi_{n'})\} \tag{37}$$

$$\mathbf{F} = \{F_{\ell,m,n;\ell',m',n'}\} = \{(\chi_\ell\varphi_{\ell'})(\chi_m\varphi_{m'})(\partial\varphi_n\varphi_{n'})\} \tag{38}$$

さらに (33) – (35) にあらわれるベクトルにたいして次のように $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{p}^{(2)}$ を定義する: $\mathbf{a} = \{A_{\ell,m,n}\}$, $\mathbf{b} = \{B_{\ell,m,n}\}$, $\mathbf{c} = \{C_{\ell,m,n}\}$, $\mathbf{p}^{(2)} = \{p^{(2)}_{\ell,m,n}\}$。これらを用いると (33) – (35) は、

$$\mathbf{a}^{t+\tau} = \tilde{\mathbf{a}} + \tau\mathbf{D}\mathbf{p}^{(2)}, \quad \mathbf{b}^{t+\tau} = \tilde{\mathbf{b}} + \tau\mathbf{E}\mathbf{p}^{(2)}, \quad \mathbf{c}^{t+\tau} = \tilde{\mathbf{c}} + \tau\mathbf{F}\mathbf{p}^{(2)} \tag{39}$$

と表され、非圧縮性条件 (32) は、

$$\mathbf{D}^T\mathbf{a}^{t+\tau} + \mathbf{E}^T\mathbf{b}^{t+\tau} + \mathbf{F}^T\mathbf{c}^{t+\tau} = 0 \tag{40}$$

と表されるから、Poisson 方程式 (30) は Galerkin 形式で表すと

$$[\mathbf{D}^T\mathbf{D} + \mathbf{E}^T\mathbf{E} + \mathbf{F}^T\mathbf{F}]\mathbf{p}^{(2)} = -\frac{1}{\tau}[\mathbf{D}^T\tilde{\mathbf{a}} + \mathbf{E}^T\tilde{\mathbf{b}} + \mathbf{F}^T\tilde{\mathbf{c}}] \tag{41}$$

となる。いま、$\Pi = [\mathbf{D}^T\mathbf{D} + \mathbf{E}^T\mathbf{E} + \mathbf{F}^T\mathbf{F}]$ とおくと、Π の逆行列 Π^{-1} を用いて、

$$\mathbf{p}^{(2)} = -\frac{1}{\tau}\Pi^{-1}[\mathbf{D}^T\tilde{\mathbf{a}} + \mathbf{E}^T\tilde{\mathbf{b}} + \mathbf{F}^T\tilde{\mathbf{c}}] \tag{42}$$

と表されるからこれを (39) に代入すると

$$\mathbf{a}^{t+\tau} = \tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{D}\Pi^{-1}[\mathbf{D}^T\tilde{\mathbf{a}} + \mathbf{E}^T\tilde{\mathbf{b}} + \mathbf{F}^T\tilde{\mathbf{c}}] \tag{43}$$

$$\mathbf{b}^{t+\tau} = \tilde{\mathbf{b}} - \mathbf{E}\Pi^{-1}[\mathbf{D}^T\tilde{\mathbf{a}} + \mathbf{E}^T\tilde{\mathbf{b}} + \mathbf{F}^T\tilde{\mathbf{c}}] \tag{44}$$

$$\mathbf{c}^{t+\tau} = \tilde{\mathbf{c}} - \mathbf{F}\Pi^{-1}[\mathbf{D}^T\tilde{\mathbf{a}} + \mathbf{E}^T\tilde{\mathbf{b}} + \mathbf{F}^T\tilde{\mathbf{c}}] \tag{45}$$

となり、まとめると、

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}^{t+\tau} \\ \mathbf{b}^{t+\tau} \\ \mathbf{c}^{t+\tau} \end{pmatrix} = [1-\hat{P}] \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{a}} \\ \tilde{\mathbf{b}} \\ \tilde{\mathbf{c}} \end{pmatrix} \text{ with } \hat{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{E} \\ \mathbf{F} \end{pmatrix} \Pi^{-1}(\mathbf{D}^T\mathbf{E}^T\mathbf{F}^T) \tag{46}$$

すなわち温度場も含めて

$$\mathbf{u}^{t+\tau} = [1-\hat{P}]\tilde{\mathbf{u}} = [1-\hat{P}](\mathbf{u}^t + \tau\mathbf{f}(\mathbf{X}^t)) \tag{47}$$

$$\theta^{t+\tau} = \theta^t + \tau h(\mathbf{X}^t) \tag{48}$$

によってベクトル場 $\mathbf{X}^t(\mathbf{u}^t, \theta^t)$ の時間発展が支配されることがわかる。ここで、$\hat{P}^2 = \hat{P}$ を容易に示すことができるから、$\hat{P}$ は射影演算子であり、しかも解ベクトル $\mathbf{X}$ に依らない定数行列である。

この方程式の線型項を対角化し線型成長率を計算することにより、熱伝導状態から対流の開始の臨界 Rayleigh 数 Ra_c を求めることができる。$\Gamma_x = 2.4$, $\Gamma_y = 1.2$, $L = M = N = 8$ の場合に計算してみると図1のようになり、$Ra_c = 2446.8$ を得る。これは最近の外の方法による結果 $Ra_c = 2448.4$ [5] と比較しうる。

次に、この計算方式によって直方体中の RB 対流の simulation を行った計算例を示す。J. P. Gollub ら [6] は水を用いて一連の RB 対流におけるカオス検出実験を行った。それらのうち、アスペクト比 $\Gamma_x = 3.5$, $\Gamma_y = 2.0$ の直方体容器中の Prandtl 数 Pr= 2.5 の水を用いた RB 対流の実験において、y 軸に平行方向に軸をもつ2個の平行対流ロール細胞を実現させ Rayleigh 数 Ra を上昇させるにつれ、定常流から振動状態に遷移し、しかもその振動状態が規則的振動状態からカオス状態に遷移することを観測した。

ここでは同じ外部パラメータで定常ロール状態を計算した例を示す。図2は $Ra = 20000$ における温度場 δT のある水平断面等高線図を示す。ただし、この場合ロールの数は偶数で、垂直二等分面 $x = 0$ おいて x 軸に垂直な対称面に関する場変数の対称性を仮定して展開振幅を次のように制限している:

$$\mathbf{U} = \{A_{\ell O,mE,nO}, B_{\ell E,mO,nO}, C_{\ell E,mE,nE}, \Theta_{\ell E,mE,nE}, P^{(2)}_{\ell E,mE,nO}\} \tag{49}$$

$$\mathbf{V} = \{A_{\ell O,mE,nE}, B_{\ell E,mO,nE}, C_{\ell E,mE,nO}, \Theta_{\ell E,mE,nO}, P^{(2)}_{\ell E,mE,nE}\} \tag{50}$$

ここで E, O は対応する展開関数の偶奇性を表わす。これらのモード変数に対して、力学系 (47) – (48) におけるモード結合は

$$\frac{d}{dt}\mathbf{U} = \mathbf{L}\cdot\mathbf{U} + \mathbf{N}(\mathbf{U},\mathbf{V}), \quad \frac{d}{dt}\mathbf{V} = \mathbf{L}\cdot\mathbf{V} + \mathbf{N}(\mathbf{U},\mathbf{U}) + \mathbf{N}(\mathbf{V},\mathbf{V}) \tag{51}$$

の形をとる。これを用いて振動ロール状態の Galerkin simulation を行い、振動モードの空間分布を振動の1周期 P にわたって計算した結果を図3に示す。これはロール軸の周りを流体の暖塊と冷塊が回転して振動状態を生じている blob circulating mode[7] である。

参考文献

1) H. Yahata, Prog. Theor. Phys. **75**(1986), 790; **78**(1987), 282.

2) D. Mukutmoni and K. T. Yang, Trans. ASME J. Heat Transfer, **115**(1993), 360, 367.

3) H. Yahata, J. Phys. Soc. Jpn **69**(2000), 1384.
4) H. Yahata, J. Phys. Soc. Jpn. **68**(1999), 446.
5) J. Mizushima and T. Nakamura, J. Phys. Soc. Jpn. **72**(2003), 197.
6) J. P. Gollub and S. V. Benson, J. Fluid Mech. **100**(1980), 449; J. P. Gollub, S. V. Benson and J. Steinman, Ann. NY Acad. Sci. **357**(1980), 22.
7) E. W. Bolton, F. H. Busse and R. M. Clever, J. Fluid Mech. **164**(1986), 469.

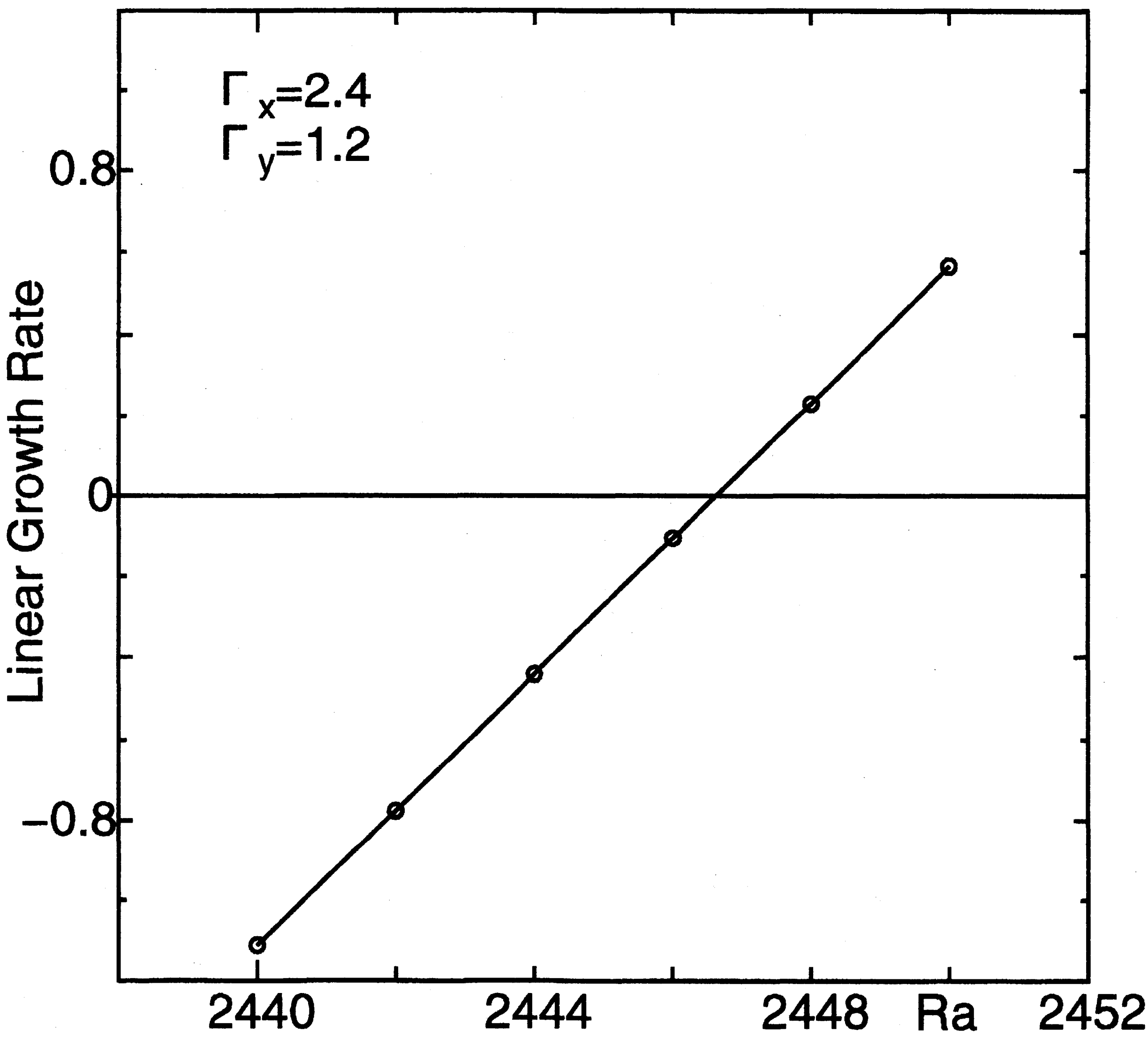

図 1: 対流モードの線型成長率 (任意スケール): ($Pr = 2.5$, $\Gamma_x = 2.4$, $\Gamma_y = 1.2$。 $L = M = N = 8$).

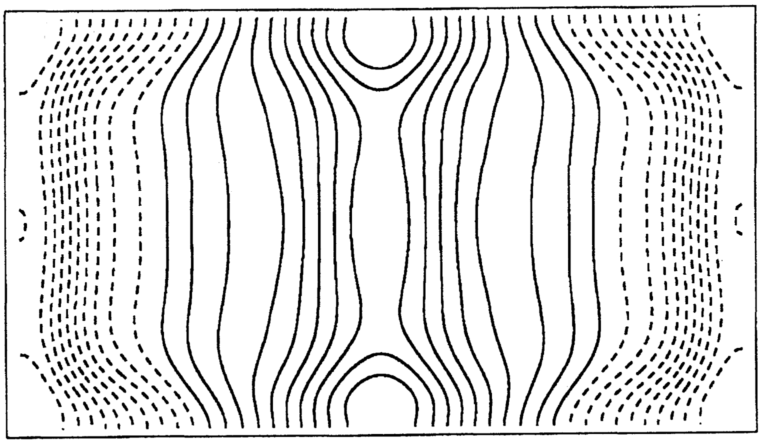

図 2: 温度場 $\delta T(x,y,z=0.6)$ の水平面内等高線図: ($Ra = 20000$, $Pr = 2.5$, $\Gamma_x = 3.5$, $\Gamma_y = 2.0$)。Galerkin simulation($L = M = N = 8$).

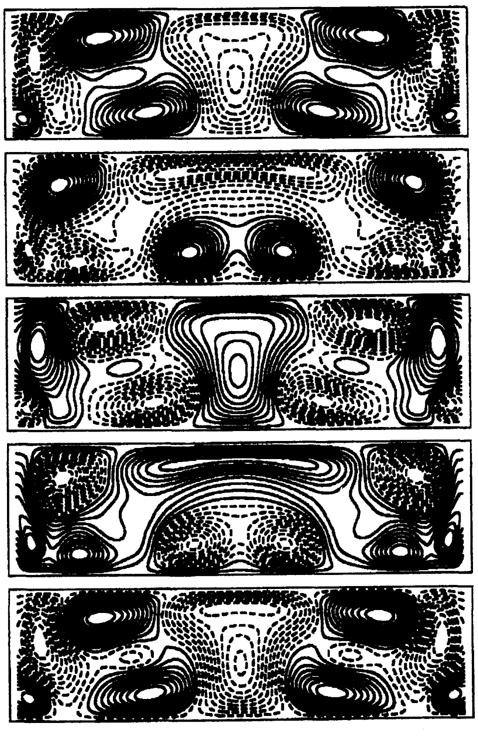

図 3: 振動温度場 $\delta T(x,y=0.0,z,t) - <\delta T(x,y=0,z)>$ のの 1 周期の変化を示す垂直面内等高線図:上より時刻 $t = 0, P/4, P/2, 3P/4, P$, ここで P は振動の周期、<> は 1 周期平均. ($Ra = 32000$, $Pr = 2.5$, $\Gamma_x = 3.5$, $\Gamma_y = 2.0$, $L = M = N = 8$)。