

二層流体中を伝播する内部孤立波の 横方向攪乱に対する安定性

神戸大学・自然科学研究科 片岡 武 (Takeshi Kataoka)

蔦原道久 (Michihisa Tsutahara)

Graduate School of Science and Technology

Kobe University

1. 問題設定と基礎方程式

一様な重力加速度 g が働く系において、無限に広い 2 枚の水平平板により挟まれた非圧縮性完全流体を考える。この流体はそれぞれが均質な互いに密度の異なる 2 流体が重なり合っ構成され、下層の流体は密度 ρ_L で平均深さが h_L 、上層の流体は密度 ρ_U で平均深さが h_U であるとする (図 1 参照)。解析の便宜上、これら 2 層の境界面 (界面) の平均深さが $z=0$ と一致するような $x-y-z$ 直交座標を導入する。つまり下板と上板がそれぞれ $z=-h_L$ と h_U にあることになる。界面を除く各層内の流れは渦なしであると仮定すれば、下層、上層の流体に対してそれぞれ速度ポテンシャル ϕ_L 、 ϕ_U を導入できる。 g と h_L を用いて無次元化すると (以降の変数はすべて無次元),

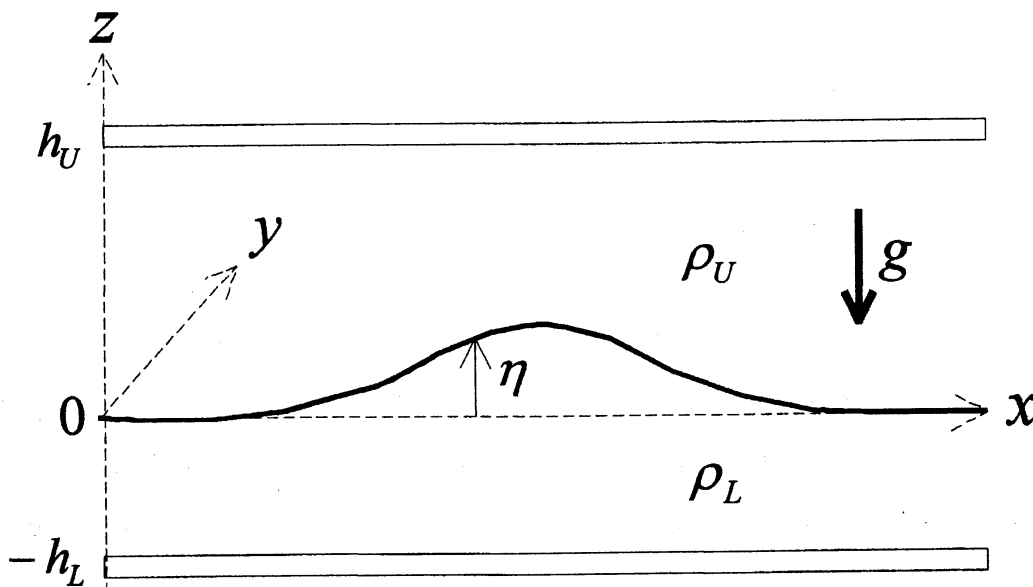


図 1 : 問題設定図

無次元化支配方程式は、

$$\frac{\partial^2 \phi_L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_L}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_L}{\partial z^2} = 0 \quad [-1 < z < \eta(x, y, t)] \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_U}{\partial z^2} = 0 \quad \left[\eta(x, y, t) < z < \frac{h_U}{h_L} \right] \quad (2)$$

無次元化境界条件は、

$$\frac{\partial \phi_L}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z = -1 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \phi_U}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z = \frac{h_U}{h_L} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi_L}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \phi_L}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \phi_L}{\partial z} \quad \text{at } z = \eta(x, y, t) \quad (5)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi_U}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \phi_U}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \phi_U}{\partial z} \quad \text{at } z = \eta(x, y, t) \quad (6)$$

$$\frac{\partial \phi_L}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi_L}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_L}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_L}{\partial z} \right)^2 \right] + \eta \quad (7)$$

$$- \frac{\rho_U}{\rho_L} \left\{ \frac{\partial \phi_U}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi_U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_U}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_U}{\partial z} \right)^2 \right] + \eta \right\} = f(t)$$

ただし η は無次元化された界面の鉛直 (z) 方向変位, $f(t)$ は十分遠方 ($x \rightarrow \infty$) における(7)の左辺の値を表す t の関数.

いま(1)-(7)の解として

$$\begin{cases} \phi_L = vx + \Phi_{L_s}(x, z) \\ \phi_U = vx + \Phi_{U_s}(x, z) \\ \eta = \eta_s(x) \end{cases} \quad (8)$$

ただし, v は与えられた正定数, の形であらわされるような解を考える. このような解は次のような流体现象をあらわしている. つまり空間的に局所的な変動が, その形を崩すことなく一定速さで伝播するというものである. このような流体现象のことを一般に孤立波の伝播という. そしてこの現象をあらわす解(8)のことを孤立波解と呼ぶ.

この孤立波解(8)のうち, 1次元的に安定なものを対象とし, その横方向攪乱に対

する線形安定性を考える。解を次の形に表す：

$$\begin{cases} \phi_L = vx + \Phi_{Ls}(x, z) + \hat{\phi}_L(x, z)e^{\lambda t + i\epsilon y} \\ \phi_U = vx + \Phi_{Us}(x, z) + \hat{\phi}_U(x, z)e^{\lambda t + i\epsilon y} \\ \eta = \eta_s(x) + \hat{\eta}(x)e^{\lambda t + i\epsilon y} \end{cases} \quad (9)$$

(λ は未知の複素定数； ϵ は与えられた実定数)

(9)を(1)-(7)に代入すると、 $\hat{\phi}$ 、 $\hat{\eta}$ は λ を固有値とする次の線形偏微分方程式系の固有値問題の解として与えられる。

$$\frac{\partial^2 \hat{\phi}_L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}_L}{\partial z^2} = \epsilon^2 \hat{\phi}_L \quad [-1 < z < \eta_s(x)] \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{\phi}_U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}_U}{\partial z^2} = \epsilon^2 \hat{\phi}_U \quad \left[\eta_s(x) < z < \frac{h_U}{h_L} \right] \quad (11)$$

境界条件は、

$$\frac{\partial \hat{\phi}_L}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z = -1 \quad (12)$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}_U}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z = \frac{h_U}{h_L} \quad (13)$$

$$\lambda \hat{\eta} + q_L \frac{d\hat{\eta}}{ds} - \frac{1}{\cos\theta} \left[\frac{\partial \hat{\phi}_L}{\partial n} - \frac{d(q_L \cos\theta)}{ds} \hat{\eta} \right] = 0 \quad \text{at } z = \eta_s(x) \quad (14)$$

$$\lambda \hat{\eta} + q_U \frac{d\hat{\eta}}{ds} - \frac{1}{\cos\theta} \left[\frac{\partial \hat{\phi}_U}{\partial n} - \frac{d(q_U \cos\theta)}{ds} \hat{\eta} \right] = 0 \quad \text{at } z = \eta_s(x) \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \lambda \hat{\phi}_L + q_L \frac{\partial \hat{\phi}_L}{\partial s} + \left[q_L \frac{d(q_L \sin\theta)}{ds} + 1 \right] \hat{\eta}_L \\ - \frac{\rho_U}{\rho_L} \left\{ \lambda \hat{\phi}_U + q_U \frac{\partial \hat{\phi}_U}{\partial s} + \left[q_U \frac{d(q_U \sin\theta)}{ds} + 1 \right] \hat{\eta}_U \right\} = 0 \end{aligned} \quad \text{at } z = \eta_s(x) \quad (16)$$

$$\hat{\phi}_U \rightarrow 0, \hat{\phi}_L \rightarrow 0, \hat{\eta} \rightarrow 0 \quad \text{as } x \rightarrow \pm\infty \quad (17)$$

ただし q_U 、 q_L は上層および下層流体の孤立波の流速の大きさ：

$$q_U = \sqrt{\left(v + \frac{\partial \Phi_{Us}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{Us}}{\partial z} \right)^2}, \quad (18)$$

$$q_L = \sqrt{\left(v + \frac{\partial\Phi_{Ls}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi_{Ls}}{\partial z}\right)^2}, \quad (19)$$

であり、 θ は界面の接線方向と x 軸のなす角、 s は界面に沿っての座標、 $\partial/\partial n$ は界面の法線方向微分（上向き正）を表す。

結局、固有値問題(10)-(17)に対するすべての攪乱モード解が

$$\operatorname{Re}[\lambda] \leq 0 \quad (20)$$

を満たせばその孤立波解は線形安定である。一方、1つでも

$$\operatorname{Re}[\lambda] > 0 \quad (21)$$

を満たす攪乱モード解があれば、その孤立波解は線形不安定である。

2. 線形安定性解析

方程式系(10)-(17)の解のうち、 ε が小さいものを考えよう。つまり攪乱の y 方向依存性が緩やかな場合を対象とし、(10)-(17)の解の $\varepsilon \rightarrow 0$ の漸近的振舞を調べることにする。そこで $x \rightarrow \pm\infty$ における境界条件(17)はさておき、(10)-(17)の解のうち、 x, z に関して単位量の範囲で有意の変化 $[\partial\hat{\phi}/\partial x = O(\hat{\phi}), \partial\hat{\phi}/\partial z = O(\hat{\phi}), \partial\hat{\eta}/\partial x = O(\hat{\eta})]$ をするものを次のような ε の冪級数の形で求める：

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_L &= \hat{\phi}_{L0} + \varepsilon\hat{\phi}_{L1} + \varepsilon^2\hat{\phi}_{L2} + \varepsilon^3\hat{\phi}_{L3} + \dots \\ \hat{\phi}_U &= \hat{\phi}_{U0} + \varepsilon\hat{\phi}_{U1} + \varepsilon^2\hat{\phi}_{U2} + \varepsilon^3\hat{\phi}_{U3} + \dots \\ \hat{\eta} &= \hat{\eta}_0 + \varepsilon\hat{\eta}_1 + \varepsilon^2\hat{\eta}_2 + \varepsilon^3\hat{\eta}_3 + \dots \\ \lambda &= \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^2\lambda_2. \end{aligned} \quad (22)$$

ここに、 $\hat{\phi}_{L0}, \hat{\phi}_{U0}, \hat{\eta}_0$ は(10)-(17)に $\varepsilon = \lambda = 0$ を代入したときの解である：

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{L0} &= \frac{\partial\Phi_{Ls}}{\partial x} \\ \hat{\phi}_{U0} &= \frac{\partial\Phi_{Us}}{\partial x} \\ \hat{\eta}_0 &= \frac{d\eta_s}{dx} \end{aligned} \quad (23)$$

級数(22)を(37)-(40)に代入し、 ε について整理すると、 $\hat{\phi}_{Ln}, \hat{\phi}_{Un}, \hat{\eta}_n (n=1,2,3,\dots)$ に

に対する支配方程式系が次の形で得られる：

● $n=1$ のとき，

$$\frac{\partial^2 \hat{\phi}_{L1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}_{L1}}{\partial z^2} = 0 \quad [-1 < z < \eta_s(x)] \quad (24)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{\phi}_{U1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}_{U1}}{\partial z^2} = 0 \quad \left[\eta_s(x) < z < \frac{h_U}{h_L} \right] \quad (25)$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}_{L1}}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z = \frac{h_U}{h_L} \quad (26)$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}_{U1}}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z = -1 \quad (27)$$

$$\frac{1}{\cos \theta} \left[\frac{d(q_L \cos \theta \hat{\eta}_1)}{ds} - \frac{\partial \hat{\phi}_{L1}}{\partial n} \right] = G_1 \quad \text{at } z = \eta_s \quad (28)$$

$$\frac{1}{\cos \theta} \left[\frac{d(q_U \cos \theta \hat{\eta}_1)}{ds} - \frac{\partial \hat{\phi}_{U1}}{\partial n} \right] = G_1 \quad \text{at } z = \eta_s \quad (29)$$

$$q_L \frac{\partial \hat{\phi}_{L1}}{\partial s} + \left[q_L \frac{d(q_L \sin \theta)}{ds} + 1 \right] \hat{\eta}_1 - \frac{\rho_U}{\rho_L} \left\{ q_U \frac{\partial \hat{\phi}_{U1}}{\partial s} + \left[q_U \frac{d(q_U \sin \theta)}{ds} + 1 \right] \hat{\eta}_1 \right\} = H_1 \quad (30)$$

at $z = \eta_s$

where

$$G_1 = -\lambda_1 \hat{\eta}_0, \quad H_1 = -\lambda_1 \left(\hat{\phi}_{L0} - \frac{\rho_U}{\rho_L} \hat{\phi}_{U0} \right). \quad (31)$$

● $n \geq 2$ のとき，

$$\frac{\partial^2 \hat{\phi}_{Ln}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}_{Ln}}{\partial z^2} = F_{Ln} \quad [-1 < z < \eta_s(x)] \quad (32)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{\phi}_{Un}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}_{Un}}{\partial z^2} = F_{Un} \quad \left[\eta_s(x) < z < \frac{h_U}{h_L} \right] \quad (33)$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}_{Ln}}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z = \frac{h_U}{h_L} \quad (34)$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}_{Un}}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z = -1 \quad (35)$$

$$\frac{1}{\cos\theta} \left[\frac{d(q_L \cos\theta \hat{\eta}_n)}{ds} - \frac{\partial \hat{\phi}_{Ln}}{\partial n} \right] = G_n \quad \text{at } z = \eta_s \quad (36)$$

$$\frac{1}{\cos\theta} \left[\frac{d(q_U \cos\theta \hat{\eta}_n)}{ds} - \frac{\partial \hat{\phi}_{Un}}{\partial n} \right] = G_n \quad \text{at } z = \eta_s \quad (37)$$

$$q_L \frac{\partial \hat{\phi}_{Ln}}{\partial s} + \left[q_L \frac{d(q_L \sin\theta)}{ds} + 1 \right] \hat{\eta}_n - \frac{\rho_U}{\rho_L} \left\{ q_U \frac{\partial \hat{\phi}_{Un}}{\partial s} + \left[q_U \frac{d(q_U \sin\theta)}{ds} + 1 \right] \hat{\eta}_n \right\} = H_n \quad \text{at } z = \eta_s \quad (38)$$

ただし,

$$F_{L2} = \hat{\phi}_{L0}, \quad F_{U2} = \hat{\phi}_{U0},$$

$$G_2 = -\lambda_1 \hat{\eta}_1 - \lambda_2 \hat{\eta}_0, \quad H_2 = -\lambda_1 \left(\hat{\phi}_{L1} - \frac{\rho_U}{\rho_L} \hat{\phi}_{U1} \right) - \lambda_2 \left(\hat{\phi}_{L0} - \frac{\rho_U}{\rho_L} \hat{\phi}_{U0} \right), \quad (39)$$

$$F_{L3} = \hat{\phi}_{L1}, \quad F_{U3} = \hat{\phi}_{U1},$$

$$G_3 = -\lambda_1 \hat{\eta}_2 - \lambda_2 \hat{\eta}_1, \quad H_3 = -\lambda_1 \left(\hat{\phi}_{L2} - \frac{\rho_U}{\rho_L} \hat{\phi}_{U2} \right) - \lambda_2 \left(\hat{\phi}_{L1} - \frac{\rho_U}{\rho_L} \hat{\phi}_{U1} \right), \dots \quad (40)$$

方程式系(24)-(30)および(32)-(38)は線形非同次方程式系であり、その同次部分が $x \rightarrow \pm\infty$ で指数関数的に零に近づく自明でない解 $(\hat{\phi}_{L0}, \hat{\phi}_{U0}, \hat{\eta}_0)$ をもつ。よって(24)-(30)および(32)-(38)が $x \rightarrow \pm\infty$ で指数関数的に発散しない解をもつためには、その非同次項 F_{Ln}, F_{Un}, G_n, H_n が次の条件 (可解条件) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-1}^{\eta_s} \hat{\phi}_{L0} F_{Ln} dz + \frac{\rho_U}{\rho_L} \int_{\eta_s}^{h_U/h_L} \hat{\phi}_{U0} F_{Un} dz \right) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\hat{\phi}_{L0} - \frac{\rho_U}{\rho_L} \hat{\phi}_{U0} \right) G_n - \hat{\eta}_0 H_n \right]_{z=\eta_s} dx = 0 \quad (41)$$

を満たさなければならない。

さて $n=1$ より順に解いていこう。 $n=1$ のとき可解条件(41)は常に満たされる。解は,

$$\hat{\phi}_{L1} = c_1 \hat{\phi}_{L0} + \lambda_1 \frac{\partial \Phi_{Ls}}{\partial v}$$

$$\hat{\phi}_{U1} = c_1 \hat{\phi}_{U0} + \lambda_1 \frac{\partial \Phi_{Us}}{\partial v} \quad (42)$$

$$\hat{\eta}_1 = c_1 \hat{\eta}_0 + \lambda_1 \frac{\partial \eta_s}{\partial v}$$

ただし c_1 は任意定数。 $n=2$ のとき可解条件(41)は,

$$\frac{\lambda_1^2}{v} \frac{dE}{dv} = -I^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\int_{-1}^{\eta_s} \hat{\phi}_{L0}^2 dz + \frac{\rho_U}{\rho_L} \int_{\eta_s}^{h_U/h_L} \hat{\phi}_{U0}^2 dz \right]. \quad (43)$$

ここに,

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \int_{-1}^{\eta_s} \left[\left(\frac{\partial \Phi_{Ls}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{Ls}}{\partial z} \right)^2 \right] dz + \frac{\rho_U}{\rho_L} \int_{\eta_s}^{h_U/h_L} \left[\left(\frac{\partial \Phi_{Us}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{Us}}{\partial z} \right)^2 \right] dz \right\} + \left(1 - \frac{\rho_U}{\rho_L} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta_s^2}{2} dx. \quad (44)$$

は孤立波の全エネルギー。水面重力孤立波(Tanaka, 1986), および内部重力孤立波(Kataoka & Tsutahara)は, $dE/dv > 0$ を満たすとき1次元的に安定であることが知られている。すると(43)より λ_1 の実部は0となり, 孤立波の安定性を知るには次のオーダーに進むことが必要となる。

$n=3$ のときは, 外部解も考慮した計算(過程の説明は省略)を経て, その可解条件(41)は,

$$\frac{2\lambda_2}{v} = \begin{cases} \pm \left(\lambda_1^2 \frac{dM}{dv} + vM \right) \frac{dQ}{dE} & \text{if } \left(\lambda_1^2 \frac{dM}{dv} + vM \right) \frac{dQ}{dE} > 0 \\ \text{解なし} & \text{if } \left(\lambda_1^2 \frac{dM}{dv} + vM \right) \frac{dQ}{dE} < 0 \end{cases} \quad (45)$$

となる。ここに, λ_1 は(43)により与えられ,

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} \eta_s dx,$$

$$Q = - \left(1 + \frac{\rho_U h_L}{\rho_L h_U} \right) vM + \frac{2}{v} \left(T_L - \frac{h_L}{h_U} T_U \right)$$

$$T_L = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-1}^{\eta_s} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi_{Ls}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{Ls}}{\partial z} \right)^2 \right] dx dz \quad (\text{下層流体における孤立波の運動エネルギー})$$

$$T_U = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\eta_s}^{h_U/h_L} \frac{\rho_U}{2\rho_L} \left[\left(\frac{\partial \Phi_{Us}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{Us}}{\partial z} \right)^2 \right] dx dz$$

(上層流体における孤立波の運動エネルギー)

である。(45)より, 孤立波が不安定となるための十分条件は,

$$\left(\lambda_1^2 \frac{dM}{dv} + vM \right) \frac{dQ}{dE} > 0. \quad (46)$$

3. 水面孤立波の不安定性

上の不安定条件を水面孤立波 ($\rho_v = 0$) に適用してみる. 孤立波解を数値的に計算し, 不安定条件を適用すると, 式(46)の () 内の量は常に正值をとった. そこで $Q-E$ の分布を図に示した. $dE/dv > 0$ を満たす 1 次元的に安定な領域において, この $Q-E$ の分布が正の勾配をとれば, その孤立波解は横方向攪乱に対して不安定である. 過去の研究によると, 最大鉛直方向変位/深さが 0.78 以上で 1 次元的に不安定となることが知られている (Tanaka, 1986). 本研究の不安定条件(46)を適用すると, 最大鉛直方向変位/深さが 0.71 以上で横方向不安定性を示すことがわかった.

具体的な内部孤立波への不安定条件の適用は今後おこなう予定である.

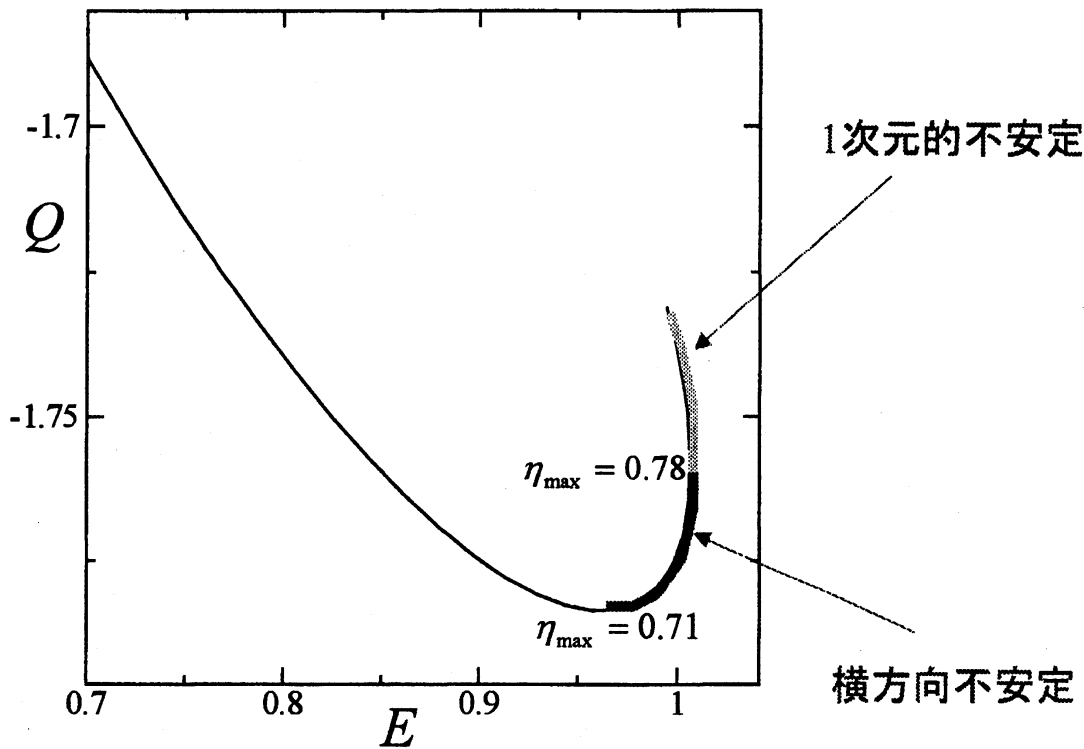


図2 水面孤立波の Q 対 E の分布.

参考文献

- Tanaka, M. 1986, 'The stability of solitary waves.', *Phys. Fluids* 29, pp.650-655.
 Kataoka, T, & Tsutahara, M., in preparation.