社団法人　電子情報通信学会
THE INSTITUTE OF ELECTRONICS,
INFORMATION AND COMMUNICATION ENGINEERS

信学技報
IEICE Technical Report
NLP2007-103 (2007-11)

藤坂博一と大偏差統計解析
～ 2007年8月21日に急逝した藤坂博一博士を偲んで ～

宮崎　修次[†]　井上　政義[††]　小林　幹[†]

[†] 京都大学情報学研究科
[††] 鹿児島大学理学部

あらまし　非線形物理学・非平衡統計力学の分野で大きな業績を上げてきた藤坂博一京大情報学研究科教授が2007年8月21日にくも膜下出血で急逝した．ここでは，大偏差統計解析に焦点をあて，時間変動する力学量の局所平均の大偏差統計特性や二時間相関関数やパワースペクトルの大偏差統計解析の枠組みでの拡張などの彼の過去の研究から，死の直前に公表された大偏差統計解析とレベルダイナミクスを結び付ける研究までを一瞥し，彼の残した問題とその一部に対する答えや今後の展望を述べる．

キーワード　カオス力学系，遷移行列，フロベニウス・ペロン演算子，大偏差統計解析，ギブス測度，レベルダイナミクス

Hirokazu Fujisaka's contributions to large deviation statistics
– dedicated to his memory –

Syuji MIYAZAKI[†], Masayoshi INOUE[††], and Miki U. KOBAYASHI[†]

[†] Graduate School of Informatics, Kyoto University
[††] Faculty of Science, Kagoshima Univsersity

Abstract　Professor Hirokazu Fujisaka (Graduate School of Informatics, Kyoto University), who had produced good achievements in the field of the non-linear physics and nonequilibrium statistical mechanics died suddenly of subarachnoid hemorrhage on August 21, 2007. We focus to large deviation statistics and glance at his past studies including distributions of local averages and generarizations of the two-time correlation functions or power spectra within the framework of large deviation statistics. His antemortem work such as level dynamics approaches to the large deviation statistics is also reviewed. Various issues left by him are discussed.

Key words　Deterministic chaos, Transition matrix, Frobenius-Perron operator, Large deviation, Gibbs measure, Level dynamics

1. はじめに

藤坂博一教授（京都大学大学院情報学研究科複雑系科学専攻複雑系力学講座複雑系数理分野）が２００７年８月２１日早朝，くも膜下出血によって58歳という若さで急逝した．

藤坂は鹿児島県の薩摩半島山川の出身で，１９７１年九州大学理学部物理学科を卒業後，同大学大学院理学研究科に進学し，森肇教授の指導のもとで１９７７年に理学博士の学位を授与された．当時の九大の物理学教室には森肇教授が率いる物性理論研究室と川崎恭治教授が率いる固体理論研究室があった．藤坂は学位取得後，日本学術振興会奨励研究員となり，当時，九州大学工学部応用理学教室の助手であった山田知司九州工業大学名誉教授との共同研究が始まった．出発点は Kraichnan の Direct-Interaction Approximation (DIA) を用いた蔵本ーシバシンスキー方程式の解析だった．山田教授とは死の直前まで共同研究を続けることになる．その中でも，1983年に発表したカオス振動子結合系の同期や脱同期時に見られる間欠性に関する共著論文の引用回数は数百件を越え，日本のカオス研究の中で特に重要な文献となっている．

藤坂が学生として在籍していた頃の森研や川崎研にはその後の非線形物理学・非平衡統計力学の有力な担い手が数多く集まっていた．当時の森研の助手は蔵本由紀京都大学名誉教授で，蔵本モデル，位相縮約など当時の蔵本教授の繰り出す成果に藤坂も強い刺激を受けていた．

その後，藤坂はフンボルト奨学金を得てドイツの Marburg 大学に留学し，Grossmann 教授に師事した．このころ，ドイ

ツでは研究が盛んになり始めたカオスと統計物理の古典的な研究対象である拡散現象を絡ませるような試みが始まっていた．カオス的な一次元写像を用いて，初期点が反復写像によって拡散していく様を示し，その拡散係数を解析的に求めるといった決定論的拡散（カオス的拡散）の先駆的な研究を行った．

帰国後の１９８２年に鹿児島大学理学部講師に着任し，助教授に昇進した．鹿児島大学時代は井上政義教授（現名誉教授）と大偏差統計解析と呼ばれる解析手法を開拓していった．これは確率過程やカオス力学系に従う力学量の局所平均の分布に関する統計解析といえる．公平なコイン投げを例にとろう．表が出たら１，裏が出たら０という得点が与えられるとすると得点の期待値（長時間平均）は 1/2 だが，有限回の試行による平均では局所平均値は 0.45 になったり，0.57 になったり，分布している．極端な場合は n 回立て続けに片方だけが出る場合だが，この確率は $1/2^n = \exp(-n \log 2)$ となり，局所平均０または１に対して，その出現確率が n に依存してどのように早く減衰するかを計る特徴的な量として $\log 2$ という数字が現れる．この量を局所平均の関数として求めたものを揺らぎスペクトルと名づけた．また，局所平均の分布関数の母関数や特性関数を定義し，0.45 や 0.57 といった局所平均をある種の重み付き平均として表現し，揺らぎスペクトル，特性関数，重み付き平均の間にはルジャンドル変換の関係があることを示した．更に，様々な試行錯誤の結果，上記の重み付き平均を二時間相関関数やパワースペクトルに対しても拡張した．この大偏差統計解析の枠組みは平衡統計力学やマルチフラクタル理論と共通の部分が多いのだが，時間相関に関わる量への拡張は藤坂独自のものだといえる．また，この研究は局所リヤプノフ指数（局所軌道拡大率）の揺らぎの解析を中心にしてカオスの統計力学的研究を進めていた当時の森研に強い影響を与えた．

１９８９年に藤坂は古巣の物性理論研究室に助教授として戻った．１９９２年から１年間は日本物理学会九州支部長として学会の運営に寄与した．この頃より，若手研究者の育成に取り組むことになった．また，ドイツからは Wolfram Just 博士が日本学術振興会とフンボルト財団の支援により来日し，上に述べた重み付き平均が Gibbs 測度による平均であることを示すといった共同研究を行った．この頃の研究の主なものは，結合写像系、散逸構造（Turing 構造)、秩序化過程などである．結合写像系における研究においては、個々の振動子は時間的に４周期や８周期といった周期状態にあるが空間的にはそれぞれの位相がランダムな状態で凍結している状態（ダイナミカルガラス）を見出した．散逸構造の研究では、Swift-Hohenberg 方程式を基礎にして拡張した方程式を用いて様々なパターンを見出した．秩序化過程の研究では、一次元異方的 XY スピン系の秩序化過程において Bloch 壁のカイラリティーの果たす役割を明らかにした．

１９９８年４月，京都大学大学院情報学研究科が発足するが，発足と同時に同研究科複雑系科学専攻複雑系力学講座教授に着任した．京大に赴任してからは，非平衡現象，特に，動的相転移と位相ダイナミクスとの関連からパターン形成の研究を行った．動的相転移とは，臨界温度以下の強磁性体に周期磁場を印加した際に，磁化応答の時間振動の対称性の破れが観測される現象である．藤坂は，強い周期外力による決定論的効果が動的相転移の本質を記述すると考えた．そして，ギンツブルグ-ランダウモデルに基づく現象論的アプローチによる理論を展開した．その中で動的相転移においてカオス振動を初めて見出し，周期外力下でのドメイン壁振動の解析を行った．また，有限波数に不安定をもつ系でもパターンの周期外力への応答について研究を行った．反応拡散系などの振動性媒体ではスパイラルやターゲット，進行波などの秩序だったパターンや乱流パターンが観測される．空間各点の振動が大きく乱れていない時，それらの時空パターンは位相だけで記述 (位相縮約) できることが知られている．藤坂は，独自の現象論的な理論展開によって，その位相記述の方法を発展させた．例えば，反応拡散系に対し位相縮約を実行することで，ソフトモード乱流が観測される可能性に初めて言及した．また，振幅自由度が支配的となるとき，位相記述は破綻すると考えられてきたが，そのような状態に対しても有効な“繰り込んだ”位相による記述を見出した．

藤坂は学生との議論を特に好んだ．その中で，上で述べたパターン研究に関し，様々なことを語った．位相ダイナミクスの研究において，『位相そのものでは振動場の本質を記述できない，振幅自由度を繰り込んだ位相といった新たなアイデアが必要だ』と繰り返し藤坂は語っていた．繰り込んだ位相という新たな概念を持ち込み，位相記述の更なる一般化を目指すべく研究に取り組んでいた．動的相転移でのパターン形成の研究では，ランダム外力下でのパターン動力学が進行中であった．また，ランダウ-リフシッツ方程式など，より現実に近いモデルにおける解析を進める予定であった．これまでに見出した結果を磁性体や液晶によって実験的に検証することを目指すなど，非線形科学の新展開を求め精力的に研究を計画していた．

鹿児島大学時代から研究を始めた大偏差統計解析もさらに発展させた．Klages と Dorfman によるフラクタル拡散係数（拡散係数の複雑な制御変数依存性）に関する研究に触発され，拡散現象における拡散粒子の速度の局所平均に関する大偏差統計解析やその制御変数依存性を解明した．

九大時代に習熟していた森の射影演算子法の新たな近似手法も開発した．従来の近似法は連分数展開など面倒な計算を反復して繰り返す必要があった．藤坂は射影する空間を拡張することで，力学量の時間相関をとりこみ，森の一般化ランジュバン方程式の記憶項を無視し，力学量の時間相関関数を連分数展開法と比してはるかに容易に求める手法（マルコフ法）を提案した．また，カオスに埋め込まれた不安定周期軌道を用いて，カオス的に変動する時間相関関数を決定する方法を模索していた．

長年の共同研究者である山田知司九州工業大学名誉教授との最後の共同研究は大偏差統計解析手法を量子カオスと呼ばれる研究分野で開発されたレベルダイナミクスという枠組みに変形するというものであった．これは，２００６年の京都大学大学院情報学研究科の集中講義に招いた中村勝弘大阪市立大学教授の研究に触発されたものだった．

２００７年８月，福岡の奥様のご実家でお盆の休暇を過ごしていたところ，１４日に突然くも膜下出血で倒れ，病院に担ぎ

こまれた．そこでの処置がよかったのか，１６日に一旦意識を回復したが，２０日に再度出血し，２１日午前９時５１分に息を引き取った [1].

本報告では，藤坂の業績の中で大偏差統計解析に焦点をあて，時間変動する力学量の局所平均の大偏差統計特性や二時間相関関数やパワースペクトルの大偏差統計解析の枠組みでの拡張などの彼の過去の研究を振り返る．コイン投げをベルヌイシフトに対応付けることと同じ意味で，離散時間・有限離散状態マルコフ鎖はカオス的な区分線形マルコフ写像に対応付けられ，一般化された確率密度の時間発展演算子はもとのカオス力学系と位相共役の関係にあるカオス力学系の確率密度の通常の時間発展演算子となることを示す．これは，藤坂が残した問題の中の一つの答えである．最後に，遺作の中の一つともいえる，大偏差統計解析におけるレベルダイナミクスについて簡単に触れる．

2. 大偏差統計理論 [2]〜[4]

定常時系列 $\tilde{u}\{s\}$ を時間幅 T にわたってとった平均

$$\overline{u}_T(t)=\frac{1}{T}\int_t^{t+T}\tilde{u}\{s\}\,ds$$

は，T が有限であれば，さまざまな値をとり，分布を持つ．局所平均値 $\overline{u}_T$ の揺らぎの統計分布関数

$$P_T(u)\equiv\langle\delta(\overline{u}_T-u)\rangle=\lim_{T'\to\infty}\frac{1}{T'}\int_0^{T'}\delta(\overline{u}_T(t')-u)\,dt'$$

を考える．これは，定常性のために，$T\to\infty$ では初期条件によらずデルタ関数分布 $P_\infty(u)=\delta(u-\overline{u}_\infty)$, $(\overline{u}_\infty=\langle u\rangle)$ となり，揺らぎは観測されない．

T が $\tilde{u}$ の相関時間よりも十分に長いけれども有限であれば，$P_T(u)\propto \mathrm{e}^{-S(u)T}$ の形を持つと仮定し，

$$S(u)=-\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\log P_T(u)$$

で定義される揺らぎのスペクトル $S(u)$ が存在すると仮定する．

q を可変な実数として，母関数

$$M_q(T)\equiv\langle \mathrm{e}^{qT\overline{u}_T}\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}P_T(u)\mathrm{e}^{qTu}\,du$$

を定義し，

$$\phi(q)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\log M_q(T)$$

で定義される特性関数が存在すると仮定する．

鞍点法により特性関数と揺らぎのスペクトルとの間のルジャンドル変換が得られる．

$$\frac{dS(u)}{du}=q,\quad \phi(q)=-S(u(q))+qu(q)$$

ここで $u(q)$ は $\overline{u}_T$ の重みつき平均である．

$$u(q)=\frac{d\phi(q)}{dq}=\lim_{T\to\infty}\frac{\langle\overline{u}_T\mathrm{e}^{qT\overline{u}_T}\rangle}{M_q(T)}$$

更に，感受率 $\chi(q)=\dfrac{du(q)}{dq}$ は重み付き分散に対応する．

$S(u),\phi(q),u(q),\chi(q)$ を統計構造関数と呼び，時間的な揺らぎの統計熱力学形式を構成する．これらの量によって，揺らぎの静的な特性を捉えることができる．

一方，揺らぎの動的な特性（時間相関）を捉えるために，スペクトル強度の重みつき平均により，一般化 (q 次) スペクトル強度を次のように定義する．

$$I_q(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\times\frac{\left\langle\left|\int_0^T[\tilde{u}\{t+s\}-u(q)]\mathrm{e}^{-i\omega s}ds\right|^2\mathrm{e}^{qT\overline{u}_T}\right\rangle}{M_q(T)}.$$

同様に，一般化二時間相関関数は $C_q(t)=\lim_{T\to\infty}\lim_{\tau\to\infty}\left\langle(\tilde{u}\{t+\tau\}-u(q))(\tilde{u}\{\tau\}-u(q))\mathrm{e}^{qT\overline{u}_T}\right\rangle/M_q(T)$ で与えられる．両者は Wiener-Khintchine の定理により以下の関係で結びついている．$C_q(t)=\int_{-\infty}^{\infty}I_q(\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t}d\omega/(2\pi)$, $I_q(\omega)=\sum_{t=-\infty}^{\infty}C_q(t)\mathrm{e}^{i\omega t}$.

一次元写像 $x_{n+1}=f(x_n)$ により生じる力学量 $\tilde{u}[x_n]$ の統計構造関数や一般化スペクトル密度は，先に現れたフロベニウス・ペロン演算子を一般化し，その固有値問題を解くことで得られる．ここで，$\tilde{u}[x]$ とは x の一意的な関数である．時間的粗視量 $\overline{u}_n=\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\tilde{u}[x_{j+m}]$ に対する母関数 $M_q(n)$ の $n\to\infty$ での漸近形から特性関数 $\phi(q)$ を定めることは既に述べた．但し，粗視量の時間相関は指数関数的に十分早く減衰するものと仮定する．粗視量の分布関数から揺らぎのスペクトル $S(u)$ が得られる．不変密度 $\rho_\infty(x)$ を用いて母関数を表現すると次式を得る．

$$\begin{aligned}M_q(n)&=\int\rho_\infty(x)\exp\left[q\sum_{j=0}^{n-1}\tilde{u}[f^j(x)]\right]dx\\&=\int\mathcal{H}_q^n\rho_\infty(x)dx\end{aligned}$$

ここで，任意関数 $G(x)$ に対して，一般化（q 次）フロベニウス・ペロン演算子を

$$\mathcal{H}_qG(x)=\mathcal{H}[\mathrm{e}^{q\tilde{u}[x]}G(x)]=\sum_k\frac{\mathrm{e}^{q\tilde{u}[y_k]}G(y_k)}{|f'(y_k)|}$$

で定義した ($\mathcal{H}_0=\mathcal{H}$)．ここで，和は $f(y_k)=x$ を満たす全ての解 $y_k(x)$ についてとる．導出には以下の関係式を繰り返し用いた．

$$\begin{aligned}&\mathcal{H}\left\{G(x)\exp\left[q\sum_{j=0}^{m}\tilde{u}[f^j(x)]\right]\right\}\\&=(\mathcal{H}_qG(x))\exp\left[q\sum_{j=0}^{m-1}\tilde{u}[f^j(x)]\right]\end{aligned}$$

従って，特性関数 $\phi(q)$ は $\mathcal{H}_q$ の最大固有値 $\nu_q^{(0)}$ と以下の関係式で結ばれる．

$$\phi(q)=\log\nu_q^{(0)}$$

また，一般化スペクトル強度は以下のように与えられる．

$$\begin{aligned}I_q(\omega)=&\int v_{(0)}(x)[\tilde{u}[x]-u(q)]\\&\times[J_q(\omega)+J_q(-\omega)-1]\\&\times[\tilde{u}[x]-u(q)]h^{(0)}(x)dx\end{aligned}$$

ここで，$J_q(\omega) = 1/\left[1 - (e^{i\omega}/\nu_q^{(0)})\mathcal{H}_q\right]$ で，$v_{(0)}(x)$ と $h^{(0)}(x)$ は最大固有値 $\nu_q^{(0)}$ に対応する $\mathcal{H}_q$ の左固有関数と右固有関数である．一般化二時間相関関数は $C_q(t) = \int v^{(0)}(x)[\tilde{u}[x] - u(q)][H_q/\nu_q^{(0)}]^t[\tilde{u}[x] - u(q)]h^{(0)}(x)dx$ で与えられる．

$\mathcal{H}$ が写像の特徴しか含まないのに対して，$\mathcal{H}_q$ は観測する力学量に依存し，その力学量に対応する統計構造関数や一般化スペクトル強度を与える．局所拡大率 $u[x] = \log|f'(x)|$ の場合は，次のようになる．

$$\mathcal{H}_q G(x) = \sum_k \frac{G(y_k)}{|f'(y_k)|^{1-q}}$$

藤坂らは，局所軌道拡大率の揺らぎを統計構造関数や一般化スペクトル強度を用いて解析することで，タイプI間欠性や変調間欠性といった間欠性の強いカオスの特徴付けに成功している．$q \to -\infty$ はラミナー相，$q \to \infty$ はバースト相に対応する．このように重みの指標 q を変えることで，異なる運動形態が取り出されることを q-相転移と呼ぶ．一般化スペクトル強度は，タイプI間欠性においては，ラミナー相では包絡線が逆冪則，バースト相では白色雑音型となる [5]．変調間欠性においては，ラミナー相では二つの特徴的な振動数の間で逆冪則 $(1/\sqrt{\omega})$，バースト相ではローレンツ型となる．[6]

また，熱拡散のようにランダムな要素を含まない，カオス力学系から生じる決定論的拡散 [7], [8] の速度の粗視量の大偏差統計理論に基づく解析を行うことができる [9]．平均値から大きくずれた弾道的運動の速度の制御変数依存性をグラフに表すと悪魔の階段が現れるという興味深い結果を得られる．q の違いにより，平均的な右往左往する軌道と弾道的軌道の統計特性を個別に捉えたことになる [10]．

遷移行列 $H = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ で記述される二状態離散時間のマルコフ過程を例にとろう．これは特殊なコイン投げに対応し，表が出たら次は必ず裏が出，裏が出たら次は等確率で表か裏が出る場合にあたる．遷移行列の最大固有値は常に 1 となる．最大固有値に対する右固有ベクトル h $(Hh = h)$ は表と裏の定常な出現頻度を与え，左固有ベクトル v $(vH = v)$ の要素は全て等しい $(v_1 = v_2)$．後者は遷移行列の列ごとの和が必ず 1 になることによる．

公平なコイン投げとベルヌイシフトを対応させることと同じ意味で，この確率過程と同等の統計的性質を持つカオス力学系を与えることができる．単位区間 $I = [0, 1)$ から I への区分線形写像 f が $f(I_1) = I_2$ と $f(I_2) = I_1 \cup I_2$ を満たすとする．ここで，$I_1 = [0, 1/2)$，$I_2 = [1/2, 1)$ で，f は $f(x) = x + 1/2$ $(0 \leqq x < 1/2)$, $2x - 1$ $(1/2 \leqq x \leqq 1)$ であらわに与えることができる．先に与えた遷移行列は隣接行列と対角行列の積で書ける．後者の対角成分がカオス的な区分線形写像の傾きの絶対値の逆数と一致することに注意しておく．このカオス力学系による軌道の区間 I_1 と I_2 の訪問確率の時間発展はフロベニウス・ペロン演算子で与えられるが，適当な基底を選ぶことで，前述の遷移行列と全く同じもので表現できる．この場合，最大固有値 1 に対する右固有ベクトルの要素はそれぞれの区間の訪問確率密度に比例し，左固有ベクトルの要素がそれぞれの区間の幅に比例している．左固有ベクトルの要素が区間幅そのものになるように規格化すると，$v = (1/2, 1/2)$ となる．左右の固有ベクトルの要素の積がそれぞれの状態の訪問確率に一致するように，右固有ベクトルを規格化すると，$h = (4/3, 2/3)$ を得る．このとき，右固有ベクトルは訪問確率密度に対応する．

表，裏が出たときに与えられる得点や軌道が区間 I_1, I_2 に含まれたときにそれぞれ定義される力学量 $\tilde{u}(I_1) = u_1$, $\tilde{u}(I_2) = u_2$ の時間変動に関する揺らぎを捉える一般化遷移行列，一般化フロベニウス・ペロン行列は $H_q = \begin{pmatrix} 0 & e^{qu_2}/2 \\ e^{qu_1} & e^{qu_2}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{qu_1} & 0 \\ 0 & \frac{e^{qu_2}}{2} \end{pmatrix}$ で与えられる．最大固有値 $\nu_q^{(+)}$ と第二固有値 $\nu_q^{(-)}$ は

$$\nu_q^{(\pm)} = \frac{e^{qu_2}}{4} \pm \frac{e^{qu_2}}{4}\sqrt{1 + 8e^{q(u_1-u_2)}},$$

となり，それぞれの左右の固有ベクトル $\begin{pmatrix} h_1^{(\pm)}(q) \\ h_2^{(\pm)}(q) \end{pmatrix}$, $(v_1^{(\pm)}(q)\, v_2^{(\pm)}(q))$ は

$$v_1^{(\pm)}(q) = \frac{e^{qu_1}}{e^{qu_1} + \nu_q^{(\pm)}}, \qquad v_2^{(\pm)}(q) = \frac{\nu_q^{(0)}}{e^{qu_1} + \nu_q^{(\pm)}},$$

$$h_1^{(\pm)}(q) = \frac{e^{qu_2}(e^{qu_1} + \nu_q^{(\pm)})}{e^{q(u_1+u_2)} + 2[\nu_q^{(\pm)}]^2},$$

$$h_2^{(\pm)}(q) = \frac{2\nu_q^{(\pm)}(e^{qu_1} + \nu_q^{(\pm)})}{e^{q(u_1+u_2)} + 2[\nu_q^{(\pm)}]^2}$$

で与えられ，$v_1^{(\pm)}(q) + v_2^{(\pm)}(q) = 1$ and $h_1^{(\pm)}(q)v_1^{(\pm)}(q) + h_2^{(\pm)}(q)v_2^{(\pm)}(q) = 1$ を満たす．動的構造関数の特性関数は $\phi(q) = \log \nu_q^{(+)}$ で与えられ，重み付き平均 $u(q) = \dfrac{d\phi(q)}{dq}$ は

$$u(q) = u_2 + \frac{u_1 - u_2}{2}\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{1 + 8e^{q(u_1-u_2)}}}\right).$$

となり，漸近挙動は $u_2 - u_1$ の符号に依存する．$u_1 < u_2$ $(u_1 > u_2)$ では，$u(\infty) = u_2$ $\left(u(\infty) = \dfrac{u_1 + u_2}{2}\right)$，$u(-\infty) = \dfrac{u_1 + u_2}{2}$ $(u(-\infty) = u_2)$ となる．規格化した重み付き平均 $U(q) \equiv \dfrac{u(q) - u(-\infty)}{u(\infty) - u(-\infty)}$ と規格化した重み付き分散 $\sigma(q) \equiv \dfrac{\chi(q)}{(u(\infty) - u(-\infty))^2}$ を定義すると，$0 < U < 1$ となる．具体的には

$$U(q) = \frac{1}{\sqrt{1 + 8e^{-Q}}}, \quad (u_1 < u_2),$$

$$U(q) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 8e^{Q}}}, \quad (u_1 > u_2),$$

$$\sigma(q) = 8e^{-Q}\left(1 + 8e^{-Q}\right)^{-3/2}, \quad (u_1 < u_2)$$

$$\sigma(q) = 8e^{Q}\left(1 + 8e^{Q}\right)^{-3/2}, \quad (u_1 > u_2)$$

で与えられ，規格化された重みの指標は $Q \equiv 2q(u(\infty)-u(-\infty))$ で与えられる．揺らぎスペクトルは

$$S(U) = \frac{U}{2}\log\frac{8U^2}{1-U^2} + \frac{1}{2}\log\frac{2(1-U)}{1+U}, \quad (u_1 < u_2),$$

$$S(U) = \frac{U}{2}\log\frac{1-(1-U)^2}{8(1-U^2)} + \log\frac{4(1-U)}{2-U}, \quad (u_1 > u_2).$$

となる．長時間平均値近傍で二次の項まで展開すると中心極限定理が得られる．規格化した平均値は $U_0 \equiv \frac{u(0)-u(-\infty)}{u(\infty)-u(-\infty)}$ となり，$u_1 < u_2$ $(u_1 > u_2)$ で，$U_0 = 1/3$ $(2/3)$ となる．いずれの場合も，中心極限定理を表す二次関数は $S_{CLT}(U) = \frac{27}{16}(U-U_0)^2$ となり，長時間平均値から外れるほど，揺らぎスペクトルの中心極限定理からのずれは大きくなる．

一般化二時間相関関数 $C_q(t)$ は $C_q(t) = K_q \exp[-(\gamma_q + i\pi)t]$ となる．ここで，

$$\gamma_q = \log\frac{\sqrt{1+8e^{q(u_1-u_2)}}+1}{\sqrt{1+8e^{q(u_1-u_2)}}-1},$$

$$K_q = [v_1^{(+)}(u_1-u(q))h_1^{(-)} + v_2^{(+)}(u_2-u(q))h_2^{(-)}] \times[v_1^{(-)}(u_1-u(q))h_1^{(+)} + v_2^{(-)}(u_2-u(q))h_2^{(+)}]$$

である．振動する因子 $\exp[-i\pi t] = (-1)^t$ は不安定な二周期軌道を表す．

3. Gibbs 測度と位相共役変換 [11]

藤坂らは大偏差統計解析を行うために遷移確率やフロベニウス・ペロン演算子を拡張した H_q, $\mathcal{H}_q$ を導入したが，その演算子がもとのカオス力学系・確率過程と何らかの関係している別のカオス力学系・確率過程の確率密度の時間発展を表すか否かの問題を明らかにするには至らなかった．

平衡統計力学の数学的定式化において現れる熱力学的形式 [12] や力学系のエルゴード理論 [13], [14] においては，変分原理 [15] $P_f(\varphi) = \sup\left(h_\mu(f) + \int \varphi\, d\mu\right)$ がよく現れる．ここで，φ は区分的に連続な関数を表し，$h_\mu(f)$ は Kolmogorov-Sinai エントロピーを表し，極値は Gibbs 測度とよばれる測度 μ_φ で実現され，これは，選んだ関数 φ に依存する．今後，双曲的な一次元写像で与えられる力学系を考えることにする．トポロジカル・プレッシャー $P_f(\varphi)$ は複数の解析的なブランチを持ち，それらは Gibbs 測度 μ_φ で区別される不変集合の異なる局所構造に対応する [13], [16], [17]．トポロジカル・プレッシャー $P_f(\varphi)$ と特性関数 $\phi(q)$ は，$\varphi = qu - \log|f'|$ とおくことで同一視できる．前述の簡単な例では，Gibbs 測度は $h_1^{(+)}(q)v_1^{(+)}(q)$, $h_2^{(+)}(q)v_2^{(+)}(q)$ に対応する．

H_q の各要素を最大固有値 $\nu_q^{(+)}$ で割った行列 $H_q/\nu_q^{(+)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{e^{qu_2}}{2\nu_q^{(+)}} \\ \frac{e^{qu_1}}{\nu_q^{(+)}} & \frac{e^{qu_2}}{2\nu_q^{(+)}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{e^{qu_1}}{\nu_q^{(+)}} & 0 \\ 0 & \frac{e^{qu_2}}{2\nu_q^{(+)}} \end{pmatrix}$ は最大固有値 1 を持つ．$q=0$ の通常の遷移行列を隣接行列と対角行列の積に書いたときに，後者の対角成分が対応する区分線形写像の傾きの逆数であったことを思い起こそう．$H_q/\nu_q^{(+)}$ を同様に隣接行列と対角行列の積の形に書いたとき，後者の対角成分を新たな区分線形写像 $\tilde{f}$ の個々の傾きの逆数に対応させよう．これは以下のようにあらわに書き下すことができる．

$$\tilde{f}(x;q,u) = \begin{cases} \frac{1-a}{a}x + a, & \left(x \in \tilde{I}_1 = [0,a)\right), \\ \frac{1}{1-a}(x-1)+1, & \left(x \in \tilde{I}_2 = [a,1)\right). \end{cases}$$

ここで，$a = \frac{e^{qu_1}}{e^{qu_1}+\nu_q^{(+)}}$ である．$[0,1) = \tilde{I}_1 \cup \tilde{I}_2$，$\tilde{I}_1 \cap \tilde{I}_2 = \phi$，$\tilde{f}(\tilde{I}_1) = \tilde{I}_2$，$\tilde{f}(\tilde{I}_2) = \tilde{I}_1 \cup \tilde{I}_2$ が成り立つことから，$\tilde{f}$ は f と同じマルコフ分割の条件を満たしている．両者とも隣接行列の部分を共通にしているので，この意味で $\tilde{f}$ は f と位相共役の関係にあるといってもよい．

$u_1 < u_2$ の場合に限定し，その例として力学量 $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ の揺らぎを考察しよう．定常訪問確率密度，定常訪問確率は力学量によらず，それぞれ，$h_1^{(+)}(0) = 4/3$, $h_2^{(+)}(0) = 2/3$, $h_1^{(+)}(0)v_1^{(+)}(0) = 2/3$, $h_2^{(+)}(0)v_2^{(+)}(0) = 1/3$ で与えられる．上に定めた力学量の場合，$q \to +\infty$ $(-\infty)$ の極限をとると，重み付き平均 $u(q) = v_1^{(+)}(q)u_1h_1^{(+)}(q) + v_2^{(+)}(q)u_2h_2^{(+)}(q)$ は最大（最小）の力学量の局所平均に等しく，$u(+\infty) = 1$, $u(-\infty) = 1/2$ となる．これらはそれぞれ元のカオス写像 f の時系列 $\tilde{u}: 111\cdots$ に対応し，局所平均 1 を与える不安定固定点，時系列 $010101\cdots$ に対応し，局所平均 1/2 を与える不安定二周期点に関連付けられる．$q \to +\infty$ の極限をとると，$\tilde{I}_2$ は $[0,1)$ に近づき，$\tilde{I}_1$ の幅は 0 に近づく．$x \in \tilde{I}_2$ では $\tilde{f}(x;q,u) \to x$ となり，$[0,1)$ の全ての点が中立安定となる．二回写像 $\tilde{f} \circ \tilde{f}$ は

$$\tilde{f}\circ\tilde{f}(x;q,u) = \begin{cases} \frac{x}{a}, & \left(x \in \tilde{I}_1 = [0,a)\right), \\ \frac{x-1}{a} + \frac{1-a+a^2}{a}, & \left(x \in \tilde{I}_{21} = [a, 1-(1-a)^2)\right), \\ \frac{x-1}{(1-a)^2}+1, & \left(x \in \tilde{I}_{22} = [1-(1-a)^2, 1)\right) \end{cases}$$

で与えられ，$q \to -\infty$ の極限をとると，$\tilde{I}_1$ は $[0,1)$ に近づき，$\tilde{I}_{21}$ と $\tilde{I}_{22}$ の幅は 0 に近づく．$x \in \tilde{I}_1$ では，$\tilde{f}(x;q,u) \to x$ となり，$[0,1)$ の全ての点は中立安定な二周期点となる．

このように不変集合の異なる局所構造が異なる Gibbs 測度で捉えられる．あるカオス力学系 f に対して，様々な Gibbs 測度が存在する．その中のある一つの Gibbs 測度 $(v_1^{(+)}(q)h_1^{(+)}(q), v_2^{(+)}(q)h_2^{(+)}(q))$ に対して，もとの力学系 f と位相共役な力学系 $\tilde{f}$ を適当に選ぶと，その自然な確率測度 $(\tilde{v}_1^{(+)}(0)\tilde{h}_1^{(+)}(0), \tilde{v}_2^{(+)}(0)\tilde{h}_2^{(+)}(0))$ が上記の Gibbs 測度と同じにすることができる．

ここまで二状態の特殊な例について説明したが，任意の状態に対しても同様のことが証明できる．カオス的な区分線形マルコフ写像 f のフロベニウス・ペロン行列 H_0 は隣接行列 A と対角行列 W_0 の積の形で $H_0 = AW_0$ のように書け，$(W_0)_{ii} = 1/|f'(I_i)|$ となる．力学量 $u(I_i)$ の揺らぎを解析する一般化されたフロベニウス・ペロン行列を最大固有値で割ったもの H_q/ν_q も隣接行列 A と対角行列の積の形で $H_q/\nu_q = AW_q$ のように書け，$(W_q)_{ii} = \exp(q\tilde{u}(I_i)/(|f'(I_i)|\nu_q)$ となる．この行列の最大固有値 1 に対する左固有ベクトル v は $vAW_q = v$ を満たす．$v_i = (vAW_q)_i = \sum_j v_j(AW_q)_{ji} = \sum_{j,k} v_jA_{jk}(W_q)_{ki}\delta_{ki} = (\sum_j v_jA_{ji})(W_q)_{ii} = (vA)_i(W_q)_{ii}$ と変形できる．f と位相共役

な区分線形マルコフ写像を g とすると，マルコフ分割の小区間 $\tilde{I}_i$ における g の傾きは $|g'(\tilde{I}_i)| = (vA)_i/v_i$ であり，これが $(W_q)_{ii}^{-1}$ に等しいことを示すことができる．

ここで例に挙げたコイン投げのような簡単な確率過程は，容易に対応するカオス的区分線形マルコフ写像を書き下すことができるが，一般の有限離散状態・離散時間のマルコフ鎖に対するカオス的区分線形マルコフ写像はカルマン写像と呼ばれ，その構成法も知られている [18]〜[20]．従って，このような確率過程はカオス力学系に対応付けることができ，局所的な大きな揺らぎに対応する局所平均を長時間平均にするような新しいカオス力学系を元の力学系の位相共役変換から導くことができる．このような確率過程とカオス力学系の関係がどこまで拡張されるのか，興味深い問題である．

藤坂らは H_q, $\mathcal{H}_q$ を何らかの自然な時間発展演算子としてあらわに与えることはなかったが，ここで明らかにしたように，藤坂らが大偏差統計解析の枠組みで一般化した確率密度の時間発展演算子はもとの力学系と位相共役の関係にある力学系の確率密度の自然な時間発展演算子であることがわかった．

グラフ・ネットワークを前節と本節で説明した大偏差統計解析を用いて研究する試みが始まっている [11], [21]．

4. 大偏差統計解析におけるレベルダイナミクス

藤坂と山田は q を仮想時間とし，H_q の固有値と固有ベクトルの従う，q についての連立微分方程式（運動方程式）を導いた [22]．$q = 0$ での通常の遷移行列やフロベニウス・ペロン行列の固有値，固有ベクトルを初期値とし，$q \neq 0$ での H_q の固有値と固有ベクトルを求める形式となっており，レベルダイナミクスと呼ばれる．レベルというのは量子力学のエネルギー準位などに相当しており，これまでは量子力学の演算子の行列表現に対して，研究がなされてきた．

前節で用いた二状態の例について，具体的に運動方程式を書き下すと，$\dfrac{d\nu_q^{(n)}}{dq} = V_{nn}$, $\dfrac{dV_{mn}}{dq} = \displaystyle\sum_{k(\neq m)} \frac{V_{mk}V_{kn}}{1-\nu_q^{(k)}/\nu_q^{(m)}} + \sum_{k(\neq n)} \frac{V_{mk}V_{kn}}{\nu_q^{(n)}/\nu_q^{(k)}-1}$, $\dfrac{d\mathbf{h}^{(n)}(q)}{dq} = \displaystyle\sum_{k(\neq n)} \frac{V_{kn}}{\nu_q^{(n)}/\nu_q^{(k)}-1}\mathbf{h}^{(k)}(q)$, $\dfrac{d\mathbf{v}^{(m)}(q)}{dq} = \displaystyle\sum_{k(\neq m)} \frac{V_{mk}}{1-\nu_q^{(k)}/\nu_q^{(m)}}\mathbf{v}^{(k)}(q)$ となる．ここで，$V_{mn} = \mathbf{v}^{(m)}(q)\begin{pmatrix}\exp(qu_1) & 0 \\ 0 & \exp(qu_2)\end{pmatrix}\mathbf{h}^{(n)}(q)$ であり，$\mathbf{h}^{(n)}(q) = \binom{h_1^{(n)}(q)}{h_2^{(n)}(q)}$, $\mathbf{v}^{(n)}(q) = (v_1^{(n)}(q), v_2^{(n)}(q))$, $\mathbf{h}^{(1)}(q) = \mathbf{h}^{(+)}(q)$, $\mathbf{h}^{(2)}(q) = \mathbf{h}^{(-)}(q)$, $\mathbf{v}^{(1)}(q) = \mathbf{v}^{(+)}(q)$, $\mathbf{v}^{(2)}(q) = \mathbf{v}^{(-)}(q)$, $\nu_q^{(1)} = \nu_q^{(+)}$, $\nu_q^{(2)} = \nu_q^{(-)}$ である．

二状態の離散時間のマルコフ鎖でも，このような非線形性の強い連立微分方程式となり，状態数が増えると解析解を求めることは不可能となる．数値解を求める場合も，状態数の二乗程度の変数の連立非線形微分方程式の初期値問題を解くことになり，直接 H_q の固有値問題を解いた方が早い．現時点では，解析的な取り扱いでも，数値解析においても大偏差統計解析のレベルダイナミクスを使う利点は見出せないが，何か保存量のようなものが隠れていないかといった原理的な興味がある．藤坂の残した一つの大きな宿題であろう．

レベルダイナミクスと前節の位相共役変換との関連の有無や，最近接準位間隔分布のような固有値の従う準位統計が確率行列の場合はどうなるのかという点なども興味深い問題である．

謝辞　本報告は文部科学省の 21 世紀 COE プログラム（動的機能機械システムの数理モデルと設計論 ー複雑系の科学による機械工学の新たな展開ー）の支援を受けた．本報告をあまりにも早く逝った藤坂博一に捧げる．

文　献

[1] 藤坂博一の原著論文の一覧は以下のＵＲＬにある．
http://wwwfs.acs.i.kyoto-u.ac.jp/~fujisaka/EIBUN.htm

[2] 藤坂博一, 非平衡系の統計力学, (1998) 産業図書.

[3] H. Fujisaka and M. Inoue, Prog. Theor. Phys. **77**, 1334 (1987); Phys. Rev. A **39**, 1376 (1989).

[4] H. Fujisaka and H. Shibata, Prog. Theor. Phys. **85**, 187 (1991).

[5] T. Kobayashi, H. Fujisaka, and W. Just, Phys. Rev. E **47**, 3196 (1993).

[6] H. Fujisaka and T. Yamada, Prog. Theor. Phys. **90**, 529 (1993).

[7] S. Grossmann and H. Fujisaka, Phys. Rev. A **26**, 1779 (1982).

[8] H. Fujisaka and S. Grossmann, Z. Phys. B **48**, 261 (1982).

[9] H. Fujisaka and M. Inoue, J. Phys. Soc. Jpn. **70**, 2283 (2001).

[10] M. Yoshida, S. Miyazaki, and H. Fujisaka, Phys. Rev. E **74**, 026204 (2006).

[11] S. Miyazaki, Springer new series *Studies in Computational Intelligence*, **56**, *Emergent Intelligence of Networked Agents*, 129 (2007).

[12] Ya. G. Sinai, Usp. Math. Nauk. **27**, 21 (1972); D. Ruelle, Am. J. Math. **98**, 619 (1976); D. Ruelle, Thermodynamical Formalism, Encyclopedia of Mathematics and its applications, Vol. 5 (Addison-Wesley, Reading,1978); R. Bowen, Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms, Lecture Notes in Mathematics, vol. 470, (Springer, Berlin, 1975).

[13] H. Mori, H. Hata, T. Horita and T. Kobayashi, Prog. Theor. Phys. Suppl. No. 99, 1 (1989).

[14] J. P. Eckmann and I. Procaccia, Phys. Rev. A **34**, 659 (1986); G. Paradin and A. Vulpiani, Phys. Rep. **156**, 147 (1987); P. Grassberger, R. Badii and A. Politi, J. Stat. Phys. **51**, 135 (1988); D.Bessis, G.Paradin, G. Turchetti and S. Valenti, J. Stat. Phys. **51**, 109 (1988).

[15] P. Walters, An Introduction to Ergodic Theory (Springer, Berlin, 1982).

[16] M. J. Feigenbaum, I. Procaccia and T. Tel, Phys. Rev. A **39**, 5359 (1989).

[17] W. Just and H. Fujisaka, Physica D **64**, 98 (1993).

[18] R. E. Kalman, *Proc. Symp. Nonlinear Circuit Analysis VI*, 273 (1956).

[19] T. Kohda and H. Fujisaki *IEICE Trans. Fundamentals*, **E82-A**, 1747 (1999).

[20] M. U. Kobayashi, H. Fujisaka, and S. Miyazaki, Phys. Rev. E, **76**, 046205 (2007).

[21] Syuji Miyazaki, IPSJ Journal, **47**, 795 (2006); Springer LNAI series **4012** *New Frontiers in Artificial Intelligence* 261 (2006); Prog. Theor. Phys. Suppl. No.162, 147 (2006).

[22] H. Fujisaka and T. Yamada, Phys. Rev. E **75**, 031116 (2007).