A Construction of Quandles associated with Quadratic Algebras
（カンドルのある構成）

Noriaki Kamiya （神谷徳昭）
Department of Mathematics, University of Aizu, Japan（会津大学）

Abstract This note is to give exmaples of quandles (or rack) in knot theory from quadratic algebras, and to deal with related topics associated with the quandles.

§ Introduction（はじめに）

非結合的代数系を研究している筆者が最近考えた quandle の実例を与えることが，この小論の目的です．浅学の為にもしかしたらこの方面の knot theory においては，知られた事実かも知れませんが，計算機科学と関連する事柄を含め，代数系の立場から新しい idea として述べさせていただきます．

非結合的代数系については [K-O] の文献が 2 次代数，合成代数そして，それらの一般化について述べてあり，$\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}]$, $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}]$ 等の内積 $<\ ,\ >$ （又は $\| x \|$, ノルム）を考える上で役に立つかも知れません，しかし直接，それらの結果を使うわけではないです．特に quandle の応用を研究するのに興味ある人々には，積が standard なものではないので，共役元（一般に involution をもつ積）で考えるこの小論が役に立つ可能性があると思われます．計算機科学からの視点も含め，ここに述べさせていただきます．

§1. Preliminary（準備と定義）

集合 $\mathbf{M}$ とそこでの bijective なる乗法 $\circ$ が与えられたとき（つまり $R_x y = y \circ x$ と置く時，R_x が bijective)，次の条件 1 ）と 2）を満たす $(\mathbf{M}, \circ)$ を quandle と言います．

1) $x \circ x = x$

2) $(x \circ y) \circ z = (x \circ z) \circ (y \circ z)$ for any $x, y, z \in \mathbf{M}$.

2) の条件は rack の条件です．これらは knot theory の用語です．

ここで $x * y = y \circ x$ と new product を定義すると，

3) $x * x = x$

4) $x * (y * z) = (x * y) * (x * z)$

と書き直すことができます．そして $S_x y = x * y$ と表すと．

⊙ $S_x x = x$

⊙ $S_x S_y = S_{S_x y} S_x$ (S_x が自己同型写像を表す関係式）

となり，(M, S_x) は s-mainifold とも関連します．この $\{S_x\}$ を s-map, M を s-set と呼ぶことにします（すなわち，これは generalized symmetric space の代数的概念とも一脈通じます)．勿論，M と S_x の多様体としての条件等を付け加えての議論ですが，ここでは詳しい議論には進みませんが，微分幾何学的な事柄とも関連することに留意してください．

一方 homogeneous presystem $\eta(x,y,z)$ の概念で $\eta(x,x,y) = S_x y = x * y$ とすると，$\eta(a,b,\eta(x,y,z)) = \eta(\eta(a,b,x),\eta(a,b,y),\eta(a,b,z))$ が自己同型写像の概念となり，homogeneous presystem と S_x の理論とが関係します．これらについて詳しくは後述の参考文献 [K-S.1], [K-S.2] を参照して下さい．

この小論では 1) と 2) は 3) と 4) と同値ですので，3) と 4) を満たす乗法 $*$ をもつ代数系で考察します．つまり，乗法をもつある集合の中で，$\lambda * \lambda = \lambda$ の元 λ を見つけることです．以上の事から 3) と 4) を満たす S_x を s-map，M を s-set と呼ぶことにしています（微分構造は仮定しません．乗法のみ仮定した代数系を考えます）．

§2. Results（主要定理）

$1 < q < r < p$, p を素数，q, r を自然数，$qr \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$ かつ q と r のいずれも平方数でないとする．例えば $p = 5,\ q = 2,\ r = 3,\ p = 7,\ q = 3,\ r = 5, p = 11, q = 7, r = 8$ 等の対 $(p,\ q,\ r)$ を考える．そして，有限体 $\mathbf{Z}_p = \mathbf{Z}/(p)$ 上の $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q},\sqrt{r}]$ を考察する（以下この条件で考えます）．積は $xy = (m + n\sqrt{q} + l\sqrt{r})(m' + n'\sqrt{q} + l'\sqrt{r})$，共役元は $\overline{x} = m - n\sqrt{q} - l\sqrt{r}$ if $x = m + n\sqrt{q} + l\sqrt{r}$ です（この積を standard product と呼ぶことにします）．

ここで内積（ノルム）を次の様に定義します．

$$\| x \| = \sqrt{< x, x >}, \text{ and } < x, y > = \frac{1}{2}(x\overline{y} + y\overline{x}).$$

勿論有限体 $\mathbf{Z}_p$ 上での 2 次代数です．つまり $1, x, x^2$ が 1 次従属であり，つまり $xx - (x + \overline{x})x + \overline{x}x = 0$ となります．又合成代数の性質 $\| xy \| = \| x \| \| y \|$ も成立します．しかしここで $\| x \|^2 = < x, x > = x\overline{x} \in \mathbf{Z}_p$ です．つまり $< xy, xy > = < x, x > < y, y >, < x, y > = < y, x >$ です．

これらの準備のもとで，以下の議論の為に

$M_2(p,q,r) := \{ \begin{pmatrix} m & nq + l \\ n + lr & m \end{pmatrix} | m, n, l \in \mathbf{Z}_p \}$

$GL(M_2(p,q,r)) := \{A \in M_2(p,q,r) | \det\ A \neq 0\}$,

$SL(M_2(p,q,r)) := \{A \in M_2(p,q,r) | \det\ A = 1\}$,

$N(p,q,r) := \{x \in \mathbf{Z}_p[\sqrt{q},\sqrt{r}] |\ \| x \| = 1\}$

なる記号を導入し，用いることにします．

定理 1 （行列式とノルムの関係） 上記の記号のもとで

$\phi : \mathbf{Z}_p[\sqrt{q},\sqrt{r}] \to M_2(p,q,r)$ (as algebra, ϕ is a homomorphism)

$\mathbf{Z}_p[\sqrt{q},\sqrt{r}]^{\times} \cong GL(M_2(p,q,r))$ (as group)

$N(p,q,r) \cong SL(M_2(p,q,r))$ (as group)

が成り立つ．

証明 $x = m + n\sqrt{q} + l\sqrt{r}$ と $A = \begin{pmatrix} m & nq + l \\ n + lr & m \end{pmatrix}$ が $\mathbf{Z}_p$ 上準同型，そして

$$\| x \|^2 = < x, x > = m^2 - n^2 q - l^2 r - 2nl = \det\ A$$

が成り立つので，$\| x \|= 1$ と $\det A = 1$ の同値性が示せます．勿論 $< x, x > \geq 0$ の為に，標数 p で考え，well-defined は仮定します．□

Remark. $\exists (n, l) \in \mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p, \text{s.t. } nq + l \equiv 0 \pmod p$ and $n + lr \equiv 0 \pmod p$ が $Ker\ \phi$ の元を生成します（$m = 0$ のとき）．$nq + l$ と $(nq + l)r$ より $\dim \mathrm{Ker}\ \phi = 1$.

Remark. $SL(M_2(p, q, r)) \lhd GL(M_2(p, q, r))$.（正規部分群）

$$\tilde{Q}(N(p, q, r)) := \{\lambda \in N(p, q, r) | \lambda\lambda = \overline{\lambda},\ \lambda \text{ is invertible}\},$$

と $\tilde{Q}(N(p, q, r))$ を定義します（weak quandle の原型です）.

$$x * y = \overline{xy}$$

によって new product を導入すると，この積 $*$ で $\lambda\lambda = \overline{\lambda}$ は $\lambda * \lambda = \lambda$ と表せます．

Remark $(\sqrt{< \lambda, \lambda >})^2 = \| \lambda \|^2 = \lambda\overline{\lambda}$ なので
$\tilde{Q}(N(p, q, r)) \ni \lambda$ が invertible $_{iff} <=> \| \lambda \| \neq 0$.
つまり $\lambda \frac{\overline{\lambda}}{<\lambda, \lambda>} = 1$ if $< \lambda, \lambda > \neq 0$ より λ はinvertible です．更に $\lambda^2 = \overline{\lambda}$ より $\| \lambda^2 \| = \| \lambda \|$ かつ $\| \lambda \| \neq 0$ ならば，$\| xy \| = \| x \| \| y \|$ が $\forall x, y \in \mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}]$ で成り立つので，$\| \lambda \|^2 = \| \lambda \| \| \lambda \|$ から $\| \lambda \|^2 = \| \lambda \| \in \mathbf{Z}_p$. $\| \lambda \| \neq 0$ のとき，$\| \lambda \| = 1$. これらより，λ が invertible, かつ $\lambda^2 = \overline{\lambda}$ のとき，ノルム 1 の元で，$\tilde{Q}(N(p, q, r))$ を考えることが可能です．ここで，λ が 0 でなくても $\| \lambda \| = 0$ となるノルム 0 の元 λ が存在することに留意して下さい（内積 $< , >$ が非退化とは限りません）．単位元も存在しません（$1 * x = \overline{x}$）．つまり，次の集合が定義可能です．

$$\tilde{Q}(\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}] := \{\lambda \in \mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}] | \lambda * \lambda = \lambda.\ \lambda : \text{invertible}\}.$$

これを $\tilde{Q}$ と略して weak quandle と呼ぶ．一般にこれは $*$ の乗法で閉じていません．

次に $Q_\lambda := \{\lambda \in \tilde{Q} | 1, \lambda, \overline{\lambda}\}$ と Q_λ を定義する．ただし Q_λ の λ は 1 つ固定する．以上の記号のもとで，次の事が成り立つ．

定理 2.（カンドルの構成） Q_λ は quandle であり，$\tilde{Q} = \cup_{\lambda * \lambda = \lambda} Q_\lambda$
（つまり（$\lambda * \lambda = \lambda$ を満たす λ により定義される Q_λ 達の和集合）が成り立つ．勿論，$\cap_{\lambda * \lambda = \lambda} Q_\lambda = \{1\}$（共通集合は 1 のみです）．

（証明） $Q_\lambda \ni {}^\forall \lambda$ に対して

$$\lambda * \lambda = \lambda,\ \overline{\lambda} * \overline{\lambda} = \overline{\lambda}.\ 1 * 1 = 1,\ \lambda * (\lambda * \lambda) = (\lambda * \lambda) * (\lambda * \lambda),$$

and

$$\overline{\lambda} * (\lambda * \lambda) = (\overline{\lambda} * \lambda) * (\overline{\lambda} * \lambda), 1 * (\lambda * \lambda) = (1 * \lambda) * (1 * \lambda)$$

これらの関係式より $1, \lambda, \overline{\lambda}$ のそれぞれが，カンドルの性質３）と４）を満たすことを示せばよいのです．そして $\tilde{Q}$ は $\lambda * \lambda = \lambda$ なる λ の元より，この様な λ は standard 積では $\lambda\lambda = \overline{\lambda}$ となり，$\| \lambda \| = 1$ を用いて $\lambda\overline{\lambda} = 1$ （$\overline{\lambda} = \lambda\lambda$）から $\lambda\lambda\lambda = 1$ です．この λ は Q_λ の元です．□

Remark. $(\mathbf{Z}_p[\sqrt{q},\sqrt{r}],*)$ の任意の元 x は

$$x*x-(x+\overline{x})*x+x*\overline{x}=0$$

を満たします（para quadnratic algebra と呼びます）． $1*x=\overline{x}$ (para unit).

これは単位元をもたない 2 次代数を変形した代数 $(\mathbf{Z}_p[\sqrt{q},\sqrt{r}],*)$ で特に $(\tilde{Q}(N(p,q,r)),*)$ の乗法 $*$ は非結合的 (nonassociative) です．つまり $(x*y)*z\neq x*(y*z)$ となり，standard product の記号で表すと，$\overline{(\overline{xy})z}\neq\overline{x(\overline{yz})}$ を意味するので，非結合的乗法 $*$ を持つ代数系です（ここで $-$ は共役です．しかし $x*(y*x)=(x*y)*x=<x,x>y$ を満たします）．quasi symmetric composition algebra の導入です．

以上よりこの様な代数系が weak カンドルの例になると考えます．**{ ノルム 1 かつ巾等元 (idenpotent) が weak quandle（弱い）カンドルを生成します }**． $1*1=1$ ですが $1*\lambda=\overline{\lambda}$ です． $\tilde{Q}(\mathbf{Z}_p[\sqrt{q},[\sqrt{r}])$ の ${}^\forall x,y$ に対して一般に $x*y\in\tilde{Q}(\mathbf{Z}_p[\sqrt{q},\sqrt{r}])$ とは限りません．しかし $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}]$ が体のときは $\tilde{Q}=Q_\lambda$ です．

§3.Examples（実例について）

$\mathbf{Z}_p[\sqrt{q},\sqrt{r}]$ において，特に素数 p が小さい時の weak quandle の例を以下に列挙します．

$\cdot$ $\mathbf{Z}_5[\sqrt{2},\sqrt{3}]$;　$\lambda*\lambda=\lambda$ の元（勿論 $\lambda\neq 0$).
$(m,n,l):\lambda=m+n\sqrt{q}+l\sqrt{r}$ とおく．

(1,0,0)　(2,0,1),　(2,0,4).
(2,1,2),　(2,1,4),　(2,2,0),
(2,2,2)　(2,3,0),　(2,3,3)
(2,4,1)　(2,4,3)

これらは 11 個存在します． $\lambda=2+\sqrt{3}$ ならば $\overline{\lambda}=2+4\sqrt{3}$ です．

$\cdot$ standard product においては $\lambda\lambda=\overline{\lambda}$ を満たします．従って $\mathbf{Z}_5[\sqrt{2},\sqrt{3}]$ においては，weak quandle $\tilde{Q}$ を具体的に求められます．

$$\begin{array}{ll}
\lambda=2+\sqrt{3}\text{のとき} & Q_\lambda=\{1,\lambda,\overline{\lambda}\} \\
\mu=2+2\sqrt{2}\text{のとき} & Q_\mu=\{1,\mu,\overline{\mu}\} \\
\nu=2+\sqrt{2}+2\sqrt{3}\text{のとき} & Q_\nu=\{1,\nu,\overline{\nu}\} \\
\kappa=2+\sqrt{2}+4\sqrt{3}\text{のとき} & Q_\kappa=\{1,\kappa,\overline{\kappa}\} \\
\xi=2+3\sqrt{2}+3\sqrt{3}\text{のとき} & Q_\xi=\{1,\xi,\overline{\xi}\}.
\end{array}$$

これらの 5 個の $Q_\lambda,Q_\mu,Q_\nu,Q_\kappa,Q_\xi$ がそれぞれ quandle であり，weak quandle $\tilde{Q}$ は $\tilde{Q}=Q_\lambda\cup Q_\mu\cup Q_\nu\cup Q_\kappa\cup Q_\xi$ （$\tilde{Q}$ は 11 個の要素の集合），そして $\cap_{\lambda*\lambda=\lambda}Q_\lambda=\{1\}$ （共通集合は 1 のみ）です． $(2+\sqrt{3})*(2+2\sqrt{2})=1+\sqrt{2}+2\sqrt{3}\notin\tilde{Q}$. $\tilde{Q}$ は閉じていません．

$\parallel\lambda\parallel=1$ の元の個数は 30 個． $\kappa^6=1$ と $\mu^5=1$ の元の積が λ の元です．

$\cdot$ $\mathbf{Z}_{11}[\sqrt{7},\sqrt{8}]$;　$\lambda*\lambda=\lambda$ の元．

(m,n,l) :

(1,0,0),	(5,0,5),	(5,0,6)	(5,1,9),
(5,1,10)	(5,2,2),	(5,2,3),	(5,3,6),
(5,3,7),	(5,4,0),	(5,4,10),	(5,5,3),
(5,5,4),	(5,6,7),	(5,6,8),	(5,7,0)
(5,7,1),	(5.8.4),	(5,8,5),	(5,9,8)
(5,9,9),	(5,10,1),	(5,10,2)	

これらは 23 個存在します．$\tilde{Q}$ は 11 個のカンドルの和集合です．$\tilde{Q}$ の元の個数は 23 個です．

$\parallel \lambda \parallel = 1$ の元の個数は 132 個．$\kappa^{12} = 1$ と $\mu^{11} = 1$ の元の積が λ の元です．

· $\mathbf{Z}_{17}[\sqrt{5}, \sqrt{7}]$;　 $\lambda * \lambda = \lambda$ の元．
(m,n,l)):

(1,0,0),	(8,0,3),	(8,0,14),
(8,1,9),	(8,1,15),	(8,2,4),
(8,2,10),	(8,3,5),	(8,3,16),
(8,4,0),	(8,4,11),	(8,5,6),
(8,5,12),	(8,6,1),	(8,6,7),
(8,7,2),	(8,7,13),	(8,8,8),
(8,8,14),	(8,9,3),	(8,9,9),
(8,10,4),	(8,10,15),	(8,11,10),
(8,11,16),	(8,12,5),	(8,12,11),
(8,13,0),	(8,13,6),	(8,14,1),
(8,14,12),	(8,15,7),	(8,15,13),
(8,16,2),	(8,16,8)	

これらは 35 個存在します．$\tilde{Q}$ は 17 個のカンドル Q_λ の和集合です．$\tilde{Q}$ の元の個数は 35 個です．

$\parallel \lambda \parallel = 1$ の元の個数は 306 個．$\kappa^{18} = 1$ と $\mu^{17} - 1$ の元の積が λ の元です．

Remark　$\mathbf{Z}_{19}[\sqrt{7}, \sqrt{11}]$, においては，$2 \times 19 + 1$ 個の $\lambda * \lambda = \lambda$ なる元が存在します．そして $\parallel \lambda \parallel = 1$ の元の個数が 18×19 個です．$\mathbf{Z}_{19}[\sqrt{3}, \sqrt{13}]$ のときは $\lambda * \lambda = \lambda$ なる元は $\lambda = 1$ の 1 個．$\parallel \lambda \parallel = 1$ の元は 19×20 個です．

Remark　$\mathbf{Z}_7[\sqrt{3}, \sqrt{5}]$ においては $\parallel \lambda \parallel = 1$ の元は 56 個ですが，$\lambda * \lambda = \lambda$ の元は 1 個です．p, q, r の値によって $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}]$ は，weak カンドルの個数が異なります．

Remark　上記の方法で，$2p+1$ 個の元をもつ weak カンドルが構成できると思います．

Remark　$\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}]$ の p, q, r の選び方により，$\lambda * \lambda = \lambda$ の元は 1 個の場合も存在します．しかし $\parallel \lambda \parallel = 1$ の元は，$p(p+1)$ 又は $p(p-1)$ の様です（予想）．

Remark　$\mathbf{Z}_3[\sqrt{2}]$, $\mathbf{Z}_5[\sqrt{2}]$ 等における $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}]$　$0 < q < p$ が体のとき，$\lambda * \lambda = \lambda$ なる元は多くても 3 個です．$\tilde{Q} = Q_\lambda = \{1, \lambda, \overline{\lambda}\}$ です．従って例としては興味が持てません．

しかし少しだけ述べますと，2 次代数 $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}](p \neq 2)$ については
(a)　$\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}]$ が体 $_{iff} \Longleftrightarrow$ ノルム 1 の元の個数が $p+1$ 個
(b)　$\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}]$ が体でない $_{iff} \Longleftrightarrow$ ノルム 1 の元の個数が $p-1$ 個
a) のとき，$p+1$ が 3 の倍数ならば，$\lambda\lambda = \overline{\lambda}$ の元 $\lambda \neq 1$ が存在する．
b) のとき，$p-1$ が 3 の倍数ならば，$\lambda\lambda = \overline{\lambda}$ の元 $\lambda \neq 1$ が存在する．そして $\mathrm{Aut}_* \, \mathbf{Z}_p[\sqrt{q}] \cong S_3(\text{if } \exists\lambda \neq 1, \lambda * \lambda = \lambda)$．それ以外は $\mathbf{Z}_2$ です．ただし $x * y = \overline{xy}$ の積のもとでです．

以上の $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}]$ の結果は unpublished paper (in preprint [2017]) ですが，解明しました（Tsukuba Univ. の A.Masuoka 氏との共同研究）．ここに記録の為に記しておきます．

Remark　$\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}](qr \equiv 1(\mathrm{mod}\ p))$ における $\lambda * \lambda = \lambda$ の元の性質と $\| \lambda \| = 1$ なる元の個数についても，予想が可能です．$\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}]$ と $\mathbf{Z}_p[\sqrt{r}]$ が両方とも体でないことが，$p(p-1)$ 個である必要十分条件です（予想です）．

§4. Generalizations（一般化について）

前章までに $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}]$ における weak quandle の例を述べましたが，そこでの idea は，次の様に一般化できると考えます．

A を associative, commutative involutive $(\overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x})$ algebra とする．ここで $x * y = \overline{xy}$ で new product を定義する．A はベクトル空間としては同じですが，代数構造が異なる xy と $x * y$ の積が存在します．

$$\tilde{Q}(A) := \{x \in A | x * x = x,\ x \text{ is } invertible\}, Q(A) = \{\lambda \in \tilde{Q}(A) | \lambda = \mu * \kappa,\ {}^{\forall}\mu, \kappa \in \tilde{Q}(A)\}$$

と定義すると，$(\lambda * \mu) * (\lambda * \kappa) = \lambda * (\mu * \kappa),\ \mu * \kappa \in Q(A)$ が成り立つので，$\tilde{Q}(A)$ は weak quandle の構造を持ちます．ただし，$x * y$ は非結合的な乗法 $*$ を持つ代数系，そして乗法の単位元を持たない，つまり $1 * x = \overline{x}$ です．この様な $\tilde{Q}(A)$ と $Q(A)$ を研究するのも，将来への課題です（巾等元の構造を調べる）．特に代数系 $(x * y) * x = x * (y * x) = < x, x > y$ を考える（quasi symmetric composition alg. の研究）．

§5. Conclusions and References（あとがきと文献）

この小論では予備知識をほとんど仮定しませんので，参考文献は多くは挙げません．ここで述べた $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}]$ 等の 2 次代数は，symmetric composition algebra の variation (ある種の一般化）です．内積 $< , >$ が非退化でない場合で考えています．

symmetric composition algebra の性質，つまり $\| xy \| = \| x \| \| y \|$ なる関係式を満たす代数系と，自己同型群の拡張の三対原理 (triality of groups and algebras) については，次の文献が役に立つと思います．

[K-O]; N.Kamiya and S.Okubo, Algebras and groups satisfying triality relations, Monograph (Book), Aizu Univ., (2015).

又，次の文献も quandles の応用としてヤング・バクスター方程式との関連で，役に立つと思いますので挙げておきます．

[K-S.1]; N.Kamiya and Y.Shibukawa, Dynamical Yang-Baxter maps associated with homogeneous presystems, J.Gen. Lie theory, (2011) Art ID,G110116.

[K-S.2]; N.Kamiya and Y.Shibukawa, Dynamical Yang-Baxter maps and weak Hopf algebras with quandles, Proc.the Meeting for Study of Number Theory, Hopf Algebras and related topics, to appear, (Yokohama Publisher) 収録論文.

特に [K-S.2] はカンドルとヤング・バクスター方程式，そしてホップ代数が関係することを特徴ずける論文です.

何故この様なことを考えたのかの motivation の理由を簡単に述べます.

複素数 $(\mathbf{C}, *), (x * y = \overline{xy})$ において考える．つまり new product $x * y$ を定義する

$$Q(\mathbf{C}, *) = \{\lambda | \lambda * \lambda = \lambda\} = \{\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}, 1\}$$

と置くと，これは quandle の例であり，そして weak quandle の例でもあります.

一般に A を共役元を持つある代数系として

$$\tilde{Q}(A) = \{\lambda \in A | \lambda * \lambda = \lambda, \ \lambda \text{ is invertible}\}$$

と置くとき，この $\tilde{Q}$ は一般に $*$ で閉じていません．しかし $Q_\mu(A) = \{\mu \in \tilde{Q} | 1, \mu, \overline{\mu}\}$, ただし $\overline{\mu}$ は μ の共役元と置くと，この Q_μ はカンドルの例です．$\tilde{Q}(A) = \cup_{\lambda*\lambda=\lambda} Q_\lambda$ （和集合）が成り立ち，そして $\cap_{\lambda*\lambda=\lambda} Q_\lambda = \{1\}$ （共通集合は $\{1\}$ のみ）です．これらの自己同型群とその一般化の三対群を研究したいのです（triality relations の研究です）．$\mathbf{Z}_p$ 上の 4 元数，8 元数については結果が出来つつありますので，別の機会に述べたいと思います.

繰り返しになる部分もありますが，この小論の $\mathbf{Z}[\sqrt{q}], \mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}]$ を一般化したものを考察すると，種々の 2 次代数ではないが，その変形である para unit $(1 * x = \overline{x})$ を持つ quasi symmetric composition algebra と呼ぶべき概念が導入できます．例えば para quadratic algebra 等．将来の研究課題です．我田引水ですが,（初等）数理代数学の夜明けです．数理物理学における Gell-Mann の pseudo octonion algebra の標数 p 版を研究することが目標です．代数学と物理学の融合した研究分野だと考えています.

$$\boxed{\text{非結合的代数}} + \boxed{\text{計算機科学}} = \boxed{\text{他分野への応用}}$$

初期段階として，この様なスキームを夢見ながら記述させていただきました（計算機科学の応用）．更なる夢想として

$$\boxed{\text{数理科学}} + \boxed{\text{代数学}} = \boxed{\text{数理代数学}}$$

なる未来の研究方向を目指しています.

最後に，堀田修功君（神奈川大学理学部情報科学科大学院生（2018 年当時））に計算機科学により，recheck をして頂いたことに感謝の意を表したいと思います.

Acknowledgement; This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, a Joint Usage/Research Center located Kyoto University.

Current address; Noriaki Kamiya, e-mail; shigekamiya@outlook.jp
CHIGASAKI CITY, CHIGASAKI 1-2-47-201 JAPAN, 253-0041

追記 by N.Kamiya ($\| \lambda \| = 1$ in $Z_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}]$)

$p = 5, q = 2, r = 3$ のとき，
$(m, n, l) =$

(1,0,0), (1,1,3), (1,2,1), (1,3,4), (1,4,2), (2,0,1), (2,0,4), (2,1,2),
(2,1,4), (2,2,0), (2,2,2), (2,3,0), (2,3,3), (2,4,1), (2,4,3), (3,0,1),
(3,0,4), (3,1,2), (3,1,4), (3,2,0), (3,2,2), (3,3,0) (3,3,3), (3,4,1),
(3,4,3) (4,0,0), (4,1,3), (4,2,1), (4,3,4), (4,4,2)

全部で 30 個.
$p = 7, q = 3, r = 5$ のとき，
$(m, n, l) =$

(0,0,2), (0,0,5), (0,1,2), (0,1,6), (0,2,3), (0,2,6), (0,3,0), (0,3,3),
(0,4,0), (0,4,4), (0,5,1), (0,5,4), (0,6,1), (0,6,5), (1,0,0), (1,1,4),
(1,2,1), (1,3,5), (1,4,2), (1,5,6), (1,6,3), (2,0,3), (2,0,4), (2,1,0),
(2,1,1), (2,2,4), (2,2,5), (2,3,1), (2,3,2), (2,4,5), (2,4,6), (2,5,2),
(2,5,3), (2,6,0), (2,6,6), (5,0,3), (5,0,4), (5,1,0), (5,1,1), (5,2,4),
(5,2,5), (5,3,1), (5,3,2), (5,4,5), (5,4,6), (5,5,2), (5,5,3), (5,6,0),
(5,6,6), (6,0,0), (6,1,4), (6,2,1), (6,3,5), (6,4,2), (6,5,6), (6,6,3)

全部で 56 個.
$p = 11, q = 7, r = 8$ のとき，
$(m, n, l) =$

(0,0,2), (0,0,9), (0,1,2), (0,1,6), (0,2,6), (0,2,10), (0,3,3), (0,3,10),
(0,4,3), (0,4,7), (0,5,0), (0,5,7), (0,6,0), (0,6,4), (0,7,4), (0,7,8),
(0,8,1), (0,8,8), (0,9,1), (0,9,5), (0,10,5), (0,10,9), (1,0,0) (1,1,4)
(1,2,8), (1,3,1), (1,4,5), (1,5,9), (1,6,2), (1,7,6), (1,8,10), (1,9,3),
(1,10,7), (3,0,1), (3,0,10), (3,1,3), (3,1,5), (3,2,7), (3,2,9), (3,3,0),
(3,3,2), (3,4,4), (3,4,6), (3,5,8), (3,5,10), (3,6,1), (3,6,3), (3,7,5),
(3,7,7), (3,8,0), (3,8,9), (3,9,2), (3,9,4), (3,10,6), (3,10,8), (5,0,5),
(5,0,6), (5,1,9), (5,1,10), (5,2,2), (5,2,3), (5,3,6), (5,3,7), (5,4,0),
(5,4,10), (5,5,3), (5,5,4), (5,6,7), (5,6,8), (5,7,0), (5,7,1), (5,8,4),
(5,8,5), (5,9,8), (5,9,9), (5,10,1), (5,10,2), (6,0,5), (6,0,6), (6,1,9)
(6,1,10), (6,2,2), (6,2,3), (6,3,6), (6,3,7), (6,4,0), (6,4,10), (6,5,3),
(6,5,4), (6,6,7), (6,6,8), (6,7,0), (6,7,1), (6,8,4), (6,8,5), (6,9,8),
(6,9,9), (6,10,1), (6,10,2), (8,0,1), (8,0,10), (8,1,3), (8,1,5), (8,2,7),
(8,2,9), (8,3,0), (8,3,2), (8,4,4), (8,4,6), (8,5,8), (8,5,10), (8,6,1),
(8,6,3), (8,7,5), (8,7,7), (8,8,0), (8,8,9), (8,9,2), (8,9,4), (8,10,6),
(8,10,8), (10,0,0), (10,1,4), (10,2,8), (10,3,1), (10,4,5), (10,5,9), (10,6,2),
(10,7,6), (10,8,10), (10,9,3), (10,10,7)

全部で 132 個.