数理解析研究所講究録 1371 巻 2004 年 40-67

非分割財と強コア

慶應義塾大学大学院経済学研究科　井上 朋紀 (Tomoki Inoue)*
Graduate School of Economics, Keio University

2004年3月

概 要

整数単位でのみ消費可能な財からなる交換経済において，経済主体の数が十分に大きければ，有限であっても，強コア配分がワルラス均衡として実現できることを示す．

1 はじめに

強コアは特定の取引機構を前提としない概念であるが，財が完全分割可能で，主体の数が大きな経済においては，近似的に市場機構で実現できることが知られている．Debreu-Scarf (1963) は，消費集合が凸集合で，各タイプに属する主体の数が一定比率で増大する複製経済の列を考察した．主体の選好が強い凸性を満たす時，強コア配分やワルラス配分において，タイプが同じ主体は同じ消費をしている．そのため，各タイプから一人ずつ代表的な主体を選んでくることにより，経済の複製が重ねられても，強コア配分やワルラス配分は常に同じユークリッド空間の点であると見なすことができる．複製を重ねれば，可能な結託が増えるので，強コアは小さくなっていく．Debreu-Scarf は，選好の強い凸性と局所非飽和性の仮定の下で，強コアの減少列の極限がワルラス配分の集合と一致することを示した．特に，極限で初めて両者が一致する経済を構成することができる．つまり，どんなに複製を重ねても，有限人の経済では強コア配分であってもワルラス配分とはならないものが存在しうる．Anderson (1978) は，複製経済列より一般的な経済の列を考察した．主体の選好が凸でなくても，単調であれば，強コア配分のワルラス配分の集合からの乖離を表した測度がゼロに収束することを示した．

この論文の目的は，全ての財が整数単位でのみ消費可能な場合，経済の規模が有限であっても，十分に大きければ，強コア配分が，近似的にではなく，正確に市場機構で実現できることを示すことである．従来，分析上の便利さから財の完全分割

**E-mail address:* inoue1@gs.econ.keio.ac.jp

可能性が仮定されることが多かった．ここでは，物理的な非分割性や取引単位の制度的な離散性といった財の非分割性を丁寧に記述することによって，経済主体の数が有限であっても，強コア配分がワルラス配分となることが言える．しかしながら，財の非分割性により，強コア配分やワルラス均衡が存在しないこともありうる．

我々の定理では，有限人の経済で強コアがワルラス配分となることが言えるので，Debreu-Scarf (1963) や Anderson (1978) のように経済の列を考える必要はない．しかし，主体のタイプを先に与え，それぞれのタイプに属す主体の数が十分に大きいことを要請するので，type sequence と呼ばれる経済の列を考えていることに近い．この経済列は，複製経済列よりは一般的であるが，Anderson (1978) の考察した経済列よりは制限的である．

消費集合が凸である経済では，ワルラス均衡より弱い均衡概念である疑似均衡 (pseudo-equilibrium) が役に立つ．疑似均衡では，各主体は予算制約の下で効用を最大にしているとは限らないが，疑似均衡での消費より厳密に望ましい消費ベクトルが，予算を厳密に下回ることはない．つまり，疑似均衡では，予算集合と疑似均衡での消費より厳密に望ましい消費ベクトルの集合が価格によって，弱い意味で分離されている．各主体の初期保有ベクトルが消費集合の内点にあれば，疑似均衡はワルラス均衡となる．実際，Debreu-Scarf (1963) や Anderson (1978) はこの事実を利用している．Debreu-Scarf は強コアの減少列の極限に属する配分がワルラス配分であることを示す時，直接示すのではなく，まず疑似均衡配分であることを示し，それから実はワルラス配分にもなっている事を示している．また Anderson (1978) の強コア配分のワルラス配分からの乖離を測る尺度は，正確には強コア配分の疑似均衡からの乖離を測ったものである．

財空間が離散的である経済では，疑似均衡の概念はもはや有効ではない.[1] そのため，疑似均衡を経由することなく，強コア配分がワルラス配分となることを示さなければならない．財空間が離散的であることがかえって役に立ち，強コア配分より厳密に望ましい消費ベクトルの集合とその強コア配分によって定まる超過需要ベクトルの張る線形空間を強い意味で分離することができる．

財空間の離散性のために，ワルラス配分は強コアに属するとは限らない．ワルラス配分が強コア配分となるための十分条件は，選好の局所非飽和性であった．Inoue (2004) はこの論文と同様の財空間，但し，主体が連続体濃度いる経済を考え，強コアを少し広げた m-コアの概念を導入し，m-コアとワルラス配分の集合が一致することを示した．主体の数が有限であるか無限であるかにかかわらず，ワルラス配分は常に m-コアに属する．しかし，有限人の主体からなる経済においては，m-コア配分がワルラス配分であるとは限らない．これは，一人の主体が他の主体と異なる消費をしている強コア配分を考えればわかりやすい．アトムレス経済では，そのような主体の消費は無視することができるが，有限人の経済では，その主体についても他の主体と同様に効用を最大にしている価格ベクトルを見つけないくてはならな

[1] Inoue (2004) の Example 5.1 は，この論文と同様の財空間で，疑似均衡であるがワルラス均衡とはならない例を挙げている．

い．そのため，有限経済において，m-コア配分がワルラス配分であることを言うのは難しい．

我々のモデルと異なる非分割財市場モデルを分析したものに Shapley-Scarf (1974) がある．Shapley-Scarf モデルでは，有限人の主体が差別化された非分割財（例えば，家）をそれぞれ一単位ずつ所有している経済を考えている．そのため，主体の数と財の数は同じになる．各主体は何も消費しないよりも，自分の財を消費した方が効用水準が高いとする．このとき，個人合理性を満たす実現可能な配分は初期配分の並べ替えとなる．Shapley-Scarf は David Gale のアイデアを用いて，ワルラス均衡が存在することを示した．但し，強コアは空集合になりうる．Wako (1984) は，Shapley-Scarf モデルにおいて，強コア配分がワルラス配分となることを示した．その証明は，Shapley-Scarf モデルに特有の数学的性質に依存しているので，この論文での我々の証明とは大きく異なる．

次節でモデルと主要な結果を述べる．第 3 節では定理の証明をする．その証明に用いられる数学的な結果は，付録で述べる．

2 モデルと主要な結果

まず記号の約束をする．$\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, と $\mathbb{Q}$ をそれぞれ実数の集合，整数の集合，そして有理数の集合とする．二つのベクトル $x=(x^{(1)},\ldots,x^{(m)})$ と $y=(y^{(1)},\ldots,y^{(m)})$ について，全ての $j\in\{1,\ldots,m\}$ について $x^{(j)}\geq y^{(j)}$ となるとき，$x\geq y$ と書き，$x\geq y$ かつ $x\neq y$ のとき，$x>y$ と書き，全ての $j\in\{1,\ldots,m\}$ について $x^{(j)}>y^{(j)}$ となるとき，$x\gg y$ と書く．0 は実数のゼロ，または $\mathbb{R}^m$ の零元とする．第 i 単位ベクトルを u_i と書く，即ち，$u_i^{(i)}=1$ かつ $j\neq i$ のとき $u_i^{(j)}=0$ である．$\mathbb{R}^m_+=\{x\in\mathbb{R}^m\,|\,x\geq 0\}$，$\mathbb{R}^m_{++}=\{x\in\mathbb{R}^m\,|\,x\gg 0\}$ とする．$\mathbb{Z}^m_+$, $\mathbb{Z}^m_{++}$, $\mathbb{Q}^m_+$, と $\mathbb{Q}^m_{++}$ も同様に定める．特に $\mathbb{Z}_{++}$ は自然数の集合となる．x と y の内積 $\sum_{j=1}^m x^{(j)}y^{(j)}$ を $x\cdot y$ と書く．ベクトル x について $\|x\|_\infty=\max\{|x^{(i)}|\,|\,j=1,\ldots,m\}$ とする．有限集合 A について，$\#A$ は A の要素の数とする．$\mathbb{R}^m$ の部分集合 C について，その凸包を $\mathrm{co}(C)$ と書く．正方行列 B について，その行列式を $\det B$ で表す．

L 種類の非分割財からなる交換経済を考える．全ての財は整数単位でのみ消費可能とする．よって財空間は $\mathbb{Z}^L$ となる．簡単化のために，主体の消費集合は全て $\mathbb{Z}^L_+$ とする．主体 a は，$\mathbb{Z}^L_+$ 上の選好関係 $\precsim_a$ と初期保有量ベクトル $e(a)\in\mathbb{Z}^L_+$ によって特徴づけられる．この論文では，選好関係 $\precsim$ に反射性，推移性，完全性，そして強い単調性を要請する．但し，選好関係 $\precsim$ が強い単調性を満たすとは，$x,y\in\mathbb{Z}^L_+$ について $x>y$ が成り立つとき，$x\succ y$ となることを言う.[2] $\mathbb{Z}^L_+$ 上の選好関係の全体を $\mathcal{P}$ とする．従って，主体の特徴を表す空間は $\mathcal{P}\times\mathbb{Z}^L_+$ となる．主体の集合を表す有限集合 A から $\mathcal{P}\times\mathbb{Z}^L_+$ への写像 $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}(a)=(\precsim_a,e(a))$, が $\sum_{a\in A}e(a)\gg 0$ を満

[2] $\mathbb{Z}^L_+$ 上の選好関係 $\precsim$ について，$\mathbb{Z}^L_+$ 上の 2 項関係 $\succ$ と $\sim$ を次のように定める．$x\precsim y$ とならない時，かつその時に限って，$x\succ y$ とする．また，$x\precsim y$ かつ $y\precsim x$ となる時，かつその時に限って，$x\sim y$ とする．$y\precsim x$ と書く代りに $x\succsim y$ と書いたり，$y\succ x$ と書く代りに $x\prec y$ と書いたりする．

たす時，**交換経済**と呼ぶ．主体の集合の非空部分集合を**結託**と呼ぶ．

定義: $\mathcal{E}: A \to \mathcal{P} \times \mathbb{Z}_+^L$ を交換経済とする．配分 $f: A \to \mathbb{Z}_+^L$ が **強コア配分** であるとは，$\sum_{a \in A} f(a) \leq \sum_{a \in A} e(a)$ を満たし，更に

$$\sum_{a \in S} g(a) \leq \sum_{a \in S} e(a),$$

$$\text{全ての } a \in S \text{ について } \quad g(a) \succsim_a f(a), \quad \text{かつ}$$

$$\text{少なくとも一人の主体 } b \in S \text{ について } \quad g(b) \succ_b f(b)$$

となる結託 S と関数 $g: S \to \mathbb{Z}_+^L$ が存在しないことを言う．経済 $\mathcal{E}$ における強コア配分の全体を経済 $\mathcal{E}$ の**強コア**と言い，$C_s(\mathcal{E})$ と書く．

強コア配分はパレート最適である．また，選好関係の強い単調性から，強コア配分 f は財を余らせない，即ち，$\sum_{a \in A} f(a) = \sum_{a \in A} e(a)$ が成り立つ．財の非分割性により，強コア配分は存在しないことがある．

定義: $\mathcal{E}: A \to \mathcal{P} \times \mathbb{Z}_+^L$ を交換経済とする．価格ベクトル $p \in \mathbb{Z}_+^L$ と配分 $f: A \to \mathbb{Z}_+^L$ の組 (p, f) が**ワルラス均衡**であるとは，以下の三つの条件を満たすことを言う．

(i) $\displaystyle\sum_{a \in A} f(a) \leq \sum_{a \in A} e(a)$.

(ii) 全ての $a \in A$ について $p \cdot f(a) \leq p \cdot e(a)$.

(iii) 全ての $a \in A$ について，$x \in \mathbb{Z}_+^L$ かつ $x \succ_a f(a)$ の時，$p \cdot x > p \cdot e(a)$ となる．

配分 $f: A \to \mathbb{Z}_+^L$ が経済 $\mathcal{E}$ における**ワルラス配分**であるとは，適当な価格ベクトル $p \in \mathbb{Z}_+^L$ について，(p, f) が経済 $\mathcal{E}$ におけるワルラス均衡となることを言う．経済 $\mathcal{E}$ におけるワルラス配分の全体を $W(\mathcal{E})$ と書く．

財の非分割性により，たとえ無理数の価格を許しても，ワルラス均衡が存在しないことがある.[3] ワルラス均衡は必ず弱パレート最適であるが，選好に局所非飽和性がないために，パレート最適になるとは限らない．更に，財を余らせているワルラス均衡が存在しうる.[4] 従って，ワルラス配分は必ずしも強コア配分であるとは限らない．

以下では，主体のタイプの数に比べ，主体の数がずっと大きい交換経済に焦点をあてる．$\mathcal{P} \times \mathbb{Z}_+^L$ の有限集合 T を主体のタイプの集合と呼ぶ．$t \in T$ について，$t = (\precsim_t, e_t)$ と書くことにする．経済 $\mathcal{E}: A \to T$ について，タイプが t である主体の集合を A_t とする．即ち，$A_t = \mathcal{E}^{-1}(\{t\})$ である．

選好関係を制限する．$k \in \mathbb{Z}_{++}$ に対し $\mathcal{P}$ の部分集合 $\mathcal{P}_k$ を次のように定める．

[3] Inoue (2003) の Example 2 はワルラス均衡の存在しない経済を挙げている．

[4] Inoue (2004) の Example 4.4 を参照されたい．

$\precsim \in \mathcal{P}$ であり，更に $h \neq i$ となる全ての $h, i \in \{1, \ldots, L\}$ と全ての $x \in \mathbb{Z}_+^L$ について，$x^{(i)} \geq 1$ であるなら $x + ku_h - u_i \succ x$ となる時，かつその時に限って，$\precsim \in \mathcal{P}_k$ とする.[5] [6] $\mathcal{P}_k$ に属する選好関係は，限界代替率が一様に正となる．特に，辞書式順序はどの $\mathcal{P}_k$ にも属さない．ある $k \in \mathbb{Z}_{++}$ について $\precsim \in \mathcal{P}_k$ であるとき，全ての $x \in \mathbb{Z}_+^L$ について集合 $\{y \in \mathbb{Z}_+^L \mid y \precsim x\}$ は有限集合になる．

以上でこの論文の主要定理を説明する準備が完了した．

定理: $r \geq 1$ となる勝手な実数 r, 勝手な $k \in \mathbb{Z}_{++}$, それと $\#T \leq r$ かつ $\sum_{t \in T} e_t \gg 0$ となる勝手なタイプの集合 $T \subset \mathcal{P}_k \times \mathbb{Z}_+^L$ に対して，十分大きな $N \in \mathbb{Z}_{++}$ を選び，交換経済 $\mathcal{E} : A \to T$ が $\#A \geq N$ かつ，全ての $t \in T$ について $\#A_t / \#A \geq 1/r$ を満たすならば，$C_s(\mathcal{E}) \subset W(\mathcal{E})$ となるようにできる．

定理に登場する数 N は，r, k, L, それと $M := \max\{\|e\|_\infty \mid (\precsim, e) \in T\}$ に依存する．交換経済 $\mathcal{E} : A \to T$ が $\#T = r$ かつ $\#A_t / \#A \geq 1/r$ を満たす時，この経済は $\#A/r$ 倍の複製経済である．

小さい経済 $\mathcal{E}_1 : A \to \mathcal{P}_k \times \mathbb{Z}_+^L$ はワルラス配分ではない強コア配分 $f_1 : A \to \mathbb{Z}_+^L$ を持ちうる．経済 $\mathcal{E}_1$ の n 倍経済 $\mathcal{E}_n : A \times \{1, \ldots, n\} \to \mathcal{P}_k \times \mathbb{Z}_+^L$ は各 $a \in A$ と各 $i \in \{1, \ldots, n\}$ について $\mathcal{E}_n(a, i) = \mathcal{E}_1(a)$ で定められる．配分 $f_n : A \times \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{Z}_+^L$ を全ての $a \in A$ と全ての $i \in \{1, \ldots, n\}$ について $f_n(a, i) = f_1(a)$ と対称的に定めると，f_1 が経済 $\mathcal{E}_1$ におけるワルラス配分ではないことより，f_n は経済 $\mathcal{E}_n$ におけるワルラス配分ではない．一方，f_1 は経済 $\mathcal{E}_1$ における強コア配分であったが，上の定理から，n が十分に大きければ，f_n はもはや強コア配分ではなくなる．次の例はこの事実を示している．

例: $L = 2$ かつ $A = \{a, b\}$ とする．主体の初期保有量ベクトルをそれぞれ $e(a) = (3, 1)$ と $e(b) = (1, 3)$ とする．主体の選好関係は以下のような効用関数で表現されるとする．

$$u_a(x, y) = \begin{cases} 2x + y & \text{if } x \in \{0, 1\}, \\ \frac{1}{2}(x + 2y + 3) & \text{if } x \geq 2. \end{cases}$$

$$u_b(x, y) = x + y.$$

図 1 と図 2 を見よ．$\precsim_a$ と $\precsim_b$ はともに $\mathcal{P}_3$ に属することがわかる．この経済を $\mathcal{E}_1$ と呼ぶことにする.[7]

---

[5] この制限は，財が分割可能な経済における選好関係の同程度単調性と関係している．$\mathcal{Q}$ を $\mathbb{R}_+^L$ 上の連続で強い単調性を満たす選好関係の全体とする．このとき，$\mathcal{Q}$ の勝手な有限部分集合 $\mathcal{Q}'$ と $\mathbb{R}_{++}^L$ の勝手なコンパクト部分集合 K について，$\delta > 0$ が存在して，全ての $\precsim \in \mathcal{Q}'$, 全ての $h, i \in \{1, \ldots, L\}$ と全ての $x \in K$ について $x + u_h - \delta u_i \succ x$ となるようにできる．

[6] $L \geq 2$ の時，$\mathcal{P}_1$ は空集合となる．仮に，$\precsim \in \mathcal{P}_1$ とすると，$u_2 = u_1 + u_2 - u_1 \succ u_1$ かつ $u_1 = u_2 + u_1 - u_2 \succ u_2$ となり，$\succ$ の非反射性に矛盾する．この事実は，塩浦昭義先生に指摘して頂いた．

[7] 経済 $\mathcal{E}_1$ は Inoue (2004) の Example 4.4 の経済に近い．

経済 $\mathcal{E}_1$ の配分 $f_1: A \to \mathbb{Z}^2_+$ を $f_1(a) = (1,2)$ かつ $f_1(b) = (3,2)$ で定める．$f_1 \in C_s(\mathcal{E}_1)$ かつ $f_1 \notin W(\mathcal{E}_1)$ となることが容易に確かめられる．

$\mathcal{E}_2 : A\times\{1,2\} \to \mathbb{Z}^2_+$ を経済 $\mathcal{E}_1$ の2倍の複製経済とする．配分 $f_2 : A\times\{1,2\} \to \mathbb{Z}^2_+$ を全ての $c \in A$ と全ての $i \in \{1,2\}$ について $f_2(c,i) = f_1(c)$ と対称的に定めると，$f_1 \notin W(\mathcal{E}_1)$ より $f_2 \notin W(\mathcal{E}_2)$ となることがわかる．f_1 は経済 $\mathcal{E}_1$ における強コア配分であったが，f_2 はもはや経済 $\mathcal{E}_2$ における強コア配分ではない．結託 $C = \{(a,1),(a,2),(b,1)\}$ に注目しよう．関数 $g: C \to \mathbb{Z}^2_+$ を

$$g(a,i) = f_2(a,i) \quad \text{if} \quad i \in \{1,2\}, \quad \text{かつ}$$
$$g(b,1) = (5,1)$$

で定める．このとき，容易に

$$\sum_{c\in C} g(c) = \sum_{c\in C} e(c) \qquad \text{かつ} \qquad g(b,1) \succ_b f_2(b,1),$$

となることが示せる．従って，$f_2 \notin C_s(\mathcal{E}_2)$ である．経済 $\mathcal{E}_2$ について $\emptyset \neq C_s(\mathcal{E}_2) \subsetneq W(\mathcal{E}_2)$ となることも示せる．

3 定理の証明

厳密な証明の前に，証明のアイデアを述べる．$r \geq 1$ かつ $k \in \mathbb{Z}_{++}$ とする．$T \subset \mathcal{P}_k \times \mathbb{Z}^L_+$ を $\#T \leq r$ かつ $\sum_{t\in T} e_t \gg 0$ を満たすタイプの集合とする．$\mathcal{E}: A \to T$ は全ての $t \in T$ について $\#A_t/\#A \geq 1/r$ を満たし，$\#A$ が十分大きな経済であるとする．$M = \max\{\|e\|_\infty \,|\, (\precsim, e) \in T\}$ とおく．

f を経済 $\mathcal{E}$ における強コア配分であるとする．$H^f = \mathrm{span}\{f(a) - e(a) \,|\, a \in A\}$ とおく．また $a \in A$ に対し

$$\varphi^f(a) = \{z \in \mathbb{Z}^L \,|\, z + e(a) \in \mathbb{Z}^L_+ \quad \text{かつ} \quad z + e(a) \succ_a f(a)\}$$

と定める．集合 $\bigcup_{a\in A}\varphi^f(a)$ は下に有界で，選好関係の強い単調性から $\bigcup_{a\in A}\varphi^f(a) = \bigcup_{a\in A}\varphi^f(a) + \mathbb{Z}^L_+$ となる．従って，$\mathrm{co}\Big(\bigcup_{a\in A}\varphi^f(a)\Big) \cap H^f = \emptyset$ が言えれば，付録の定理Dより，価格ベクトル $p \in H^{f\perp} \cap \mathbb{Z}^L_+$ と正の数 ε がとれて，全ての $z \in \mathrm{co}\Big(\bigcup_{a\in A}\varphi^f(a)\Big)$ について $p\cdot z \geq \varepsilon$ となるようにできる．ここで $H^{f\perp}$ は線形空間 H^f の直交補空間である．$p \in H^{f\perp}$ であることから，全ての $a \in A$ について $p\cdot f(a) = p\cdot e(a)$ となる．即ち，配分 f は全ての主体の予算制約を満たしている．$a \in A$, $x \in \mathbb{Z}^L_+$, かつ $x \succ_a f(a)$ とすると，$x - e(a) \in \varphi^f(a)$ であるから，$p\cdot(x - e(a)) \geq \varepsilon > 0$ を得る．よって，配分 f はワルラス配分である．以上の議論から，全ての強コア配分 f について $\mathrm{co}\Big(\bigcup_{a\in A}\varphi^f(a)\Big) \cap H^f = \emptyset$ となることを示せば十分である．

補題1において，強コア配分が一様に有界となることを示す．例えば，全ての

$f \in C_s(\mathcal{E})$ と全ての $a \in A$ について $\|f(a)\|_\infty \leq \xi$ としよう．補題 1 の証明から，数 ξ は経済の大きさに依存せずに選ぶようにできることがわかる．補題 2 において，主体の数が十分に大きければ，強コア配分は等待遇性 (equal treatment property) を持つ，即ち，全ての $f \in C_s(\mathcal{E})$，全ての $t \in T$，それと全ての $a, b \in A_t$ について $f(a) \sim_t f(b)$ となる．これにより，$a \in A_t$ について $\varphi_t^f = \varphi^f(a)$ と書くことが許される．

主体の選好関係の限界代替率が一様に正であることから，十分に大きな数 ρ を選ぶと，$\mathrm{co}\left(\bigcup_{t\in T}\varphi_t^f\right) \cap H^f = \emptyset$ と $\mathrm{co}\left(\bigcup_{t\in T}\varphi_t^f \cap X_{L,\rho}\right) \cap H^f = \emptyset$ が同値となる．但し，$X_{L,\rho} = \{x \in \mathbb{Z}^L \,|\, \|x\|_\infty \leq \rho\}$ である．補題 1 の強コア配分が一様に有界であることから，ρ は強コア配分の取り方に依存しないことが示せる．従って，最終的な目標は，全ての強コア配分 f について $\mathrm{co}\left(\bigcup_{t\in T}\varphi_t^f \cap X_{L,\rho}\right) \cap H^f = \emptyset$ が成り立つことを示すことである．

強コア配分 f について $\mathrm{co}\left(\bigcup_{t\in T}\varphi_t^f \cap X_{L,\rho}\right) \cap H^f \neq \emptyset$ とする．このとき，f を改善する結託が存在することを言えばよい．集合 $X_{L,\rho}$ は有限集合であり，$0 \in \mathbb{R}^L$ は $\mathrm{co}\{f(a) - e(a) \,|\, a \in A\}$ の相対的な内点なので，$0 \in \mathbb{R}^L$ は $\bigcup_{t\in T}\varphi_t^f \cap X_{L,\rho}$ と $\{f(a) - e(a) \,|\, a \in A\}$ の点の凸結合として表現できる．しかも，その係数は全て有理数で，その分母は強コア配分 f の取り方には依存しない数で抑えることができることがわかる．この凸結合を利用して，f を改善する結託を見つけることができる．従って，全ての強コア配分 f について $\mathrm{co}\left(\bigcup_{t\in T}\varphi_t^f \cap X_{L,\rho}\right) \cap H^f = \emptyset$ となることが言える．

それでは厳密な証明に入ろう．

定理の証明: $r \geq 1$ かつ $k \in \mathbb{Z}_{++}$ とする．$T \subset \mathcal{P}_k \times \mathbb{Z}_+^L$ を $\#T \leq r$ と $\sum_{t\in T} e_t \gg 0$ を満たすタイプの集合とする．

$M = \max\{\|e\|_\infty \,|\, (\precsim, e) \in T\}$ かつ

$\xi = \max\{rM^2L^2(ML+1), (kL+1)ML\}$

とおく．まず強コア配分が一様に有界であることを示す．Bewley (1973, Theorem 1) は消費集合が $\mathbb{R}_+^L$ である経済において，強コア配分が一様に有界となることを示した．しかし，彼の証明は背理法によるものなので，強コア配分のノルムの上界が明確ではない．一方，Mas-Colell (1985, Lemma 7.4.10) の証明方法では，その上界を明らかにしている．Mas-Colell の証明と同様にして，次の補題を示す．

補題 1: 全ての $t \in T$ について $\#A_t/\#A \geq 1/r$ となる勝手な交換経済 $\mathcal{E}: A \to T$ において，全ての $f \in C_s(\mathcal{E})$ と全ての $a \in A$ について $\|f\|_\infty \leq \xi$ となる．

補題 1 の証明: $\mathcal{E}: A \to T$ を全ての $t \in T$ について $\#A_t/\#A \geq 1/r$ を満たす交換経済とする．$f \in C_s(\mathcal{E})$ とする．簡単な計算により，次の (1) が示せる．

(1) $\#A \leq rML^2(ML+1)$ であるなら, 全ての $a \in A$ について $\|f(a)\|_\infty \leq \xi$ となる.

(1) より, 以下の証明では, $\#A > rML^2(ML+1)$ としてよい. $\sum_{a\in A} e(a) \gg 0$ であるので, 全ての $h \in \{1,\ldots,L\}$ について $e^{(h)}_{t_h} \geq 1$ となるタイプ $t_h \in T$ が存在する. 従って, 全ての $h \in \{1,\ldots,L\}$ について

$$\frac{\#A}{r} \leq \#A_{t_h} \leq \sum_{a\in A_{t_h}} e^{(h)}(a) \leq \sum_{a\in A} e^{(h)}(a)$$

となる. $J = \{j \in \{1,\ldots,L\} \,|\,$ ある $a \in A$ について $f^{(j)}(a) \geq ML+1\}$ とおく. また $J' = \{j \in \{1,\ldots,L\} \,|\,$ ある $a \in A$ について $f^{(j)}(a) \geq (kL+1)ML\}$ とする. $J' \subset J$ となることはよい. 各 $j \in J$ について, $a_j \in \operatorname{argmax}\{f^{(j)}(a) \,|\, a \in A\}$ を取る. $i \neq j$ となる i と j について $a_i = a_j$ となり得ることに注意しよう. $B = \{a_j \,|\, j \in J\}$ とおく. $\#B \leq \#J \leq L$ となることはよい. 結託 B の超過需要を $y = \sum_{a\in B}(f(a)-e(a)) \in \mathbb{Z}^L$ と書くことにする. $J'' = \{j \in \{1,\ldots,L\} \,|\, y^{(j)} \leq -1\}$ とおく. 簡単な計算により, 次の (2) が得られる.

(2) 全ての $j \in J$ について $y^{(j)} \geq 1$ が成り立つ.

これより, $J \cap J'' = \emptyset$ を得る. また以下の (3) と (4) も容易に示すことができる.

(3) 全ての $j \in J'$ について $y^{(j)} \geq kML^2$ となる.

(4) $J' = \emptyset$ なら, 全ての $a \in A$ について $\|f(a)\|_\infty \leq \xi$ となる.

従って, $J' = \emptyset$ を示せば証明が完了する.

(5) $J' = \emptyset$.

(5) の証明: 仮に $J' \neq \emptyset$ とする. $C = A \setminus B$ とおくと, $\#C = \#A - \#B \geq \#A - L$ となる. $\#A > rML^2(ML+1) > L$ であるから, $C \neq \emptyset$ がわかる. $\tilde{y} \in \mathbb{Z}^L$ を

$$y = \tilde{y} + \sum_{j\in J''} y^{(j)} u_j$$

で定める. $\emptyset \neq J' \subset J \subset \{j \in \{1,\ldots,L\} \,|\, y^{(j)} \geq 1\}$ となることから, $\tilde{y} \in \mathbb{Z}^L_+ \setminus \{0\}$ であることがわかる.

(5.1) $J'' \neq \emptyset$.

(5.1) の証明: 仮に $J'' = \emptyset$ とすると,

$$0 < \tilde{y} \;=\; y$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{b\in B}(f(b)-e(b)) \\
&= -\sum_{a\in C}(f(a)-e(a)) \\
&= \sum_{a\in C}(e(a)-f(a))
\end{aligned}
$$

となる．$C \neq \emptyset$ であるから，C の元 a^* を取ることができる．関数 $g: C \to \mathbb{Z}^L_+$ を

$$
g(a) = \begin{cases} f(a^*) + \sum_{c\in C}(e(c)-f(c)) & \text{if } a = a^*, \\ f(a) & \text{if } a \in C \setminus \{a^*\} \end{cases}
$$

で定める．$g(a^*) > f(a^*)$ であるから，選好の強い単調性から，$g(a^*) \succ_{a^*} f(a^*)$ を得る．また，容易に

$$
\sum_{a\in C} g(a) = \sum_{a\in C} f(a) + \sum_{c\in C}(e(c)-f(c)) = \sum_{a\in C} e(a)
$$

を確認できる．これは $f \in C_s(\mathcal{E})$ に矛盾する．これで (5.1) の証明が完了した．■

各 $j \in J''$ に対し，$C_j = \{a \in C \mid f^{(j)}(a) \geq 1\}$ とおく．

(5.2) 全ての $j \in J''$ について $\#C_j > ML^2$ となる．

(5.2) の証明: $j \in J''$ を勝手に取る．$J \cap J'' = \emptyset$ であるから，$j \notin J$ である．従って，全ての $a \in A$ について $f^{(j)}(a) \leq ML$ となる．$C \setminus C_j = \{a \in C \mid f^{(j)}(a) < 1\} = \{a \in C \mid f^{(j)}(a) = 0\}$ に注意すると，

$$
\begin{aligned}
\frac{\#A}{r} &\leq \sum_{a\in A} e^{(j)}(a) \\
&= \sum_{a\in A} f^{(j)}(a) \\
&\leq \{\#A - (\#C - \#C_j)\}ML \\
&= (\#C_j)ML + (\#A - \#C)ML \\
&\leq (\#C_j)ML + ML^2
\end{aligned}
$$

が得られる．従って，

$$
\begin{aligned}
\#C_j &\geq \frac{\#A}{rML} - L \\
&> L(ML+1) - L \\
&= ML^2
\end{aligned}
$$

となる．これで (5.2) が示せた．■

各 $j \in J''$ について,

$$\begin{aligned} -1 \geq y^{(j)} &= \sum_{b \in B}(f^{(j)}(b) - e^{(j)}(b)) \\ &\geq -\sum_{b \in B} e^{(j)}(b) \\ &\geq -(\#B)M \\ &\geq -ML \end{aligned}$$

となるから，(5.2) より，$\{G_j \mid j \in J''\}$ を適当にとって

$$\begin{aligned} &\text{全ての } j \in J'' \text{ について} \quad G_j \subset C_j, \\ &\text{全ての } j \in J'' \text{ について} \quad \#G_j = -y^{(j)}, \text{ かつ} \\ &j \neq \ell \text{ となる } j \text{ と } \ell \text{ について} \quad G_j \cap G_\ell = \emptyset \end{aligned}$$

を満たすようにできる．$J' \neq \emptyset$ であるから，(3) より，$\tilde{y}^{(h)} = y^{(h)} \geq kML^2$ となる $h \in \{1, \ldots, L\}$ を取ることができる．関数 $\hat{g} : C \to \mathbb{Z}^L$ を

$$\hat{g}(a) = \begin{cases} f(a) + ku_h - u_j & \text{if } a \in G_j \ (j \in J''), \\ f(a) & \text{if } a \in C \setminus \bigcup_{j \in J''} G_j \end{cases}$$

で定める．主体 $a \in G_j$ にういて, $G_j \subset C_j$ より $f^{(j)}(a) \geq 1$ が成立する．従って, 全ての $a \in C$ について $\hat{g}(a) \in \mathbb{Z}_+^L$ である．各 $a \in C$ について $\precsim_a \in \mathcal{P}_k$ なので, 主体 $a \in \bigcup_{j \in J''} G_j$ について $\hat{g}(a) \succ_a f(a)$ となる．更に,

$$\begin{aligned} \sum_{a \in C} \hat{g}(a) &= \sum_{a \in C} f(a) + k \sum_{j \in J''} (\#G_j) u_h - \sum_{j \in J''} (\#G_j) u_j \\ &= \sum_{a \in C} f(a) - k \Big(\sum_{j \in J''} y^{(j)} \Big) u_h + \sum_{j \in J''} y^{(j)} u_j \\ &\leq \sum_{a \in C} f(a) + kML^2 u_h + \sum_{j \in J''} y^{(j)} u_j \\ &\leq \sum_{a \in C} f(a) + \tilde{y} + \sum_{j \in J''} y^{(j)} u_j \\ &= \sum_{a \in C} f(a) + y \\ &= \sum_{a \in C} f(a) + \sum_{b \in B} (f(b) - e(b)) \\ &= \sum_{a \in A} f(a) - \sum_{b \in B} e(b) \\ &= \sum_{a \in A} e(a) - \sum_{b \in B} e(b) \\ &= \sum_{a \in C} e(a) \end{aligned}$$

である．これは $f \in C_s(\mathcal{E})$ に矛盾する．これで (5) の証明が完了した． ■
以上で補題 1 が示せた． ■

次に経済が大きければ，全ての強コア配分が等待遇性を持つことを示す．消費集合が $\mathbb{R}^L_+$ である経済において，Debreu-Scarf (1963) は選好の凸性を仮定して，強コア配分が等待遇性を持つことを示した．ここでは，選好関係に凸性やそれに近い性質を全く仮定していないことに注意しよう．

補題 2: $\mathcal{E}: A \to T$ を $\#A > r\mu(L,\xi)$ かつ，全ての $t \in T$ について $\#A_t/\#A \geq 1/r$ となる交換経済とする．但し，$\mu(L,\xi)$ は付録の定理 A で定義されたものである．このとき，全ての強コア配分は等待遇性を持つ．即ち，全ての $f \in C_s(\mathcal{E})$, 全ての $t \in T$, そして全ての $a, b \in A_t$ について，$f(a) \sim_t f(b)$ となる．

補題 2 の証明: 仮に，配分 $f \in C_s(\mathcal{E})$, タイプ $t \in T$, そして主体 $a, b \in A_t$ について $f(a) \succ_t f(b)$ となるとする．一般性を失うことなく，全ての $c \in A_t$ について $f(a) \succsim_t f(c) \succsim_t f(b)$ としてよい．補題 1 より，全ての $c \in A$ について $\|f(c)\|_\infty \leq \xi$ となる．$f(c)$ と $e(c)$ はともに非負のベクトルであるから，全ての $c \in A$ について $\|f(c) - e(c)\|_\infty \leq \max\{\xi, M\} = \xi$ となる．$\sum_{c \in A}(f(c) - e(c)) = 0$ であるから，付録の定理 A より，結託 $B \subsetneq A$ が存在して

$$
\begin{aligned}
& b \in B, \\
& \#B \leq \mu(L,\xi), \text{ かつ} \\
& \sum_{c \in B}(f(c) - e(c)) = 0
\end{aligned}
$$

を満たすようにできる．$\#A_t \geq \#A/r > \mu(L,\xi) \geq \#B$ であるから，集合 $A_t \setminus B$ は非空である．以下，二つに場合分けをして考える．

ケース 1: $f(c^*) \sim_t f(b)$ となる $c^* \in A_t \setminus B$ が存在する．

$a \in B$ としてよい．$a \in A_t \setminus B$ なら，以下の証明で c^* と b を，また B と $A \setminus B$ を入れ替えて考えればよい．結託 $C_1 = (B \cup \{c^*\}) \setminus \{a\}$ に注目する．関数 $g: C_1 \to \mathbb{Z}^L_+$ を

$$
g(c) = \begin{cases} f(a) & \text{if } c = c^*, \\ f(c) & \text{if } c \in C_1 \setminus \{c^*\} \end{cases}
$$

で定義する．$g(c^*) = f(a) \succ_t f(b) \sim_t f(c^*)$ となることはよい．また

$$
\begin{aligned}
\sum_{c \in C_1} g(c) &= f(a) + \sum_{c \in B \setminus \{a\}} f(c) \\
&= \sum_{c \in B} f(c)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{c\in B} e(c) \\
&= e(a) + \sum_{c\in B\setminus\{a\}} e(c) \\
&= e(c^*) + \sum_{c\in B\setminus\{a\}} e(c) \\
&= \sum_{c\in C_1} e(c)
\end{aligned}$$

となるから，$f \in C_s(\mathcal{E})$ に矛盾する．

ケース 2: 全ての $c^* \in A_t \setminus B$ について $f(c^*) \succ_t f(b)$ である．

$c^* \in A_t \setminus B$ を勝手に取る．結託 $C_2 = (A \setminus (B \cup \{c^*\})) \cup \{b\}$ に注目する．関数 $g : C_2 \to \mathbb{Z}^L_+$ を

$$g(c) = \begin{cases} f(c^*) & \text{if } c = b, \\ f(c) & \text{if } c \in C_2 \setminus \{b\} \end{cases}$$

で定める．$g(b) = f(c^*) \succ_t f(b)$ となることはよい．また

$$\begin{aligned}
\sum_{c\in C_2} g(c) &= f(c^*) + \sum_{c\in C_2\setminus\{b\}} f(c) \\
&= \sum_{c\in A\setminus B} f(c) \\
&= \sum_{c\in A\setminus B} e(c) \\
&= e(c^*) + \sum_{c\in A\setminus(B\cup\{c^*\})} e(c) \\
&= e(b) + \sum_{c\in A\setminus(B\cup\{c^*\})} e(c) \\
&= \sum_{c\in C_2} e(c)
\end{aligned}$$

を得る．これは，$f \in C_s(\mathcal{E})$ に矛盾する．以上で，補題 2 の証明が完了した． ■

補題 2 の証明において，選好関係の完全性と推移性が本質的であることに注意しよう．これは，無限人の主体のいる経済と大きく異なる点である．消費集合が $\mathbb{R}^L_+$ であるアトムレス経済において，Aumann (1964) は弱コアとワルラス配分の全体が一致することを選好関係の完全性や推移性や凸性を仮定することなく示した．従って，Aumann の仮定は，需要集合が非空となるとは限らないほど弱いものである．

$\rho = \xi + k(L-1)\xi + 1$ かつ

$$q = L^{\frac{L}{2}}(2\rho)^L\{1 + L(\mu(L,\xi) - 1)\}$$

とおく．$\mathcal{E} : A \to T$ を $\#A \geq rq$ かつ，全ての $t \in T$ について $\#A_t/\#A \geq 1/r$ となる交換経済とする．このとき，$C_s(\mathcal{E}) \subset W(\mathcal{E})$ となることを示す．$f \in C_s(\mathcal{E})$ を勝手に取る．

(6) 全ての $i \in \{1, \ldots, L\}$ と全ての $a \in A$ について $\rho u_i \succ_a f(a)$ が成り立つ．

(6) の証明: $i \in \{1, \ldots, L\}$ と $a \in A$ を勝手に取る．$\precsim_a \in \mathcal{P}_k$ であるから，

$$f(a) \prec_a f(a) - \sum_{j \neq i} f^{(j)}(a)u_j + \Big(k \sum_{j \neq i} f^{(j)}(a) + 1\Big)u_i = \Big(f^{(i)}(a) + k \sum_{j \neq i} f^{(j)}(a) + 1\Big)u_i$$

となる．補題 1 より，$f^{(i)}(a) + k\sum_{j\neq i} f^{(j)}(a) + 1 \leq \xi + k(L-1)\xi + 1 = \rho$ となる．選好関係の強い単調性から，$f(a) \prec_a \rho u_i$ となる．これで (6) の証明が完了した． ■

$H = \mathrm{span}\{f(a) - e(a) \mid a \in A\}$ とおく．$t \in T$ に対して，

$$\varphi_t = \{z \in \mathbb{Z}^L \mid z + e_t \in \mathbb{Z}^L_+ \text{ かつ } z + e_t \succ_t f(a)\}$$

と定める．但し，$a \in A_t$ である．補題 2 より，φ_t は全ての $t \in T$ について意味を持つ．各 $t \in T$ について，φ_t の部分集合 φ'_t を次のように定める．$z \in \varphi_t$ であり，更に $y < z$ となる $y \in \varphi_t$ が存在しない時，かつその時に限って，$z \in \varphi'_t$ とする．従って，$\varphi_t \subset \varphi'_t + \mathbb{Z}^L_+$ となる．主体の選好が強い単調性を満たすことから，全ての $t \in T$ について $\varphi_t + \mathbb{Z}^L_+ = \varphi_t$ となる．従って，各 $t \in T$ について $\varphi_t = \varphi'_t + \mathbb{Z}^L_+$ となる．

(7) 全ての $t \in T$ について $\varphi'_t \subset X_{L,\rho} := \{x \in \mathbb{Z}^L \mid \|x\|_\infty \leq \rho\}$ が成り立つ．

(7) の証明: 仮に，タイプ $t \in T$ について $\varphi'_t \not\subset X_{L,\rho}$ とする．$\varphi'_t \subset \mathbb{Z}^L_+ - \{e_t\} \subset \mathbb{Z}^L_+ - \{M(1,1,\ldots,1)\}$ かつ $M < \rho$ であるから，$z \in \varphi'_t$ と $h \in \{1, \ldots, L\}$ をうまく選ぶと $z^{(h)} > \rho$ となるようにできる．(6) より，主体 $a \in A_t$ について $\rho u_h \succ_t f(a)$ であるから，$\rho u_h - e_t \in \varphi_t$ となる．

$$\begin{aligned} z^{(h)} &> \rho \\ &\geq \rho u_h^{(h)} - e_t^{(h)} \end{aligned}$$

となることはよい．$i \neq h$ となる i について $z \geq -e_t$ であるから，

$$\begin{aligned} z^{(i)} &\geq -e_t^{(i)} \\ &= \rho u_h^{(i)} - e_t^{(i)} \end{aligned}$$

を得る．従って，$\rho u_h - e_t \in \varphi_t$ かつ $z > \rho u_h - e_t$ となり，$z \in \varphi'_t$ に矛盾する．これで (7) の証明が完了した． ■

(7) より, 全ての $t \in T$ について

$$\begin{aligned}\varphi_t &= \varphi'_t + \mathbb{Z}^L_+ \\ &= (\varphi'_t \cap X_{L,\rho}) + \mathbb{Z}^L_+ \\ &\subset (\varphi_t \cap X_{L,\rho}) + \mathbb{Z}^L_+ \\ &\subset \varphi_t + \mathbb{Z}^L_+ \\ &= \varphi_t\end{aligned}$$

となる．従って，各 $t \in T$ について $\varphi_t = (\varphi_t \cap X_{L,\rho}) + \mathbb{Z}^L_+$ である．これより次の (8) を得る．

(8) $\displaystyle\bigcup_{t\in T} \varphi_t = \left(\bigcup_{t\in T} \varphi_t \cap X_{L,\rho}\right) + \mathbb{Z}^L_+.$

(9) $\mathrm{co}\left(\displaystyle\bigcup_{t\in T} \varphi_t\right) \cap H = \emptyset$ の時かつ，その時に限って $\mathrm{co}\left(\displaystyle\bigcup_{t\in T} \varphi_t \cap X_{L,\rho}\right) \cap H = \emptyset.$

(9) の証明: $\mathrm{co}\left(\bigcup_{t\in T} \varphi_t \cap X_{L,\rho}\right) \cap H = \emptyset$ の時，$\mathrm{co}\left(\bigcup_{t\in T} \varphi_t\right) \cap H = \emptyset$ となることを示せば十分である．集合 $\bigcup_{t\in T} \varphi_t \cap X_{L,\rho}$ は有限集合であるから，その凸包 $\mathrm{co}\left(\bigcup_{t\in T} \varphi_t \cap X_{L,\rho}\right)$ はコンパクト集合である．H は閉凸集合であるので，分離定理より，ベクトル $p \in \mathbb{R}^L \setminus \{0\}$ と実数 α と β がとれて，全ての $z \in \mathrm{co}\left(\bigcup_{t\in T} \varphi_t \cap X_{L,\rho}\right)$ と全ての $y \in H$ について

$$p \cdot z \geq \alpha > \beta \geq p \cdot y$$

となるようにできる．H は線形空間であるから，$p \in H^{\perp}$ となる．但し，$H^{\perp}$ は H の直交補空間である．よって，全ての $z \in \mathrm{co}\left(\bigcup_{t\in T} \varphi_t \cap X_{L,\rho}\right)$ について $p \cdot z > 0$ となる．

次に $p \geq 0$ となることを示す．仮に，ある $h \in \{1, \ldots, L\}$ について $p^{(h)} < 0$ とする．(6) より，各 $t \in T$ と $a \in A_t$ について $\rho u_h \succ_t f(a)$ である．$e_t \geq 0$ であり，更に $\precsim_t$ は強い単調性を満たすので，$\rho u_h + e_t \succ_t f(a)$ となる．従って，$\rho u_h \in \varphi_t \cap X_{L,\rho}$ となるので，

$$0 < p \cdot (\rho u_h) = p^{(h)} \rho$$

を得る．しかし，$p^{(h)}\rho$ は負であるので矛盾が生じる．これで，$p \geq 0$ となることが示せた．(8) より $\bigcup_{t\in T} \varphi_t = \left(\bigcup_{t\in T} \varphi_t \cap X_{L,\rho}\right) + \mathbb{Z}^L_+$ なので，全ての $z \in \mathrm{co}\left(\bigcup_{t\in T} \varphi_t\right)$ について $p \cdot z > 0$ となることが言える．従って，$\mathrm{co}\left(\bigcup_{t\in T} \varphi_t\right) \cap H = \emptyset$ となり，(9) が示せた． ■

(10) $\mathrm{co}\left(\bigcup_{t\in T} \varphi_t \cap X_{L,\rho}\right) \cap H = \emptyset.$

(10) の証明: 仮に，$\mathrm{co}\left(\bigcup_{t\in T} \varphi_t \cap X_{L,\rho}\right) \cap H \neq \emptyset$ とする．集合 $\{f(a) - e(a) \,|\, a \in$

$A\}$ は $X_{L,\xi}$ の部分集合であるから，有限集合である．そこで，各 $t \in T$ について $\{f(a) - e(a) \,|\, a \in A_t\} = \{z_{t,j} \,|\, j = 1, \ldots, \ell_t\}$ と書くことにする．各 $t \in T$ と $j = 1, \ldots, \ell_t$ について $\eta_{t,j} = \#\{a \in A_t \,|\, f(a) - e(a) = z_{t,j}\} \in \mathbb{Z}_{++}$ とおく．

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{a \in A} (f(a) - e(a)) \\ &= \sum_{t \in T} \sum_{a \in A_t} (f(a) - e(a)) \\ &= \sum_{t \in T} \sum_{j=1}^{\ell_t} \eta_{t,j}\, z_{t,j} \end{aligned}$$

であるから，付録の定理 C より，$q_0 \le q$ となる $q_0 \in \mathbb{Z}_{++}$ と $\{x_{t,j} \,|\, j = 1, \ldots, m_t\} \subset \varphi_t \cap X_{L,\rho}$ $(t \in T)$ と，$(\alpha_{t,1}, \ldots, \alpha_{t,m_t}) \in \mathbb{Q}_+^{m_t}$ $(t \in T)$，と $(\beta_{t,1}, \ldots, \beta_{t,\ell_t}) \in \mathbb{Q}_+^{\ell_t} (t \in T)$ を適当にとって

$$\begin{aligned} &\sum_{t \in T} \sum_{j=1}^{m_t} \alpha_{t,j} > 0, \\ &\sum_{t \in T} \sum_{j=1}^{m_t} \alpha_{t,j} + \sum_{t \in T} \sum_{j=1}^{\ell_t} \beta_{t,j} = 1, \\ &\text{全ての } t \in T \text{ と全ての } j \in \{1, \ldots, m_t\} \text{ について} \quad q_0\, \alpha_{t,j} \in \mathbb{Z}_+, \\ &\text{全ての } t \in T \text{ と全ての } j \in \{1, \ldots, \ell_t\} \text{ について} \quad q_0\, \beta_{t,j} \in \mathbb{Z}_+, \quad \text{かつ} \\ &\sum_{t \in T} \sum_{j=1}^{m_t} \alpha_{t,j}\, x_{t,j} + \sum_{t \in T} \sum_{j=1}^{\ell_t} \beta_{t,j}\, z_{t,j} = 0 \end{aligned}$$

を満たすようにできる．$q_0\Big(\sum_{j=1}^{m_t} \alpha_{t,j} + \sum_{j=1}^{\ell_t} \beta_{t,j}\Big) \le q_0 \le q \le \#A/r \le \#A_t$ であるから，全ての $t \in T$ について，A_t の部分集合の族 $\{C_{t,j} \,|\, j = 1, \ldots, m_t\}$ と $\{D_{t,j} \,|\, j = 1, \ldots, \ell_t\}$ を適当にとることによって

$$\begin{aligned} &\{C_{t,j} \,|\, j = 1, \ldots, m_t\} \cup \{D_{t,j} \,|\, j = 1, \ldots, \ell_t\} \quad \text{は互いに素}, \\ &\text{全ての } j \in \{1, \ldots, m_t\} \text{ について} \quad \#C_{t,j} = q_0\, \alpha_{t,j}, \quad \text{かつ} \\ &\text{全ての } j \in \{1, \ldots, \ell_t\} \text{ について} \quad \#D_{t,j} = q_0\, \beta_{t,j} \end{aligned}$$

とできる．結託 $S = \bigcup_{t \in T} \Big(\bigcup_{j=1}^{m_t} C_{t,j} \cup \bigcup_{j=1}^{\ell_t} D_{t,j}\Big)$ に注目する．$\sum_{t \in T} \sum_{j=1}^{m_t} \alpha_{t,j} > 0$ であることより，集合 $\bigcup_{t \in T} \bigcup_{j=1}^{m_t} C_{t,j}$ は空集合ではない．関数 $g : S \to \mathbb{Z}_+^L$ を

$$g(a) = \begin{cases} x_{t,j} + e_t & \text{if } a \in C_{t,j}\ (t \in T,\ j = 1, \ldots, m_t), \\ z_{t,j} + e_t & \text{if } a \in D_{t,j}\ (t \in T,\ j = 1, \ldots, \ell_t) \end{cases}$$

で定める．結託 S の作り方より，$\sum_{a\in S} g(a) = \sum_{a\in S} e(a)$ となる．主体 $a \in C_{t,j}$ について，$x_{t,j} \in \varphi_t$ が成り立つから，$g(a) = x_{t,j} + e_t \succ_t f(a)$ となる．主体 $a \in D_{t,j}$ については，$g(a) = z_{t,j} + e_t = f(b)$ となる同じタイプの主体 $b \in A_t$ が存在する．従って，補題 2 より，$g(a) = f(b) \sim_t f(a)$ となる．これは $f \in C_s(\mathcal{E})$ に矛盾する．これで (10) が示せた．■

(9) と (10) より，$\mathrm{co}\left(\bigcup_{t\in T} \varphi_t\right) \cap H = \emptyset$ が言える．$\bigcup_{t\in T} \varphi_t \subset \mathbb{Z}^L_+ - \{M(1,1,\ldots,1)\}$ かつ $\bigcup_{t\in T} \varphi_t + \mathbb{Z}^L_+ = \bigcup_{t\in T} \varphi_t$ であるから，付録の定理 D より，ベクトル $p \in H^\perp \cap \mathbb{Z}^L_+$ と正の数 ε で，全ての $z \in \mathrm{co}\left(\bigcup_{t\in T} \varphi_t\right)$ について

$$p \cdot z \geq \varepsilon$$

を満たすものが存在する．$f(a) - e(a) \in H$ かつ $p \in H^\perp$ であることより，$p \cdot (f(a) - e(a)) = 0$ となる．$a \in A_t$，$x \in \mathbb{Z}^L_+$，かつ $x \succ_t f(a)$ とすると，$x - e(a) \in \varphi_t$ であるから，$p \cdot (x - e(a)) \geq \varepsilon > 0$ となる．従って，(p, f) はワルラス均衡である．よって，$f \in W(\mathcal{E})$ となる．これで定理の証明が完了した．■

謝辞

著者は，加茂知幸ならびに中村慎助の各先生より有益なコメントを頂いた．また，神戸大学・大阪大学ジョイントセミナーの参加者，京都大学数理解析研究所での短期共同研究集会の参加者，特に，室田一雄，塩浦昭義，山崎昭の諸先生方から貴重なコメントを頂いた．記して謝意を表したい．

付録

第 3 節で用いられる数学の定理をまとめておく．

定理 A: L と N を自然数とする．$X_{L,N} = \{x \in \mathbb{Z}^L \mid \|x\|_\infty \leq N\}$ と定める．集合 $\mathcal{X}_{L,N}$ を次のように定める．関数 $\alpha : X_{L,N} \to \mathbb{Z}_+$ が $\sum_{x\in X_{L,N}} \alpha(x) \geq 1$ と $\sum_{x\in X_{L,N}} \alpha(x)x = 0$ を満たし，更に $\sum_{x\in X_{L,N}} \beta(x) \geq 1$, $\sum_{x\in X_{L,N}} \beta(x)x = 0$, 全ての $x \in X_{L,N}$ について $\beta(x) \leq \alpha(x)$, かつ，ある $y \in X_{L,N}$ について $\beta(y) < \alpha(y)$ となるような関数 $\beta : X_{L,N} \to \mathbb{Z}_+$ が存在しない時，かつその時に限って，$\alpha : X_{L,N} \to \mathbb{Z}_+$ は集合 $\mathcal{X}_{L,N}$ に属するとする．このとき，

$$\mu(L,N) := \sup\left\{ \sum_{x\in X_{L,N}} \alpha(x) \;\middle|\; \alpha \in \mathcal{X}_{L,N} \right\}$$

は有限である．特に，

$$\mu(1,1)=2,$$
$$N\geq 2 \text{ に対して } \quad \mu(1,N)\leq\frac{1}{2}N^2(N+1), \quad \text{かつ}$$
$$L,N\in\mathbb{Z}_{++} \text{ に対して } \quad \mu(L+1,N)\leq\mu(L,N)\mu(1,N(N+1)\mu(L,N))$$

となる．

定理 A の証明: L に関する帰納法で証明する．$L=1$ とする．$\mu(1,1)=2$ となることは明らか．そこで $N\geq 2$ の場合を考える．

(I) $N\geq 2$ のとき，$\mu(1,N)\leq\frac{1}{2}N^2(N+1)$ となる．

(I) の証明: 仮に，関数 $\alpha\in\mathcal{X}_{1,N}$ で $\sum_{x\in X_{1,N}}\alpha(x)>N^2(N+1)/2$ を満たすものが存在するとしよう．$\sum_{x\in X_{1,N}}\alpha(x)>2$ であるから，$\mathcal{X}_{1,L}$ の定義より，$\alpha(0)=0$ であり，また $\alpha(\ell)\geq 1$ かつ $\alpha(-\ell)\geq 1$ となる $\ell\in X_{1,N}\setminus\{0\}$ は存在しない．従って，$\#\{x\in X_{1,N}\,|\,\alpha(x)\geq 1\}\leq N$ となる．$\sum_{x\in X_{1,N}}\alpha(x)>N^2(N+1)/2$ であるので，整数 $m\in X_{1,N}\setminus\{0\}$ で

$$\alpha(m)>\frac{1}{2}N(N+1)$$

となるものが存在する．$m\geq 1$ としてよい．

(I.1) $\ell\in\mathbb{Z}$ かつ $1\leq\ell\leq N$ なら，$\alpha(-\ell)<m$ となる．

(I.1) の証明: 仮に，$1\leq\ell\leq N$ かつ $\alpha(-\ell)\geq m$ となる $\ell\in\mathbb{Z}$ があるとしよう．$\alpha(m)>N(N+1)/2>N\geq\ell$ となることに注意する．関数 $\beta:X_{1,N}\to\mathbb{Z}_+$ を

$$\beta(x)=\begin{cases} m & \text{if } x=-\ell, \\ \ell & \text{if } x=m, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定める．明らかに，

$$\sum_{x\in X_{1,N}}\beta(x)\geq 1,$$
$$\text{全ての } x\in X_{1,N} \text{ について } \quad \beta(x)\leq\alpha(x), \quad \text{かつ}$$
$$\beta(m)<\alpha(m)$$

となる．さらに，$\sum_{x\in X_{1,N}}\beta(x)x=m(-\ell)+\ell m=0$ となる．これは $\alpha\in\mathcal{X}_{1,N}$ に矛盾する．以上で (I.1) の証明が完了した．　■

$$0 = \sum_{x \in X_{1,N}} \alpha(x) = \sum_{\ell=1}^{N} \alpha(\ell)\ell + \sum_{\ell=1}^{N} \alpha(-\ell)(-\ell)$$

であるから，$\sum_{\ell=1}^{N} \alpha(-\ell)\ell = \sum_{\ell=1}^{N} \alpha(\ell)\ell$ となる．ところが，

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^{N} \alpha(-\ell)\ell &< m\sum_{\ell=1}^{N} \ell \\
&= m\frac{1}{2}N(N+1) \\
&< \alpha(m)m \\
&\leq \sum_{\ell=1}^{N} \alpha(\ell)\ell
\end{aligned}$$

となるので矛盾．これで (I) が示せた． ■

$K \in \mathbb{Z}_{++}$ とする．$L \leq K$ について $\mu(L,N)$ は有限であるとする．このとき，$\mu(K+1,N)$ が有限となることを示せばよい．

(II) 全ての $N \in \mathbb{Z}_{++}$ について $\mu(K+1,N) \leq \mu(K,N)\mu(1,N(N+1)\mu(K,N))$ となる．

(II) の証明: 仮に $N \in \mathbb{Z}_{++}$ について $\mu(K+1,N) > \mu(K,N)\mu(1,N(N+1)\mu(K,N))$ とする．このとき，

$$\sum_{x \in X_{K+1,N}} \alpha(x) > \mu(K,N)\mu(1,N(N+1)\mu(K,N))$$

を満たす関数 $\alpha \in \mathcal{X}_{K+1,N}$ が存在する．関数 $\beta : X_{K,N} \to \mathbb{Z}_+$ を $\beta(y) = \sum_{\ell \in X_{1,N}} \alpha(\ell, y)$ で定める．$\alpha \in \mathcal{X}_{K+1,N}$ より，

$$\sum_{y \in X_{K,N}} \beta(y)y = \sum_{y \in X_{K,N}} \sum_{\ell \in X_{1,N}} \alpha(\ell,y)y = 0$$

となる．また

$$\begin{aligned}
\sum_{y \in X_{K,N}} \beta(y) &= \sum_{y \in X_{K,N}} \sum_{\ell \in X_{1,N}} \alpha(\ell,y) \\
&= \sum_{x \in X_{K+1,N}} \alpha(x) \\
&> \mu(K,N)\mu(1,N(N+1)\mu(K,N))
\end{aligned}$$

となる．よって，自然数 $k > \mu(1, N(N+1)\mu(K,N))$ と関数 $\tilde{\gamma}_j \in \mathcal{X}_{K,N}$ $(j = 1, \ldots, k)$ をうまく取って，全ての $y \in X_{K,N}$ と全ての $j \in \{1, \ldots, k\}$ について $\sum_{j=1}^{k} \tilde{\gamma}_j(y) = \beta(y)$ となるようにできる．全ての $y \in X_{K,N}$ について $\sum_{j=1}^{k} \tilde{\gamma}_j(y) = \sum_{\ell \in X_{1,N}} \alpha(\ell, y)$ であるから，関数 $\gamma_j : X_{K+1,N} \to \mathbb{Z}_+$ $(j = 1, \ldots, k)$ を

全ての $y \in X_{K,N}$ と全ての $j \in \{1, \ldots, k\}$ について $\displaystyle\sum_{\ell \in X_{1,N}} \gamma_j(\ell, y) = \tilde{\gamma}_j(y)$, かつ

全ての $(\ell, y) \in X_{K+1,N}$ について $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} \gamma_j(\ell, y) = \alpha(\ell, y)$

を満たすように取ることができる．$j = 1, \ldots, k$ について,

$$\chi_j = \sum_{\ell \in X_{1,N}} \sum_{y \in X_{K,N}} \gamma_j(\ell, y)\ell \in \mathbb{Z}$$

とおく．

$$\sum_{j=1}^{k} \chi_j = \sum_{\ell \in X_{1,N}} \sum_{y \in X_{K,N}} \sum_{j=1}^{k} \gamma_j(\ell, y)\ell = \sum_{\ell \in X_{1,N}} \sum_{y \in X_{K,N}} \alpha(\ell, y)\ell = 0$$

となる．$\tilde{\gamma}_j \in \mathcal{X}_{K,N}$ であるから, 全ての $\ell \in X_{1,N}$ について

$$\begin{aligned}
\sum_{y \in X_{K,N}} \gamma_j(\ell, y) &\leq \sum_{y \in X_{K,N}} \sum_{n \in X_{1,N}} \gamma_j(n, y) \\
&= \sum_{y \in X_{K,N}} \tilde{\gamma}_j(y) \\
&\leq \mu(K, N)
\end{aligned}$$

となる．従って, 全ての $j \in \{1, \ldots, k\}$ について

$$|\chi_j| \leq \sum_{\ell \in X_{1,N}} |\ell| \mu(K, N) = N(N+1)\mu(K, N)$$

となる．よって，各 $j \in \{1, \ldots, k\}$ について $\chi_j \in X_{1,N(N+1)\mu(K,N)}$ となる．$k > \mu(1, N(N+1)\mu(K,N))$ であるから, $\{1, \ldots, k\}$ の部分集合 J で, $\emptyset \neq J \subsetneq \{1, \ldots, k\}$ かつ $\sum_{j \in J} \chi_j = 0$ を満たすものが存在する．関数 $\lambda : X_{K+1,N} \to \mathbb{Z}_+$ を

$$\lambda(x) = \sum_{j \in J} \gamma_j(x)$$

で定義する．

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in X_{K+1,N}} \lambda(x) x^{(1)} &= \sum_{\ell \in X_{1,N}} \sum_{y \in X_{K,N}} \sum_{j \in J} \gamma_j(\ell, y)\ell \\
&= \sum_{j \in J} \chi_j \\
&= 0
\end{aligned}$$

となる．また，

$$\begin{aligned}\sum_{(\ell,y)\in X_{K+1,N}} \lambda(\ell,y)y &= \sum_{y\in X_{K,N}}\sum_{\ell\in X_{1,N}} \lambda(\ell,y)y \\ &= \sum_{j\in J}\sum_{y\in X_{K,N}}\sum_{\ell\in X_{1,N}} \gamma_j(\ell,y)y \\ &= \sum_{j\in J}\sum_{y\in X_{K,N}} \tilde{\gamma}_j(y)y \\ &= 0\end{aligned}$$

となる．最後の等号は，全ての $j\in J$ について $\tilde{\gamma}_j \in \mathcal{X}_{K,N}$ であることによる．従って，$\sum_{x\in X_{K+1,N}}\lambda(x)x = 0$ である．$J\neq\emptyset$ であるから，$\sum_{x\in X_{K+1,N}}\lambda(x)\geq 1$ となる．全ての $x\in X_{K+1,N}$ について

$$\lambda(x) = \sum_{j\in J}\gamma_j(x) \leq \sum_{j=1}^{k}\gamma_j(x) = \alpha(x)$$

となることは明らか．$J\subsetneq\{1,\ldots,k\}$ であるから，$X_{K+1,N}$ の元 x^* で

$$\lambda(x^*) < \sum_{j=1}^{k}\gamma_j(x^*) = \alpha(x^*)$$

を満たすものが存在する．これは，$\alpha\in\mathcal{X}_{K+1,N}$ に矛盾する．これで (II) が示せた．以上で，定理 A の証明が完了した．　■

補題 B (Hadamard の不等式): $B=(b_1,\ldots,b_\ell)$ を $\ell\times\ell$ の実行列とする．このとき，

$$|\det B| \leq \prod_{j=1}^{\ell}\|b_j\|$$

が成り立つ．但し，$\|\cdot\|$ はユークリッド・ノルムである．

証明は，Dunford-Schwartz (1963, pp.1018-1019) を参照されたい．

定理 C: L, K, と N を自然数とする．$X_{L,K}$ の部分集合 $\{z_1,\ldots,z_s\}$ は，$(\eta^{(1)},\ldots,\eta^{(s)})\in\mathbb{Z}^s_{++}$ について $\sum_{j=1}^{s}\eta^{(j)}z_j = 0$ を満たすとする．$H=\mathrm{span}\{z_1,\ldots,z_s\}$ とおく．また

$$q = L^{\frac{L}{2}}\max\{K^L,(2N)^L\} + L^{\frac{L+2}{2}}(\mu(L,K)-1)\max\{K^{L-1}N,(2N)^L\}$$

とおく．このとき，$\mathrm{co}(E)\cap H\neq\emptyset$ となる勝手な $E\subset X_{L,N}$ について，$q_0\leq q$ となる $q_0\in\mathbb{Z}_{++}$ と，$\{x_0,x_1,\ldots,x_m\}\subset E$ と，$(\alpha^{(0)},\alpha^{(1)},\ldots,\alpha^{(m)})\in\mathbb{Q}^{m+1}_{++}$ と，それに

$(\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \ldots, \beta^{(s)}) \in \mathbb{Q}_+^s$ を適当にとって

$$\sum_{j=0}^{m} \alpha^{(j)} + \sum_{j=1}^{s} \beta^{(j)} = 1,$$

$$\text{全ての } j \in \{0, 1, \ldots, m\} \text{ について} \quad q_0\, \alpha^{(j)} \in \mathbb{Z}_{++},$$

$$\text{全ての } j \in \{1, \ldots, s\} \text{ について} \quad q_0\, \beta^{(j)} \in \mathbb{Z}_{+}, \text{ かつ}$$

$$\sum_{j=0}^{m} \alpha^{(j)}\, x_j + \sum_{j=1}^{s} \beta^{(j)}\, z_j = 0$$

を満たすようにできる.

定理 C の証明: $\mathrm{co}(E) \cap H \neq \emptyset$ となる $E \subset X_{L,N}$ を勝手に取る. $\{z_1, \ldots, z_\ell\}$ を H の基底であるとしてよい. つまり, $\{z_1, \ldots, z_\ell\}$ は線形独立で, $H = \mathrm{span}\{z_1, \ldots, z_\ell\}$ としてよい. $H = \{0\}$ の時は, 以下の証明を少し変えればよい. 以下, 二つに場合分けして考える.

ケース 1: $E \cap H \neq \emptyset$.

このとき, $E \cap H$ の元 y^* を取ることができる. $\{z_1, \ldots, z_\ell\}$ は H の基底であるから, $y^* = \sum_{j=1}^{\ell} \theta^{(j)}\, z_j$ となるベクトル $(\theta^{(1)}, \ldots, \theta^{(\ell)}) \in \mathbb{R}^\ell$ が一意に存在する. 一般性を失うことなく, $\{z_1, \ldots, z_\ell, u_{\ell+1}, \ldots, u_L\}$ が $\mathbb{R}^L$ の基底であるとしてよい. $\hat{y}^* = (y^{*(1)}, \ldots, y^{*(\ell)})^T \in \mathbb{Z}^\ell$ とおく. また, $j = 1, \ldots, \ell$ について, $\hat{z}_j = (z_j^{(1)}, \ldots, z_j^{(\ell)})^T \in \mathbb{Z}^\ell$ とする. ここで, T はベクトルの転置を表す. 従って, $\hat{y}^*$ と $\hat{z}_j$ は全て列ベクトルとなる. $\{\hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_\ell\}$ が線形独立であることに注意する. $B_1 = (\hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_\ell)$ とおくと,

$$B_1 \begin{pmatrix} \theta^{(1)} \\ \vdots \\ \theta^{(\ell)} \end{pmatrix} = \hat{y}^*$$

であるから, Cramer の公式より, 各 $j = 1, \ldots, \ell$ について

$$\theta^{(j)} = \frac{1}{\det B_1} \cdot \det(\hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_{j-1}, \hat{y}^*, \hat{z}_{j+1}, \ldots, \hat{z}_\ell) \in \mathbb{Q}$$

となる. Hadamard の不等式 (補題 B) を使って,

$$1 \leq |\det B_1| \leq \ell^{\frac{\ell}{2}} K^\ell \quad \text{かつ}$$

$$\text{各 } j = 1, \ldots, \ell \text{ について} \quad |\det(\hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_{j-1}, \hat{y}^*, \hat{z}_{j+1}, \ldots, \hat{z}_\ell)| \leq \ell^{\frac{\ell}{2}} K^{\ell-1} N$$

を得る. 従って, 全ての $j \in \{1, \ldots, \ell\}$ について

$$|\det B_1|\, \theta^{(j)} \in \mathbb{Z} \quad \text{かつ} \quad |\det B_1|\, |\theta^{(j)}| \leq \ell^{\frac{\ell}{2}} K^{\ell-1} N$$

となる．定理 A より，$\{z_1,\dots,z_s\}\subset X_{L,K}$ かつ $\sum_{j=1}^{s}\eta^{(j)}z_j=0$ であることから，全ての $j\in\{1,\dots,s\}$ について，

$$\sum_{i=1}^{s}\zeta_j^{(i)}\le\mu(L,K)-1 \quad \text{かつ}$$
$$-z_j=\sum_{i=1}^{s}\zeta_j^{(i)}z_i$$

となる $(\zeta_j^{(1)},\dots,\zeta_j^{(s)})\in\mathbb{Z}_+^s$ が存在する．$J_1=\{j\in\{1,\dots,\ell\}\,|\,\theta^{(j)}>0\}$，$J_2=\{1,\dots,\ell\}\setminus J_1$，そして $J_3=\{\ell+1,\dots,s\}$ とおく．

$$\begin{aligned}
0 &= y^*+\sum_{j\in J_1}-\theta^{(j)}z_j+\sum_{j\in J_2}-\theta^{(j)}z_j\\
&= y^*+\sum_{j\in J_1}\theta^{(j)}\sum_{i=1}^{s}\zeta_j^{(i)}z_i+\sum_{j\in J_2}-\theta^{(j)}z_j\\
&= y^*+\sum_{i\in J_1\cup J_3}\sum_{j\in J_1}\theta^{(j)}\zeta_j^{(i)}z_i+\sum_{i\in J_2}\Big(-\theta^{(i)}+\sum_{j\in J_1}\theta^{(j)}\zeta_j^{(i)}\Big)z_i
\end{aligned}$$

となる．$i\in\{1,\dots,s\}$ について，

$$\pi^{(i)}=\begin{cases}\sum_{j\in J_1}\theta^{(j)}\zeta_j^{(i)} & \text{if } i\in J_1\cup J_3,\\ -\theta^{(i)}+\sum_{j\in J_1}\theta^{(j)}\zeta_j^{(i)} & \text{if } i\in J_2\end{cases}$$

と定める．明らかに，全ての $i\in\{1,\dots,s\}$ について $|\det B_1|\pi^{(i)}\in\mathbb{Z}_+$ となる．

$$\alpha=\frac{1}{1+\sum_{j=1}^{s}\pi^{(j)}}\in\mathbb{Q}_{++},$$

$$\text{各 } i=1,\dots,s \text{ について}\quad \beta^{(i)}=\frac{\pi^{(i)}}{1+\sum_{j=1}^{s}\pi^{(j)}}\in\mathbb{Q}_+$$

とおく．よって，$\alpha+\sum_{i=1}^{s}\beta^{(i)}=1$ かつ $0=\alpha y^*+\sum_{i=1}^{s}\beta^{(i)}z_i$ となる．$q_1=|\det B_1|(1+\sum_{j=1}^{s}\pi^{(j)})$ とおくと，$q_1\in\mathbb{Z}_{++}$ であり，$q_1\alpha\in\mathbb{Z}_{++}$ であり，さらに，全ての $i\in\{1,\dots,s\}$ について $q_1\beta^{(i)}\in\mathbb{Z}_+$ となる．また，

$$\begin{aligned}
q_1 &= |\det B_1|\Big\{1+\sum_{j\in J_1}\theta^{(j)}\sum_{i=1}^{s}\zeta_j^{(i)}-\sum_{j\in J_2}\theta^{(j)}\Big\}\\
&= |\det B_1|+\sum_{j\in J_1}|\det B_1|\theta^{(j)}\sum_{i=1}^{s}\zeta_j^{(i)}-\sum_{j\in J_2}|\det B_1|\theta^{(j)}\\
&\le |\det B_1|+(\#J_1)\ell^{\frac{\ell}{2}}K^{\ell-1}N(\mu(L,K)-1)+(\#J_2)\ell^{\frac{\ell}{2}}K^{\ell-1}N\\
&\le \ell^{\frac{\ell}{2}}K^{\ell}+\ell^{\frac{\ell+2}{2}}K^{\ell-1}N(\mu(L,K)-1)\\
&\le q
\end{aligned}$$

となる．これで，ケース 1 については，所望の性質を得た．

ケース 2: $E \cap H = \emptyset$.

集合 $\mathrm{co}(E) \cap H$ は非空コンパクトであるから, Krein-Milman の定理より, 集合 $\mathrm{co}(E) \cap H$ は端点 y^* を有する．$\{z_1, \ldots, z_\ell\}$ は H の基底であるから, $y^* = \sum_{j=1}^{\ell} \theta^{(j)} z_j$ となるベクトル $(\theta^{(1)}, \ldots, \theta^{(\ell)}) \in \mathbb{R}^\ell$ が一意に存在する．$y^* \in \mathrm{co}(E) \setminus E$ となるから, アフィン独立であるベクトル $\{x_0, x_1, \ldots, x_m\} \subset E$ と $(\kappa^{(0)}, \kappa^{(1)}, \ldots, \kappa^{(m)}) \in \mathbb{R}^{m+1}_{++}$ を適当に選ぶことで

$$\sum_{j=0}^{m} \kappa^{(j)} = 1 \quad \text{かつ} \quad y^* = \sum_{j=0}^{m} \kappa^{(j)} x_j = \sum_{j=1}^{m} \kappa^{(j)} (x_j - x_0) + x_0$$

を満たすようにできる．

(III) $\{z_1, \ldots, z_\ell, x_1 - x_0, \ldots, x_m - x_0\}$ は線形独立である．

(III) の証明: 仮に，$\{z_1, \ldots, z_\ell, x_1 - x_0, \ldots, x_m - x_0\}$ が線形従属であるとする．$\{z_1, \ldots, z_\ell\}$ と $\{x_1 - x_0, \ldots, x_m - x_0\}$ はどちらも線形独立であるから，非ゼロのベクトル $(\sigma^{(1)}, \ldots, \sigma^{(\ell)}) \in \mathbb{R}^\ell \setminus \{0\}$ と $(\tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(m)}) \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ をうまく取って

$$\sum_{j=1}^{\ell} \sigma^{(j)} z_j + \sum_{j=1}^{m} \tau^{(j)} (x_j - x_0) = 0$$

となるようにできる．$-\sum_{j=1}^{\ell} \theta^{(j)} z_j + \sum_{j=1}^{m} \kappa^{(j)} (x_j - x_0) + x_0 = 0$ であることより，全ての $t \in \mathbb{R}$ について

$$\sum_{j=1}^{\ell} (t\sigma^{(j)} - \theta^{(j)}) z_j + \sum_{j=1}^{m} (t\tau^{(j)} + \kappa^{(j)})(x_j - x_0) + x_0 = 0$$

となる．各 $j \in \{1, \ldots, m\}$ について $\kappa^{(j)} > 0$ であり，$\sum_{j=1}^{m} \kappa^{(j)} < 1$ であるから, 十分小さい $t_1 > 0$ をとって

$$\text{全ての } j \in \{1, \ldots, m\} \text{ について，} \quad \kappa^{(j)} + t_1\tau^{(j)} > 0 \quad \text{かつ} \quad \kappa^{(j)} - t_1\tau^{(j)} > 0, \quad \text{さらに}$$
$$\sum_{j=1}^{m} (\kappa^{(j)} + t_1\tau^{(j)}) < 1 \quad \text{かつ} \quad \sum_{j=1}^{m} (\kappa^{(j)} - t_1\tau^{(j)}) < 1$$

を満たすようにできる．

$$y_1 = \sum_{j=1}^{m} (\kappa^{(j)} + t_1\tau^{(j)})(x_j - x_0) + x_0 = \sum_{j=1}^{\ell} (\theta^{(j)} - t_1\sigma^{(j)}) z_j$$

とおく．また

$$y_2 = \sum_{j=1}^{m}(\kappa^{(j)} - t_1\tau^{(j)})(x_j - x_0) + x_0 = \sum_{j=1}^{\ell}(\theta^{(j)} + t_1\sigma^{(j)})z_j$$

とおく．このとき，$y_1, y_2 \in \mathrm{co}(E) \cap H$ となることはよい．また，

$$\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 = \sum_{j=1}^{m}\kappa^{(j)}(x_j - x_0) + x_0 = y^* \quad \text{かつ}$$

$$y_1 - y_2 = 2t_1\sum_{j=1}^{m}\tau^{(j)}(x_j - x_0) \neq 0$$

となる．これは，y^* が $\mathrm{co}(E) \cap H$ の端点であることに矛盾する．これで (III) の証明が完了した． ■

一般性を失うことなく，$\{z_1, \ldots, z_\ell, x_1 - x_0, \ldots, x_m - x_0, u_{\ell+m+1}, \ldots, u_L\}$ は $\mathbb{R}^L$ の基底であるとしてよい．各 $j = 1, \ldots, \ell$ について $\hat{z}_j = (z_j^{(1)}, \ldots, z_j^{(\ell+m)})^T \in \mathbb{Z}^{\ell+m}$ とおく．また，各 $i = 0, 1, \ldots, m$ について $\hat{x}_i = (x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(\ell+m)})^T \in \mathbb{Z}^{\ell+m}$ とおく．$\{\hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_\ell, \hat{x}_1 - \hat{x}_0, \ldots, \hat{x}_m - \hat{x}_0\}$ が線形独立になることに注意しよう．$B_2 = (\hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_\ell, \hat{x}_1 - \hat{x}_0, \ldots, \hat{x}_m - \hat{x}_0)$ とおく．

$$B_2 \begin{pmatrix} \theta^{(1)} \\ \vdots \\ \theta^{(\ell)} \\ -\kappa^{(1)} \\ \vdots \\ -\kappa^{(m)} \end{pmatrix} = \hat{x}_0$$

となるから，Cramer の公式より，各 $j = 1, \ldots, \ell$ と各 $i = 1, \ldots, m$ について

$$\theta^{(j)} = \frac{1}{\det B_2} \cdot \det(\hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_{j-1}, \hat{x}_0, \hat{z}_{j+1}, \ldots, \hat{z}_\ell, \hat{x}_1 - \hat{x}_0, \ldots, \hat{x}_m - \hat{x}_0) \in \mathbb{Q} \quad \text{かつ}$$

$$\kappa^{(i)} = -\frac{1}{\det B_2} \cdot \det(\hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_\ell, \hat{x}_1 - \hat{x}_0, \ldots, \hat{x}_{i-1} - \hat{x}_0, \hat{x}_0, \hat{x}_{i+1} - \hat{x}_0, \ldots, \hat{x}_m - \hat{x}_0)$$
$$\in \mathbb{Q}_{++}$$

となる．Hadamard の不等式を使って，

$$
\begin{aligned}
&1 \le |\det B_2| \le (\ell+m)^{\frac{\ell+m}{2}} K^{\ell}(2N)^m, \\
&\text{各 } j = 1,\dots,\ell \text{ について} \\
&\quad |\det(\hat{z}_1,\dots,\hat{z}_{j-1},\hat{x}_0,\hat{z}_{j+1},\dots,\hat{z}_\ell,\hat{x}_1-\hat{x}_0,\dots,\hat{x}_m-\hat{x}_0)| \\
&\qquad\qquad \le (\ell+m)^{\frac{\ell+m}{2}} K^{\ell-1}N(2N)^m, \quad \text{かつ} \\
&\text{各 } i = 1,\dots,m \text{ について} \\
&\quad |\det(\hat{z}_1,\dots,\hat{z}_\ell,\hat{x}_1-\hat{x}_0,\dots,\hat{x}_{i-1}-\hat{x}_0,\hat{x}_0,\hat{x}_{i+1}-\hat{x}_0,\dots,\hat{x}_m-\hat{x}_0)| \\
&\qquad\qquad \le (\ell+m)^{\frac{\ell+m}{2}} K^{\ell}N(2N)^{m-1}
\end{aligned}
$$

を得る．また，

$$
\begin{aligned}
&\text{全ての } j \in \{1,\dots,\ell\} \text{ について，} \quad |\det B_2|\,\theta^{(j)} \in \mathbb{Z}, \text{ かつ} \\
&\text{全ての } i \in \{1,\dots,m\} \text{ について，} \quad |\det B_2|\,\kappa^{(i)} \in \mathbb{Z}_{++}
\end{aligned}
$$

となることもよい．ケース 1 の時と同様の手順を踏むことで，

$$
\begin{aligned}
&\text{全ての } j \in \{1,\dots,s\} \text{ について，} \quad |\det B_2|\,\pi^{(j)} \in \mathbb{Z}_+, \\
&|\det B_2| \left(1 + \sum_{i=1}^{s} \pi^{(i)}\right) \\
&\qquad \le (\ell+m)^{\frac{\ell+m}{2}} K^{\ell}(2N)^m + (\ell+m)^{\frac{\ell+m}{2}} \ell K^{\ell-1}N(2N)^m(\mu(L,K)-1), \text{ かつ} \\
&0 = \sum_{i=0}^{m} \frac{\kappa^{(i)}}{1+\sum_{j=1}^{s}\pi^{(j)}}\, x_i + \sum_{i=1}^{s} \frac{\pi^{(i)}}{1+\sum_{j=1}^{s}\pi^{(j)}}\, z_i
\end{aligned}
$$

となるベクトル $(\pi^{(1)},\dots,\pi^{(s)}) \in \mathbb{Q}_+^s$ が存在することが示せる．

$$
\begin{aligned}
&q_2 = |\det B_2| \left(1 + \sum_{i=1}^{s} \pi^{(i)}\right) \in \mathbb{Z}_{++}, \\
&\text{各 } i \in \{0,1,\dots,m\} \text{ について，} \quad \alpha^{(i)} = \frac{\kappa^{(i)}}{1+\sum_{j=1}^{s}\pi^{(j)}} \in \mathbb{Q}_{++}, \quad \text{そして} \\
&\text{各 } i \in \{1,\dots,s\} \text{ について，} \quad \beta^{(i)} = \frac{\pi^{(i)}}{1+\sum_{j=1}^{s}\pi^{(j)}} \in \mathbb{Q}_+
\end{aligned}
$$

とおく．よって，

$$
\begin{aligned}
& q_2 \le q, \\
& \sum_{i=0}^{m} \alpha^{(i)} + \sum_{j=1}^{s} \beta^{(j)} = 1, \\
& \text{全ての } i \in \{0,1,\ldots,m\} \text{ について，} \quad q_2\,\alpha^{(i)} \in \mathbb{Z}_{++}, \\
& \text{全ての } j \in \{1,\ldots,s\} \text{ について，} \quad q_2\,\beta^{(j)} \in \mathbb{Z}_{+}, \quad \text{かつ} \\
& \sum_{i=0}^{m} \alpha^{(i)}\,x_i + \sum_{j=1}^{s} \beta^{(j)}\,z_j = 0
\end{aligned}
$$

となる．これで，ケース 2 についても所望の帰結を得た．以上で定理 C の証明が完了した． ■

定理 D: $v \in \mathbb{Z}^L$ とし，E を $E + \mathbb{Z}^L_+ = E$ を満たす $\{x \in \mathbb{Z}^L \mid x \ge v\}$ の非空部分集合とする．$j = 1,\ldots,\ell$ について $z_j \in \mathbb{Z}^L$ とし，$H = \mathrm{span}\{z_1,\ldots,z_\ell\}$ とおく．このとき，$\mathrm{co}(E) \cap H = \emptyset$ なら，ベクトル $p \in H^\perp \cap \mathbb{Z}^L_+$ と正の数 ε を適当にとって，全ての $z \in \mathrm{co}(E)$ について

$$p \cdot z \ge \varepsilon$$

となるようにできる．

この定理は，Inoue (2004) の Theorem B から容易に示せる．

参考文献

Anderson, R.M., 1978, An elementary core equivalence theorem, Econometrica 46, No. 6, 1483-1487.

Aumann, R.J., 1964, Markets with a continuum of traders, Econometrica 32, No. 1-2, 39-50.

Bewley, T., 1973, Edgeworth's conjecture, Econometrica 41, No. 3, 425-454.

Debreu, G. and H. Scarf, 1963, A limit theorem on the core of an economy, International Economic Review 4, No. 3, 235-246.

Dunford, N. and J. Schwartz, 1963, Linear Operators, Part II: Spectral Theory, Self Adjoint Operators in Hilbert Space (Interscience Publishers, New York).

Inoue, T., 2003, Existence of equilibrium in economies with indivisible commodities and savings, mimeo.

Inoue, T., 2004, Indivisible commodities and efficiency: welfare theorems and core equivalence in an atomless economy, mimeo.

Mas-Colell, A., 1985, The theory of general economic equilibrium: a differentiable approach (Cambridge University Press, Cambridge).

Shapley, L. and H. Scarf, 1974, On cores and indivisibility, Journal of Mathematical Economics 1, 23-37.

Wako, J., 1984, A note on the strong core of a market with indivisible goods, Journal of Mathematical Economics 13, 189-194.

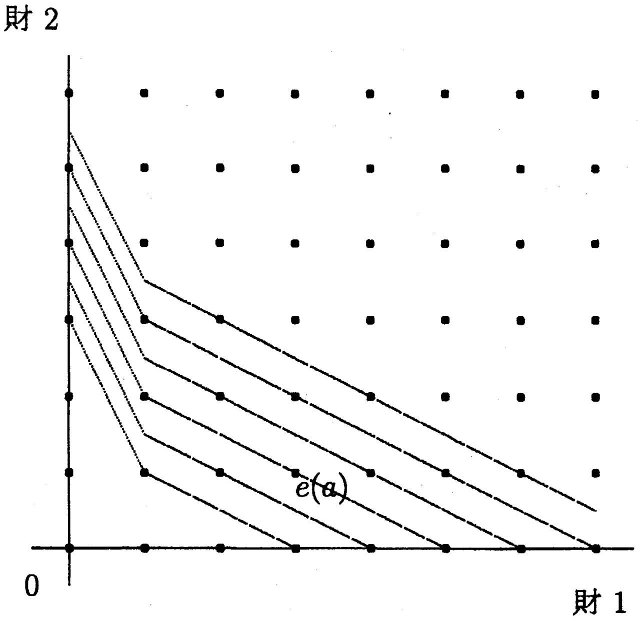

図 1: 主体 a の初期保有量ベクトルと無差別曲線

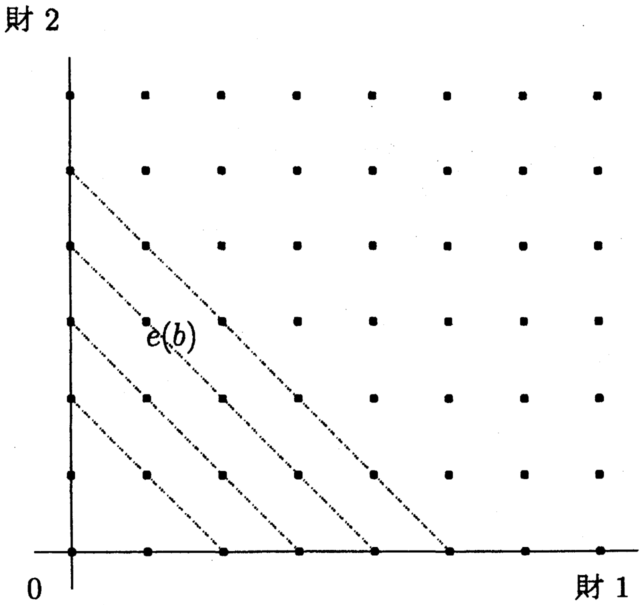

図 2: 主体 b の初期保有量ベクトルと無差別曲線