正則な冪零ヘッセンバーグ多様体のコホモロジー環の基底について

大阪大学大学院情報科学研究科，大阪市立大学数学研究所
堀口　達也
TATSUYA HORIGUCHI
DEPARTMENT OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS, GRADUATE SCHOOL OF INFORMATION SCIENCE AND TECHNOLOGY, OSAKA UNIVERSITY / OSAKA CITY UNIVERSITY ADVANCED MATHEMATICAL INSTITUTE

1. 序文

ヘッセンバーグ多様体は1980年代後半頃に導入された旗多様体の部分多様体であり ([7], [6])，そのトポロジーは近年の進展により，グラフ理論や超平面配置などの様々な分野と関連している比較的新しい研究対象である ([13], [5], [9] [3])．ヘッセンバーグ多様体に興味のある方は [2] も参照して頂ければ幸いである．

本稿では，正則な冪零ヘッセンバーグ多様体と呼ばれるクラスに着目する．そのコホモロジー環の構造は [1] で与えられ，さらに驚くことに超平面配置の言葉を用いて記述できることも分かっている ([3])．今回，正則な冪零ヘッセンバーグ多様体のコホモロジーのベクトル空間としての基底がどのように与えられるかを Schubert calculus の観点から考え，結果として positive root の積で与えられるという結果が得られた．本稿では A 型のときだけを述べるが，A 型以外の他のいくつかの Lie type でも基底が得られた．詳細については，[8] をご参照頂きたい．本研究は，榎園誠氏 (東京理科大学)，長岡高広氏 (京都大学)，土谷昭善氏 (東京大学) との共同研究である．

2. ヘッセンバーグ多様体

旗多様体 $F\ell(\mathbb{C}^n)$ は，$\mathbb{C}^n$ の線形部分空間の列 $V_\bullet := (V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = \mathbb{C}^n)$ 全体からなる空間である．ここで，各 V_i は複素 i 次元の $\mathbb{C}^n$ の部分ベクトル空間である．本稿を通して以下の記号を用いる．

$$[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$$

定義 2.1. 関数 $h : [n] \to [n]$ が**ヘッセンバーグ関数**であるとは，以下の 2 つの条件を満たすときをいう．

(i) $h(1) \leq h(2) \leq \ldots \leq h(n)$
(ii) $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して，$h(j) \geq j$

ヘッセンバーグ関数 h を，各値を並べた列 $h = (h(1), h(2), \ldots, h(n))$ で表す．

ヘッセンバーグ関数 h をしばしば視覚化することがある．まず $n \times n$ の箱の集まりを考え，各 j 列目に $h(j)$ 個の箱を上から塗ることで，h を表す．

例 2.2. $n = 5$ とする．$h = (3, 3, 4, 5, 5)$ はヘッセンバーグ関数であり，以下の $Figure$ 1 が箱の集まりによる表示である．

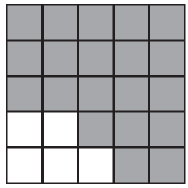

FIGURE 1. ヘッセンバーグ関数 $h = (3, 3, 4, 5, 5)$ に対応する箱の集まり

定義 2.3. 線形写像 $X : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ とヘッセンバーグ関数 $h : [n] \to [n]$ に対して，**ヘッセンバーグ多様体** $\mathrm{Hess}(X, h)$ は以下で定義される旗多様体 $F\ell(\mathbb{C}^n)$ の部分多様体である．

$$\mathrm{Hess}(X, h) = \{V_\bullet \in F\ell(\mathbb{C}^n) \mid XV_i \subset V_{h(i)} \text{ for } i = 1, 2, \ldots, n\}$$

X が零写像または $h = (n, n, \ldots, n)$ のとき，ヘッセンバーグ多様体 $\mathrm{Hess}(X, h)$ は全体の旗多様体 $F\ell(\mathbb{C}^n)$ に一致することが定義から分かる．また，任意の可逆行列 $g \in GL(n, \mathbb{C})$ に対して，$\mathrm{Hess}(X, h) \cong \mathrm{Hess}(gXg^{-1}, h); V_\bullet \mapsto gV_\bullet$ であるので，X をジョルダン標準形と仮定してよい．

本稿では，X が正則な冪零写像 N(冪零行列でジョルダンブロックがただ 1 つからなるもの) を考える．つまり，ジョルダン標準形に直すと

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

$X = N$ のときのヘッセンバーグ多様体 $\mathrm{Hess}(N, h)$ を**正則な冪零ヘッセンバーグ多様体**と呼ぶ．

$h = (2, 3, 4, \ldots, n, n)$ とする正則な冪零ヘッセンバーグ多様体 $\mathrm{Hess}(N, h)$ は**ピーターソン多様体**と呼ばれ，旗多様体の量子コホモロジーと関連する ([11], [12])．正則な冪零ヘッセンバーグ多様体はピーターソン多様体と旗多様体を離散的につなぐものと思える．以下は，正則な冪零ヘッセンバーグ多様体 $\mathrm{Hess}(N, h)$ の幾何学的性質である．

定理 2.4 ([4], [10], [11], [14], [15])**.** 次が成立．

(1) $\mathrm{Hess}(N, h)$ は既約な代数多様体である．
(2) $\mathrm{Hess}(N, h)$ は一般に特異点をもつ．
(3) $\mathrm{Hess}(N, h)$ の複素次元は $\sum_{j=1}^{n}(h(j) - j)$ である．
(4) $\mathrm{Hess}(N, h)$ は複素セル分割 (complex affine paving) をもつ．特に，$\mathrm{Hess}(N, h)$ の奇数次コホモロジーは消えている．

定理 2.4 (3) における $\mathrm{Hess}(N, h)$ の複素次元 $\sum_{j=1}^{n}(h(j) - j)$ は，ヘッセンバーグ関数 h を塗られた箱の集まりと思えば，対角線より真に左下に位置する塗られた箱の総数である．例えば，$h = (3, 3, 4, 5, 5)$ のとき，$\mathrm{Hess}(N, h)$ の複素次元は 5 である．

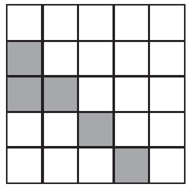

FIGURE 2. $h = (3,3,4,5,5)$ のとき，$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hess}(N,h) = 5$

3. 正則な冪零ヘッセンバーグ多様体のコホモロジー環

正則な冪零ヘッセンバーグ多様体 $\mathrm{Hess}(N,h)$ のコホモロジー環[1]の明示的表示を述べる．そのためにはまず，$1 \leq j \leq i \leq n$ に対して，多項式 $f_{i,j} \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ を次のように導入する．

$$f_{i,j} := \sum_{k=1}^{j} \Big(\prod_{\ell=j+1}^{i} (x_k - x_\ell) \Big) x_k$$

ここで，$i = j$ のとき $\prod_{\ell=j+1}^{i}(x_k - x_\ell) = 1$ とする．

定理 3.1 ([1]). 次数付き環としての次の同型が成立．

$$H^*(\mathrm{Hess}(N,h)) \cong \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]/(f_{h(1),1}, f_{h(2),2}, \ldots, f_{h(n),n})$$

ここで，x_i の次数は 2 である．

可換環論における事実を用いることで次が得られる．

系 3.2. $H^*(\mathrm{Hess}(N,h))$ はポアンカレ双対代数である．また，$\mathrm{Hess}(N,h)$ のポアンカレ多項式は次で与えられる．

$$\mathit{Poin}(\mathrm{Hess}(N,h), \sqrt{t}) = \prod_{j=1}^{n} (1 + t + t^2 + \cdots + t^{h(j)-j}).$$

4. 主結果

定理 3.1 と系 3.2 から，正則な冪零ヘッセンバーグ多様体 $\mathrm{Hess}(N,h)$ のコホモロジー環の明示的表示とポアンカレ多項式が分かっている．では，ベクトル空間としての基底がどのような形で得られるかという問題を，Schubert calculus の観点から今回考え，結果として次が得られた．

A 型 positive root を $\alpha_{i,j} := x_j - x_i$ $(1 \leq j < i \leq n)$ と書く．

定理 4.1 ([8]). 次の *positive root* の積たち

$$\prod_{j=1}^{n} \alpha_{h(j),j} \cdot \alpha_{h(j)-1,j} \cdots \alpha_{h(j)-m_j+1,j} \qquad (0 \leq m_j \leq h(j) - j) \tag{4.1}$$

は $H^*(\mathrm{Hess}(N,h))$ の基底をなす．
ここで，$m_j = 0$ のときは $\alpha_{h(j),j} \cdot \alpha_{h(j)-1,j} \cdots \alpha_{h(j)-m_j+1,j} = 1$ とする．

[1] コホモロジーは実数係数の特異コホモロジーを表す．

例 4.2. 定理 4.1 に現れる積 (4.1) は視覚的には次のようである．$n=5$ とし，ヘッセンバーグ関数 $h=(3,3,4,5,5)$ を考える．まず，h をいつものように塗られた箱の集まりと思い，対角線より真に左下にある (i,j) 座標の塗られた箱に，*positive root* $\alpha_{i,j}=x_j-x_i$ を割り振る．

$\alpha_{2,1}$				
$\alpha_{3,1}$	$\alpha_{3,2}$			
		$\alpha_{4,3}$		
			$\alpha_{5,4}$	

各 j 列，下から m_j 個の *positive root* を取り，それらを掛けたものが

$$\alpha_{h(j),j}\cdot\alpha_{h(j)-1,j}\cdots\alpha_{h(j)-m_j+1,j}$$

である．各 j 列に対しこの操作を行い，それらの積を取ったものが (4.1) である．例えば，$(m_1,m_2,m_3,m_4,m_5)=(2,1,0,1,0)$ のとき，(4.1) は

$$(\alpha_{3,1}\alpha_{2,1})\cdot(\alpha_{3,2})\cdot 1\cdot(\alpha_{5,4})\cdot 1=(x_1-x_3)(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_4-x_5)$$

である．一般に $h(n)=n$ より，$m_n=0$ に注意．

二つのヘッセンバーグ関数 h,h' に対し，$h'\subset h$ を，任意の $j=1,\ldots,n$ に対し $h'(j)\leq h(j)$ が成り立つとき，と定める．正則な冪零ヘッセンバーグ多様体 $\mathrm{Hess}(N,h)$ を与えたとき，ヘッセンバーグ多様体の定義から，$h'\subset h$ に対する $\mathrm{Hess}(N,h')$ は $\mathrm{Hess}(N,h)$ の部分多様体である．系 3.2 より，$\mathrm{Hess}(N,h)$ のコホモロジーにおいて $\mathrm{Hess}(N,h')$ のポアンカレ双対が定義され，そのポアンカレ双対 $[\mathrm{Hess}(N,h')]\in H^*(\mathrm{Hess}(N,h))$ は定数倍を除いて，次と一致することが知られている．

$$\prod_{j=1}^{n}\alpha_{h(j),j}\cdot\alpha_{h(j)-1,j}\cdots\alpha_{h'(j)+1,j}$$

ただし，$h'(j)=h(j)$ のときは $\alpha_{h(j),j}\cdot\alpha_{h(j)-1,j}\cdots\alpha_{h'(j)+1,j}=1$ とする．これは，定理 4.1 に現れる積 (4.1) において，$m_j=h(j)-h'(j)$ としたものなので，次の系が得られる．

系 4.3. 正則な冪零ヘッセンバーグ多様体 $\mathrm{Hess}(N,h)$ を任意に一つ与える．このとき，$\mathrm{Hess}(N,h)$ のコホモロジーにおける $\mathrm{Hess}(N,h')$ のポアンカレ双対たち

$$[\mathrm{Hess}(N,h')]\in H^*(\mathrm{Hess}(N,h))\qquad(h'\subset h)$$

は 1 次独立である．

References

[1] H. Abe, M. Harada, T. Horiguchi, and M. Masuda, *The cohomology rings of regular nilpotent Hessenberg varieties in Lie type A*, to appear in Int. Math. Res. Not. IMRN., DOI: 10.1093/imrn/rnx275.

[2] H. Abe and T. Horiguchi, *A survey of recent developments on Hessenberg varieties*, arXiv:1904.11155.

[3] T. Abe, T. Horiguchi, M. Masuda, S. Murai, and T. Sato, *Hessenberg varieties and hyperplane arrangements*, to appear in J. Reine Angew. Math., DOI: 10.1515/crelle-2018-0039.
[4] D. Anderson and J. Tymoczko, *Schubert polynomials and classes of Hessenberg varieties*, J. Algebra **323** (2010), no. 10, 2605–2623.
[5] P. Brosnan and T. Chow, *Unit interval orders and the dot action on the cohomology of regular semisimple Hessenberg varieties*, Adv. Math. **329** (2018), 955–1001.
[6] F. De Mari, C. Procesi, and M. A. Shayman, *Hessenberg varieties*, Trans. Amer. Math. Soc. **332** (1992), no. 2, 529–534.
[7] F. De Mari and M. A. Shayman, *Generalized Eulerian numbers and the topology of the Hessenberg variety of a matrix*, Acta Appl. Math. **12** (1988), no. 3, 213–235.
[8] M. Enokizono, T. Horiguchi, T. Nagaoka, and A. Tsuchiya, *A basis of the cohomlogy ring of a regular nilpotent Hessenberg variety,* in preparation.
[9] M. Guay-Paquet, *A second proof of the Shareshian–Wachs conjecture, by way of a new Hopf algebra*, arXiv:1601.05498.
[10] E. Insko and A. Yong, *Patch ideals and Peterson varieties*, Transform. Groups **17** (2012), no. 4, 1011–1036.
[11] B. Kostant, *Flag manifold quantum cohomology, the Toda lattice, and the representation with highest weight* ρ, Selecta Math. (N.S.) **2** (1996), 43–91.
[12] K. Rietsch, *Totally positive Toeplitz matrices and quantum cohomology of partial flag varieties*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 363–392.
[13] J. Shareshian and M. L. Wachs, *Chromatic quasisymmetric functions*, Adv. Math. **295** (2016), 497–551.
[14] E. Sommers and J. Tymoczko, *Exponents for B-stable ideals*, Trans. Amer. Math. Soc. **358** (2006), no. 8, 3493–3509.
[15] J. Tymoczko, *Linear conditions imposed on flag varieties*, Amer. J. Math. **128** (2006), no. 6, 1587–1604.