

# 分解不可能かつ可約な擬リーマン対称空間のコンパクト Clifford–Klein 形の存在問題について

前多 啓一 (東京大学数理科学研究科)

Keiichi Maeta (Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo)

2019 年 10 月 8 日

## 1 はじめに

本稿のテーマは、分解不可能かつ可約な擬リーマン対称空間のコンパクト Clifford–Klein 形の存在問題である。まず、2つの視点から問題の背景について述べ、その後、この問題に対し2つのアプローチを試みる。1つは、Lie 群の性質を用いた手法、もう1つは Lie 代数のコホモロジーを用いた手法である。

### 1.1 分解不可能な擬リーマン対称空間

多様体  $M$  の各点  $p \in M$  に対し、その点を孤立固定点に持つような接続を保つ微分同相写像  $\sigma_p : M \rightarrow M$  をつもの対称空間という。この  $\sigma_p$  は点対称と呼ばれる。対称空間  $M$  は等質空間であり、 $M$  に推移的に作用する Lie 群  $G$  およびその閉部分群  $H$  を用いて  $M = G/H$  と表すことができる。この Lie 群の対  $(G, H)$  (また、その Lie 代数の対  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ) を対称対という。対称空間は、球面やトーラス、上半平面など、等質空間の中でも「性質の良い」多様体のクラスであり、幾何学的に重要な例を多く含む。その中でも、リーマン対称空間 ( $H$  がコンパクト) の分類は É. Cartan によって行われた。それは、単連結なリーマン対称空間は接空間への  $H$  の作用によって、既約リーマン対称空間の直積として分解できることに基づき、既約リーマン対称空間を分類するというものである。その後、Berger[Ber57] によって、非リーマン ( $H$  が非コンパクト) を含む既約対称空間が分類された。しかし、擬リーマン対称空間の分類問題は未解決である。これは、擬リーマン対称空間は接空間に退化する部分空間を持つため、可約であったとしても、既約擬リーマン対称空間の積に分解するとは限らないためである。擬リーマン対称空間としてそれ以上分解できない「最小単位」は、分解不可能な擬リーマン対称空間と呼ばれ、その分類が擬リーマン対称空間の分類の目標となる。分解不可能なローレンツ対称空間は Cahen–Wallach[CW70] によって、符号  $(n, 2)$  の擬リーマン対称空間は Kath–Olbrichら [KO09] によって完全に分類されている。

### 1.2 Clifford–Klein 形

Clifford–Klein 形を定義するために、群作用の性質である固有不連続性を復習しておく。

**定義 1.1** (固有不連続). 群  $\Gamma$  が空間  $M$  に固有不連続に作用するとは、任意の2点  $p, q \in M$  に対し、その近傍  $U, V$  が存在して、 $\#\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma U \cap V \neq \emptyset\} < \infty$  となることを言う。

群  $\Gamma$  の多様体  $M$  への作用が固有不連続かつ自由であることと、 $\Gamma \backslash M$  の多様体構造が一意に存在して、自然な全射  $\pi: M \rightarrow \Gamma \backslash M$  が可微分な被覆写像となることは同値となる。もし作用が固有不連続でなければ、 $\Gamma \backslash M$  は Hausdorff ですらなくなり、固有不連続であって、自由でなければ、オービフォールドと呼ばれる空間になる。

以下では、 $G$  を Lie 群、 $H$  をその閉部分群とする。Clifford–Klein 形とは、等質空間  $G/H$  を、固有不連続かつ自由に作用する離散部分群  $\Gamma \subset G$  で割った商空間  $\Gamma \backslash G/H$  に、上でのべた多様体構造を入れた空間をいう。 $\pi: G/H \rightarrow \Gamma \backslash G/H$  は被覆写像であり、 $G/H$  の  $G$ -不変な幾何構造は、Clifford–Klein 形  $\Gamma \backslash G/H$  も自然に持つことになる。

$G/H$  がリーマン等質空間 ( $H$  がコンパクト) の場合、任意の離散部分群  $\Gamma \subset G$  は、空間に固有不連続かつ自由に作用するため、Clifford–Klein 形の研究は  $G$  の離散部分群の研究とほぼ同義となる。一方、 $G/H$  が非リーマン ( $H$  が非コンパクト) の場合には、離散部分群の作用が固有不連続になるとは限らない。この場合に対する 1980 年の小林俊行による研究 [Kob89] 以降、非リーマンな等質空間に対する Clifford–Klein 形が研究され始めた。小林によって提起された Clifford–Klein 形の重要な未解決問題の 1 つに、コンパクト Clifford–Klein 形をもつ等質空間  $G/H$  の分類問題がある。

**問題 1.2.** [Kob89] コンパクト Clifford–Klein 形をもつ等質空間  $G/H$  を分類せよ。

この問題に対する手法として、Benoist–Kobayashi の固有性判定法に基づく Lie 群論的手法 ([Ben96],[Kob96]) や、行列要素の漸近挙動の解析に基づく手法 ([Mar97])、Lie 代数のコホモロジーを用いた手法 ([KO90],[Mor15]) などが用いられている。既約な対称空間  $G/H$  に対しては、現在までに 12 系列の対称空間に対しコンパクト Clifford–Klein 形の存在が知られている [KY05]。既約な対称空間の場合、リー群  $G$  は簡約群であり、多くの研究においては簡約群の Clifford–Klein 形の分類を目標とされてきた。

### 1.3 問題および主結果

既約な対称空間に対する Clifford–Klein 形の問題についての研究が多い一方、「最小単位」である分解不可能な擬リーマン対称空間のコンパクト Clifford–Klein 形は少ない。そこで、次のような、問題 1.2 の部分問題を考える。

**問題 1.3.** 可約かつ分解不可能な擬リーマン対称空間  $G/H$  でコンパクト Clifford–Klein 形を持つものを分類せよ。

この問題に対する先行研究としては、Lorentz 対称空間に関して [KO15] がコンパクト Clifford–Klein 形を持つための必要十分条件を与えているが、一般の次元に対しては調べられていない。

詳しい記号の定義は 2 章以降で述べることにして、主結果を先に述べる。一つ目は、コンパクト Clifford–Klein 形を持つための必要条件である。

**定理 1.4.**  $D = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ ,  $D' = \text{diag}(b_1, \dots, b_n)$  とするとき、 $G_{D,D'}/H$  (定義 2.1 を参照) がコンパクト Clifford–Klein 形を持つならば、ある  $\{\varepsilon_i\} \in \{\pm 1\}^n$  で

$$\sum_{c_i \in \mathbb{R}} \varepsilon_i c_i = 0, \quad \sum_{c_i \in \sqrt{-1}\mathbb{R}} \varepsilon_i |c_i| = 0,$$

を満たすものが存在する。ただし、 $c_i := \sqrt{a_i} \sqrt{b_i}$  である。

例えば、符号 (4, 1) の可約かつ分解不可能な Lorentz 対称空間のパラメーター空間は、球面で与えられる。この必要条件を満たす空間は、その中でも、以下の図における円で与えられる。実際には、この条件の稠密な部分集合の空間がコンパクト Clifford–Klein 形を持つことが知られている [KO15]。

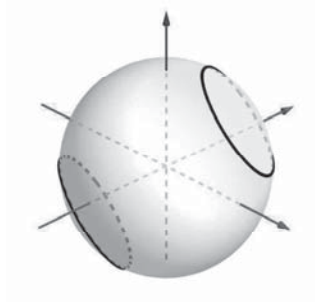


図 1 パラメーター空間および必要条件を満たすパラメータ

主結果の二つ目は、符号 (2, 2) におけるコンパクト Clifford–Klein 形をもつ空間の分類定理である。

**定理 1.5.** 分解不可能な擬リーマン対称空間  $G/H$  で以下を満たすものは、 $G_{I_{1,1}, -I_{1,1}}/H$  に局所同型である。

1.  $G$  は可解群であり、 $G/H$  の移換群である。
2.  $G/H$  はコンパクト Clifford–Klein 形を持つ。
3.  $G/H$  の次元は 4 以下である。

## 2 対称空間 $G_{D,D'}/H$ の定義

まず、主結果に登場する擬リーマン対称空間を定義する。

**定義 2.1.**  $D, D' \in GL(n, \mathbb{R})$  を対称かつ可逆な行列とし、 $W \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$  を以下で定義する。

$$W := \begin{pmatrix} & D' \\ D & \end{pmatrix} \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}).$$

ハイゼンベルク代数  $\mathfrak{h}_n := \mathbb{R}\text{-span}\{X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n, Z\}$  ( $[X_i, Y_j] = \delta_{ij}Z$ ) に対し、以下の写像を考える。

$$\rho: \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Der } \mathfrak{h}_n \quad X \mapsto \begin{pmatrix} X & \\ & 0 \end{pmatrix}.$$

このとき、以下のように定義する。

$$\mathfrak{g}_{D,D'} := \mathbb{R}W \ltimes_{\rho} \mathfrak{h}_n, \quad \mathfrak{h} := \mathbb{R}\text{-span}\{Y_1, \dots, Y_n\}.$$

部分空間  $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{g}$  を、 $\mathfrak{q} := \mathbb{R}\text{-span}\{W, X_1, \dots, X_n, Z\}$  とすると、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{q}$  となり、 $G_{D,D'}/H$  の接空間は自然に  $\mathfrak{q}$  と同一視できる。さらに、 $\mathfrak{q}$  上の内積を、以下で定義する。

$$g := \begin{pmatrix} 0 & & -1 \\ & D'^{-1} & \\ -1 & & 0 \end{pmatrix}.$$

$G_{D,D'}$  を,  $\mathfrak{g}_{D,D'}$  を Lie 代数に持つような 1-連結 Lie 群とし,  $H$  を,  $\mathfrak{h}$  に対応する解析的部分群とする.

**命題 2.2.**  $D'$  の符号を  $(p, q)$  とするとき,  $G_{D,D'}/H$  は符号  $(p+1, q+1)$  の分解不可能かつ可約な対称空間の構造を持つ.

### 3 Lie 群的なアプローチ

#### 3.1 主定理の証明の流れ

この節では, 定理 1.5 の証明の流れについて述べる.

まず, 定理の条件を満たすものリストは, 以下で与えられる.

**事実 3.1.** [KO09] 分解不可能かつ可約な符号  $(2, 2)$  の, 冪零でない可解な擬リーマン対称空間の Lie 代数の対称対は以下の  $D, D'$  に対応する  $(\mathfrak{g}_{D,D'}, \mathfrak{h})$  で与えられる.

1.  $D = \text{diag}(\pm 1, a), D' = I_{1,1} \ (a \in \mathbb{R}^\times),$
2.  $D = -P^{-1} \begin{pmatrix} \nu & 1 \\ 1 & -\nu \end{pmatrix} Q, D' = -Q^{-1} \begin{pmatrix} -\nu & 1 \\ 1 & \nu \end{pmatrix} P,$   
ただし,  $P = \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/(1+\nu^2) \\ 1 & -\nu/(1+\nu^2) \end{pmatrix} \ (\nu \in \mathbb{R}),$
3.  $D_\pm = \begin{pmatrix} \pm 2 & -1 \\ -1 & \end{pmatrix}, D'_\pm = \pm \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}.$

したがって, 対称空間  $G_{D,D'}/H$  のコンパクト Clifford–Klein 形の存在を調べれば良い. それを判定するための必要十分条件を与えるために, ハイゼンベルク群  $H_n$  の部分群  $L_C$  を定義しておく.

**定義 3.2.**  $C \in M(n, \mathbb{R})$  に対し,  $\mathfrak{l}_C$  を, 以下の行列で定まる線形写像  $f_C: \mathfrak{h}_n \rightarrow \mathfrak{h}_n$  の像とする.

$$\begin{pmatrix} I_n & C & \mathbf{0} \\ O & O & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \in M(2n+1, \mathbb{R})$$

ただし,  $\mathfrak{h}_n$  の基底は,  $\{X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n, Z\}$  で与える. このとき,  $\mathfrak{l}_C$  は  $\mathfrak{h}_n$  の部分代数であり, これに対応する  $G_{D,D'}$  の解析的部分群を  $L_C$  と書く.

このとき, 次の命題が成り立つ.

**命題 3.3.** 可逆な対称行列  $D, D'$  に対し, 以下の条件は同値である.

- (a) 対称空間  $G_{D,D'}/H$  はコンパクト Clifford–Klein 形を持つ.
- (b) ある行列  $C \in M(n, \mathbb{R})$  で, 以下の条件を満たすものが存在する.
  - (i) 行列  $A_t + B_t C$  は全ての  $t \in \mathbb{R}$  に対し, 可逆である.
  - (ii) 部分群  $L_C \subset G_{D,D'}$  はある  $l \in G_{D,D'} \setminus H_n$  に対し,  $T_l$ -不変な格子を持つ.

ここで,  $T_l$  は  $l \in G_{D,D'}$  に関する内部自己同型であり,  $A_t, B_t \in M(n, \mathbb{R})$  は次で定義される行列である.

$$X_t = \begin{pmatrix} A_t & B_t \\ * & * \end{pmatrix} := \exp t \begin{pmatrix} & D' \\ D & \end{pmatrix}.$$

この命題を、事実 3.1 のリストの  $D, D'$  に対し適用することで、求める定理を得ることができる。以下では、この命題の証明のキーアイデアを述べたい。

### 3.2 連続類似と (L)-condition

コンパクト Clifford–Klein 形の存在を調べる上で重要な考え方の一つとして、連続類似がある。これは、小林 [Kob89] によって導入されたアイデアであり、以下の事実が本質的である。

**事実 3.4.** [Kob89] Lie 群  $L$  が多様体  $M$  に可微分に作用しているとし、 $\Gamma \subset L$  を余コンパクト離散部分群とする。このとき、以下が成り立つ。

1.  $\Gamma \backslash M$  がコンパクト  $\iff L \backslash M$  がコンパクト
2.  $\Gamma$  の作用が固有不連続  $\iff L$  の作用が固有

ただし、 $L$  の作用が固有であるとは、任意のコンパクト集合  $S \subset M$  に対し、集合  $L_S := \{\ell \in L \mid \ell S \cap S \neq \emptyset\}$  が  $L$  の中でコンパクトであることを言う。離散部分群の作用に対しては、固有不連続性と固有性は一致する。

この事実により、扱いつらい離散部分群の作用を  $L$  の作用に置き換えて考えることができる。特に、 $L$  が連結であれば、Lie 代数を用いた解析が可能である。例えば、 $G$  が冪零 Lie 群のとき、その離散部分群  $\Gamma$  は、synthetic hull と呼ばれる連結閉 Lie 部分群  $L$  を保つことが知られている ([Sai57], [BK10])。しかし、この事実は一般の可解群に対しては成り立たない。そこで、以下の概念を新しく導入する。

**定義 3.5** ((L)-condition). Lie 部分群  $L' \subset G_{D, D'}$  が (L)-condition を満たすとは、 $L_0 = L' \cap H_n$  が連結であり、ある  $l \in L' \setminus L_0$  で、 $L' = \langle l \rangle L_0$  となるものが存在することを言う。

この (L)-condition は、連結とは限らないが、「連結に近い」部分群の条件であり、Lie 代数を用いた解析が可能になる。さらに、以下で述べるように、 $G_{D, D'}/H$  にコンパクト Clifford–Klein 形が存在するとすれば、(L)-condition を満たす部分群が常に存在する。

**命題 3.6.**  $\Gamma$  を  $G_{D, D'}$  の離散部分群で、 $G_{D, D'}/H$  に余コンパクトに作用するとする。  $L_0 = L \cap H_n$  とすると、 $l \in \Gamma$  で、 $L' := \langle l \rangle L_0$  となる  $L'$  が存在し、 $\Gamma$  を余コンパクトに含む。さらに、 $\Gamma \cap L_0$  は  $L_0$  の余コンパクト部分群である。

次の命題は、(L)-condition を満たす  $L'$  の余コンパクト性と固有性の判定条件を与えている。

**命題 3.7** (余コンパクト性と固有性の判定条件).  $D, D'$  を対称かつ可逆な行列とし、 $L'$  を  $G_{D, D'}$  の部分群で (L)-condition を満たすとする。  $L_0 := L' \cap H_n$  とするとき、次の条件は同値である。

- (a)  $L'$  の  $G_{D, D'}/H$  への作用が余コンパクトかつ固有である。
- (b) ある行列  $C \in M(n, \mathbb{R})$  が存在し、 $L_0 = L_C$  であり、 $A_t + B_t C$  は任意の  $t \in \mathbb{R}$  に対し可逆である。(記号は定義 3.2 および命題 3.3 を参照)

命題 3.6 と命題 3.7 を用いることで、 $G_{D, D'}/H$  がコンパクト Clifford–Klein 形を持つならば、命題 3.3 の条件 (b)(i) が成り立つことがわかる。条件 (b)(ii) は  $L_C$  が余コンパクトな離散部分群  $\Gamma$  を持つための必要十分条件である。

## 4 コホモロジーを用いたアプローチ

### 4.1 コホモロジーに現れる障害

この節では、定理 1.4 の証明の流れについて述べる。この証明には、Lie 代数のコホモロジーに現れるコンパクト Clifford–Klein 形の障害を用いる。この手法は小林-小野 [KO90] において提起され、森田 [Mor15] により発展した。

$G$  を Lie 群とし、 $H$  をその閉部分群、 $\mathfrak{g}$  および  $\mathfrak{h}$  を  $G$  および  $H$  の Lie 代数とする。 $G/H$  の不連続群  $\Gamma \subset G$  に対し、Clifford–Klein 形  $\Gamma \backslash G/H$  を考える。このとき、以下の包含写像を考える。

$$\eta : (\Lambda(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)^b \simeq \Omega(G/H)^G \rightarrow \Omega(G/H)^\Gamma \simeq \Omega(\Gamma \backslash G/H)$$

ただし、 $\Omega(G/H)$  は  $G/H$  上の微分形式の集合、 $\Omega(G/H)^G$  は  $G$ -不変な微分形式の部分集合を表す。この写像は、コホモロジーの準同型を誘導する。

$$\eta : H^*(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbb{R}) \rightarrow H^*(\Gamma \backslash G/H)$$

このとき、以下の事実が成り立つ。

**事実 4.1** ([BH72],[KO90]). Clifford–Klein 形  $\Gamma \backslash G/H$  がコンパクトならば、

$$\eta : H^N(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbb{R}) \rightarrow H^N(\Gamma \backslash G/H).$$

は単射である。ただし、 $N := \dim(G/H)$  とする。

森田 [Mor15] はこれを以下の形の障害として定式化した。

**事実 4.2** ([Mor15],[Mor17]).  $K_H$  を  $H$  の極大コンパクト部分群とし、 $\mathfrak{k}_H$  をその Lie 代数とする。 $G/H$  がコンパクト Clifford–Klein 形を持つならば、自然な全射  $\pi : G/K_H \rightarrow G/H$  が誘導する以下の写像は単射である。

$$\pi^* : H^N(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbb{R}) \rightarrow H^N(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}_H; \mathbb{R}),$$

ただし、 $N := \dim(G/H)$  とする。

### 4.2 対称空間 $G_{D,D'}/H$ への適用

特に、 $G$  が 1 連結な可解 Lie 群のとき、コンパクトな連結部分群は自明群しかないため [Hoc65]、 $G_{D,D'}/H$  に対し、上の事実を適用すると、以下のような障害になる。

**命題 4.3.** 等質空間  $G_{D,D'}/H$  がコンパクト Clifford–Klein 形を持つならば、自然な全射  $\pi : G_{D,D'} \rightarrow G_{D,D'}/H$  が誘導する以下の写像  $\pi^*$  は単射である。

$$\pi^* : H^N(\mathfrak{g}_{D,D'}, \mathfrak{h}; \mathbb{R}) \rightarrow H^N(\mathfrak{g}_{D,D'}; \mathbb{R}) \quad (N = n + 2).$$

次の補題が定理の証明に本質的である。

**補題 4.4.** 可逆な対角行列  $D = \text{diag}(a_i), D' = \text{diag}(b_i)$  に対し、以下は同値である。

- (a)  $\pi^* : H^N(\mathfrak{g}_{D,D'}, \mathfrak{h}; \mathbb{R}) \rightarrow H^N(\mathfrak{g}_{D,D'} : \mathbb{R})$  は単射である。  
 (b)  $\exists \varepsilon \in \{\pm 1\}^n$  s.t.  $\sum_{c_i \in \mathbb{R}} \varepsilon_i c_i = 0, \quad \sum_{c_i \in \sqrt{-1}\mathbb{R}} \varepsilon_i |c_i| = 0$ .

ただし,  $c_i := \sqrt{a_i} \sqrt{b_i}$  である.

定理 1.4 の証明は, 以下の図式のように, 命題 4.3 と補題 4.4 を組み合わせることから従う.

$$\begin{array}{ccc}
 G_{D,D'}/H \text{ がコンパクト Clifford-Klein 形を持つ} & \xrightarrow{\text{命題 4.3}} & \pi^* \text{ は単射} \\
 & & \updownarrow \text{補題 4.4} \\
 & & \exists \varepsilon \in (\pm 1)^n \text{ s.t. } \sum_{c_i \in \mathbb{R}} \varepsilon_i c_i = 0, \quad \sum_{c_i \in \sqrt{-1}\mathbb{R}} \varepsilon_i |c_i| = 0
 \end{array}$$

また,  $D, D'$  が 2 次対称行列のとき, 次の命題が言える.

**命題 4.5.**  $D, D'$  が 2 次対称行列のとき, 次は同値である.

- (a)  $\pi^* : H^N(\mathfrak{g}_{D,D'}, \mathfrak{h}; \mathbb{R}) \rightarrow H^N(\mathfrak{g}_{D,D'} : \mathbb{R})$  は単射である。  
 (b)  $\exists k \in \mathbb{R}^\times$  s.t.  $D' = kD^{-1}$ .

この命題を使うことで, 次の補題が簡単に証明でき, 定理 1.5 をより簡潔に証明できる.

**補題 4.6.** 事実 3.1 の  $D, D'$  のうち, 2.(a) における  $a = 1$  以外のパラメータに対応する空間は, コンパクト Clifford-Klein 形を持たない.

## 参考文献

- [Ben96] Y. Benoist. Actions propres sur les espaces homogènes réductifs. *Ann. of Math. (2)*, 144(2):315–347, 1996.
- [BH72] R. Bott and A. Haefliger. On characteristic classes of  $\Gamma$ -foliations. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 78:1039–1044, 1972.
- [BK10] A. Baklouti and I. Kédim. On non-abelian discontinuous subgroups acting on exponential solvable homogeneous spaces. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (7):1315–1345, 2010.
- [Hoc65] G. Hochschild. *The structure of Lie groups*. Holden-Day, Inc., San Francisco-London-Amsterdam, 1965.
- [KO90] T. Kobayashi and K. Ono. Note on Hirzebruch’s proportionality principle. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 37(1):71–87, 1990.
- [KO09] I. Kath and M. Olbrich. On the structure of pseudo-Riemannian symmetric spaces. *Transform. Groups*, 14(4):847–885, 2009.
- [KO15] I. Kath and M. Olbrich. Compact quotients of Cahen-Wallach spaces. *ArXiv e-prints*, January 2015.
- [Kob89] T. Kobayashi. Proper action on a homogeneous space of reductive type. *Math. Ann.*, 285(2):249–263, 1989.

- [Kob96] T. Kobayashi. Criterion for proper actions on homogeneous spaces of reductive groups. *J. Lie Theory*, 6(2):147–163, 1996.
- [KY05] T. Kobayashi and T. Yoshino. Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces—revisited. *Pure Appl. Math. Q.*, 1(3, Special Issue: In memory of Armand Borel. Part 2):591–663, 2005.
- [Mar97] G. Margulis. Existence of compact quotients of homogeneous spaces, measurably proper actions, and decay of matrix coefficients. *Bull. Soc. Math. France*, 125(3):447–456, 1997.
- [Mor15] Y. Morita. A topological necessary condition for the existence of compact Clifford-Klein forms. pages 1–13, May 2015.
- [Mor17] Y. Morita. A cohomological obstruction to the existence of compact Clifford-Klein forms. *Selecta Math. (N.S.)*, 23(3):1931–1953, 2017.
- [Sai57] M. Saito. Sur certains groupes de Lie résolubles. II. *Sci. Papers Coll. Gen. Ed. Univ. Tokyo*, 7:157–168, 1957.