擬鏡映群の二重余不変式環の GKM 理論的記述

大阪市立大学 数学研究所 佐藤 敬志
TAKASHI SATO
OSAKA CITY UNIVERSITY ADVANCED MATHEMATICAL INSTITUTE

良いトーラス作用が存在する空間の幾何学的情報はその 1 次元軌道から読み取れる。これを GKM 理論という。特に旗多様体の場合には、1 次元軌道が Weyl 群とルート系に対応し、同変コホモロジー環が組合せ論的に記述される。また、有理数係数であれば、その同変コホモロジー環は二重余不変式環と呼ばれるものになっている。本稿では、Weyl 群の代わりに擬鏡映群を考え、その二重余不変式環に対し、新たな GKM 理論的な記述を与える。

1. 旗多様体と GKM 理論

G を単連結コンパクト Lie 群とし、T をその極大トーラスとする。旗多様体 G/T には T が左からの積で作用している。一般に群 Γ が空間 X に作用しているとき、その同変コホモロジー環は $H^*_\Gamma(X) = H^*(E\Gamma \times_\Gamma X)$ と Borel 構成のコホモロジー環として与えられる。旗多様体の場合、固定点集合 $(G/T)^T$ は G の Weyl 群 W と自然に同一視できる。包含写像 $i\colon (G/T)^T \to G/T$ が誘導する局所化写像 $i^*\colon H^*_T(G/T) \to H^*_T((G/T)^T)$ は単射である。ここで $H^*_T((G/T)^T) \cong \bigoplus_{w\in W} H^*(BT) \cong \mathrm{Map}(W, H^*(BT))$ であり、本稿では以下 $H^*_T(G/T)$ の元 f やその i^* による像を写像 $f\colon W \to H^*(BT)$ とみなす。また、Φ で G のルート系を表すことにする。Goresky, Kottwitz, MacPherson により、局所化写像の像は次のように記述されることが示された。

定理 1.1 ([1])**.**

$$\mathrm{Im}\, i^* = \{f \in \mathrm{Map}(W, H^*(BT)) \mid f(w) - f(\sigma_\alpha w) \in (\alpha), \alpha \in \Phi, w \in W\}$$

ここで、σ_α は α に関する鏡映を表し、(α) は $\alpha \in H^2(BT)$ により生成されるイデアルを表す。

注意 1.2. 条件 $f(w) - f(\sigma_\alpha w) \in (\alpha), \alpha \in \Phi, w \in W$ は GKM 条件と呼ばれる。

例 1.3. 定値写像は $\mathrm{Im}\, i^*$ の元である。また、$H^*(BT) = \mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n]$ と書いたとき、$\tau_i\colon W \to H^*(BT)$ を $\tau_i(w) = wt_i$ で定めると GKM 条件を満たす。

上の定理の通り、旗多様体は GKM 理論によりその Weyl 群とルート系を用いて記述される。この記述は Bruhat 分解の記述と考えられる。$G/T = \bigsqcup_{w\in W} C_w$ を Bruhat 分解とする。つまり、適当に単純ルートを定め、$l(w)$ を Weyl 群の元 w の長さとして、各 C_w は T-不変な実 $2l(w)$ 次元開球体であり、T-作用に関する固定点をただ 1 つもつ。C_w の閉包は $\bigsqcup_{v\leq w} C_v$ である。ここでの順序は Bruhat 順序であり、$v < w$ ならば $l(v) < l(w)$ が成立する。

記号を簡単にするため、$X = G/T$ とする。Bruhat 分解による X の j-骨格 $X^{(j)}$ を考える。具体的に $j = 0, 2$ に対し、$X^{(0)} = \mathrm{pt}$, $X^{(2)} = \mathrm{pt} \sqcup \bigsqcup_{\alpha\colon \text{単純ルート}} \cong \bigvee S^2$ となる。$X^{(2)}$ の一部分として、単純ルート α に対し、$\mathrm{pt} \sqcup C_{\sigma_\alpha} \cong S^2$ の同変コホモロジー環を計算す

る。$\mathfrak{t}$ を T の Lie 環とし、$\mathfrak{t}' = \ker\alpha$ をその部分 Lie 環とすると、$T' = \exp(\mathfrak{t}')$ は T の余次元 1 の部分トーラスである。この S^2 の点は全て T' の作用による固定点である。この S^2 を固定点のうち一方を除いた 2 枚の円盤で覆って Mayer–Vietoris 列を計算する。特に、次数 k が偶数である場合を見ればよく、

$$0 \longrightarrow H_T^k(S^2) \xrightarrow{i^*} H_T^k(\mathrm{pt}) \oplus H_T^k(\mathrm{pt}) \longrightarrow H_T^k(S^1) \longrightarrow 0$$

となっている。中央の項は S^2 の T-作用に関する固定点（単位元 e と σ_α に対応）での同変コホモロジーであり、右の項は "赤道" 部分の同変コホモロジーで、

$$H_T^k(S^1) = H^k(ET \times_T S^1) = H^k(BT') \cong H^k(BT)/(\alpha)$$

と計算される。これにより $f \in \mathrm{Map}(W, H^*(BT))$ に対する $f(e)$ と $f(\sigma_\alpha)$ についての GKM 条件が導出された。

高次元のセル C_w を貼る場合も、接空間 $T_wX^{(2l(w))}$ をルート空間分解した後に同様に計算される。GKM 条件はセルを貼るごとに対応する Weyl 群の元に関するものが現れ、

(1.1)
$$i^*(H_T^*(X^{(j)})) = \left\{ f \in \mathrm{Map}(W^{(j)}, H^*(BT)) \;\middle|\; f(w) - f(\sigma_\alpha w) \in (\alpha), \alpha \in \Phi, w, \sigma_\alpha w \in W^{(j)} \right\}$$

となる。ここで $W^{(j)}$ は長さが j までの元による W の部分集合を表す。

2. 擬鏡映群

定義 2.1. V を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とする。線形自己同型 $\sigma\colon V \to V$ が擬鏡映であるとは、$\operatorname{codim}\ker(1-\sigma) = 1$, $\exists m \in \mathbb{N}$ s.t. $\sigma^m = 1$ であるときにいう。$GL(V)$ の有限部分群 W が擬鏡映群であるとは、W が擬鏡映で生成されているときにいう。

例 2.2. $V = \mathbb{C}$ とする。$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ を 1 の m 乗根のなす群とみて、積で $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \curvearrowright V$ となる。0 でない $x \in V^*$ を取ると、不変式環は x^m の多項式環となる。余不変式環は $\mathbb{C}[x]/(x^m)$ となり、これは $H^*(\mathbb{C}P^{m-1})$ と同型である。

定義 2.3. 群 W がベクトル空間 V に作用している時、その二重余不変式環を $\mathbb{C}[V] \otimes_{\mathbb{C}[V]^W} \mathbb{C}[V]$ と定める。

群 W がベクトル空間 V に左から作用している時、V 上の多項式環 $\mathbb{C}[V]$ には $(f \cdot w)(*) = f(w*)$ で定まる W の右からの作用がある。

注意 2.4. 旗多様体 G/T の Weyl 群 W が T の Lie 環に作用しているが、その二重余不変式環は $\mathbb{C}$-係数の同変コホモロジー環 $H_T^*(G/T)$ に同型である。

GKM 理論の類似として、$i^*\colon \mathbb{C}[V] \otimes_{\mathbb{C}[V]^W} \mathbb{C}[V] \to \mathrm{Map}(W, \mathbb{C}[V])$ を $a \otimes b \mapsto (a(b \cdot w))_w$ で定めて、これの像を擬鏡映群や対応する V 上の線形関数の言葉で記述することを考える。

各擬鏡映 σ に対し、0 でない $\alpha_\sigma \in V^*$ で $\ker\alpha_\sigma = \ker(1-\sigma)$ となるものを選ぶ。つまり σ の固定点からなる超平面 H_σ 上で α_σ は 0 である。また、超平面 H_σ の固定化群は巡回群になっている。擬鏡映 σ の位数を $|\sigma|$ で表し、σ の非自明な固有値を λ_σ で表すことにする。W の部分集合として、擬鏡映全体の集合を R で表す。McDaniel により GKM 理論的な次の記述が与えられた。

定理 2.5 ([2])**.**

$$\mathrm{Im}\, i^* = \left\{ f \in \mathrm{Map}(W, \mathbb{C}[V]) \;\middle|\; \sum_{j=0}^{|\sigma|-1} \lambda_\sigma^{-ij} f(\sigma^j w) \in (\alpha_\sigma^i), \forall\sigma \in R, i < |\sigma|, w \in W \right\}$$

GKM 条件に対応する定理 2.5 の条件はかなり重複が多く、実際には各超平面の固定化群の生成元 σ についての条件で十分である。

注意 2.6. 全ての擬鏡映の位数が 2 である場合には、定理 2.5 の記述は定理 1.1 の記述に一致する。

定理 2.5 は定理 1.1 の一般化になっているが、Bruhat 分解のような階層構造と相性が悪いように思える。GKM 条件は本質的に Bruhat 分解によるものであったので、仮に擬鏡映群に対応する旗多様体の類似物が存在し、その上の Bruhat 分解的な階層構造が存在したとする。このとき、W の部分集合に対し、(1.1) のような式が得られるはずである。しかし、定理 2.5 の式は超平面の固定化群ごとの式であり、骨格に対応する部分集合に対する式の形は不明である。

3. 主結果

定理 2.5 を階層構造と相性が良いように書き換えたものが本稿の主結果である。まず、擬鏡映群 W には全順序が与えられているものとする。W の擬鏡映が定める超平面たちの固定化群の軌道の集合を $\mathcal{S} = \left\{ G \cdot w \;\middle|\; G\colon \text{ある超平面の固定化群}, w \in W \right\}$ とする。記号を煩雑にしないため、以下ではしばらく $n = |\sigma|$ とおく。$\mathcal{S}$ の元 S ごとに、擬鏡映 σ と自然数 $i_1, \ldots, i_{n-1}$ を選んで、その軌道 S が $\{w < \sigma^{i_1} w < \sigma^{i_2} w < \cdots < \sigma^{i_{n-1}} w\}$ と順序込みで表示されるようにする（n の値は超平面ごとに異なりうる）。表示 $\{w < \sigma^{i_1} w < \sigma^{i_2} w < \cdots < \sigma^{i_{n-1}} w\}$ に対し、写像 $f\colon W \to \mathbb{C}[V]$ に関する条件を以下のように定める。

$$(C_1) \qquad \begin{vmatrix} f(w) & 1 \\ f(\sigma^{i_1} w) & 1 \end{vmatrix} \in (\alpha_\sigma)$$

$$(C_2) \qquad \begin{vmatrix} f(w) & 1 & 1 \\ f(\sigma^{i_1} w) & 1 & \lambda_\sigma^{i_1} \\ f(\sigma^{i_2} w) & 1 & \lambda_\sigma^{i_2} \end{vmatrix} \in (\alpha_\sigma^2)$$

$$\vdots$$

$$(C_{n-1}) \qquad \begin{vmatrix} f(w) & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ f(\sigma^{i_1} w) & 1 & \lambda_\sigma^{i_1} & \cdots & (\lambda_\sigma^{i_1})^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(\sigma^{i_{n-1}} w) & 1 & \lambda_\sigma^{i_{n-1}} & \cdots & (\lambda_\sigma^{i_{n-1}})^{n-2} \end{vmatrix} \in (\alpha_\sigma^{n-1})$$

$S \in \mathcal{S}$ に対応するこれらの条件をまとめて (C_S) と書くことにする。

定理 3.1.

$$\operatorname{Im} i^* = \left\{ f \in \operatorname{Map}(W, \mathbb{C}[V]) \;\middle|\; f \text{ は } \mathcal{S} \text{ の各元 } S \text{ に対し, 条件 } (C_S) \text{ を満たす} \right\}$$

注意 3.2. やはり全ての擬鏡映の位数が 2 であるとき、定理 3.1 の条件は GKM 条件に一致する。

証明のスケッチ. $\operatorname{Im} i^*$ の元の制限が条件 (C_S) を満たしていることは容易に確かめられる。逆に、条件 (C_S) は f が S 上において $i^*(1 \otimes \alpha_\sigma^j)$（$0 \leq j \leq |\sigma| - 1$）の線形和の値と一致することを意味する。ここでの係数環は定値写像全体からなる多項式環 $\mathbb{C}[V]$ である。これは Guillemin, Zara [3] によるところの hypergraph の “同変コホモロジー環” の hyperedge に関する条件と一致し、McDaniel [2] により定理 2.5 の右辺の記述に一致することが示された。 □

最後に予想を紹介して本稿の結びとする。任意の $w_0 \in W$ と $S \in \mathcal{S}$ に対し、$\sigma^{i_k} w \leq w_0$ となる最大の k が存在する。条件 $(C_1), \ldots, (C_k)$ をまとめたものを $(C_S)_{\leq w_0}$ と書くことにする。

予想 3.3. 任意の擬鏡映群に二重余不変式環の *Betti* 数と適合する長さ関数で次を満たすものが存在する。長さ関数から定まる順序を拡張した全順序に関し、任意の $w_0 \in W$ に対し $\operatorname{Im} i^*$ を $W_{\leq w_0}$ に制限したものは

$$\left\{ f \in \mathrm{Map}(W_{\leq w_0}, \mathbb{C}[V]) \;\middle|\; f \text{ は } \mathcal{S} \text{ の各元 } S \text{ に対し, 条件 } (C_S)_{\leq w_0} \text{を満たす} \right\}$$

に一致する。

References

[1] M. Goresky, R. Kottwitz, and R. MacPherson, *Equivariant cohomology, Koszul duality and the localization theorem*, Invent. Math. **131** (1998), no. 1, 25-83.

[2] C. McDaniel, *A GKM description of the equivariant coinvariant ring of a pseudo-reflection group*, arXiv:1609.00849v1.

[3] V. Guillemin and C. Zara, *The existence of generating families for the cohomology ring of a graph*, Adv. Math. **107** (2001), no. 2, 283-349.

E-mail address: T-SATO@SCI.OSAKA-CU.AC.JP