

On the complexes from posets of p -subgroups

福井大学医学部 藤田亮介 (Ryousuke Fujita)
School of Medical Sciences, University of Fukui

概要

このノートでは、部分群複体に関するホモトピー理論に関する現在までの研究状況を紹介する。その後、Quillen 予想解決に向けてのオリジナルなアイデアを述べる。

1 部分群複体の幾何学的実現

G を有限群, p を G の位数の 1 つの素因数とする。そのとき、次の集合を考える。

$$S_p(G) = \{G \text{ の非自明な } p\text{-部分群}\}$$

$$A_p(G) = \{G \text{ の非自明な基本アーベル } p\text{-部分群}\}$$

これらは通常の包含関係により、半順序集合 (poset) になる。 $r+1$ 個の全順序部分群列を r -単体 (r -simplex) とする単体的複体構造が入る。その複体をそれぞれ $\Delta(S_p(G))$, $\Delta(A_p(G))$ とかく。すなわち、

$$\Delta(S_p(G)) = \{(H_0 < H_1 < \cdots < H_r) \mid H_i \in S_p(G), r \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

$$\Delta(A_p(G)) = \{(H_0 < H_1 < \cdots < H_r) \mid H_i \in A_p(G), r \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

$\Delta(S_p(G))$, $\Delta(A_p(G))$ をそれぞれ p における **Brown 複体**, **Quillen 複体** という。

1 つの poset \mathcal{P} があれば、上の真似をして単体的複体 $\Delta(\mathcal{P})$ が定義できる。これを \mathcal{P} から定まる **順序複体 (order complex)** という。このことばを使うと、Brown 複体とは poset $S_p(G)$ から定まる順序複体のことである。Quillen 複体についても同様。

$\Delta(S_p(G))$, $\Delta(A_p(G))$ の幾何学的実現をそれぞれ $|\Delta(S_p(G))|$, $|\Delta(A_p(G))|$ とかく。幾何学的実現の定義を明確にしよう。 $\Delta(S_p(G))$ の頂点集合 $S_p(G)$ の元の個数を n とすると、 n 次元 Euclid 空間 \mathbb{R}^n を考え、 $H_i \in S_p(G)$ を \mathbb{R}^n の点 $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ と同一視する。ただし、 e_i は i 番目の成分が 1 で他の成分が 0 という点を表す。 $\sigma = (H_0 < H_1 < \cdots < H_r) \in \Delta(S_p(G))$ に対して、 σ により張られる、 \mathbb{R}^n の凸集合を $|\sigma|$ と書く。すなわち、

$$|\sigma| = \left\{ t_0 H_0 + \cdots + t_r H_r \mid t_i \geq 0, \sum_{i=0}^r t_i = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^n$$

そのとき、

$$|\Delta(S_p(G))| := \bigcup_{\sigma \in \Delta(S_p(G))} |\sigma|$$

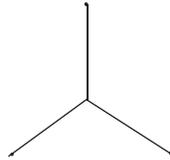
とおき、 $|\Delta(S_p(G))|$ に \mathbb{R}^n の部分空間の位相を入れたものが $\Delta(S_p(G))$ の幾何学的実現である。 $|\Delta(A_p(G))|$ についても同様に定義する。

例 1. $G = C_2$ のとき、 $S_2(C_2) = A_2(C_2) = \{C_2\} \implies \Delta(S_2(C_2)) = \Delta(A_2(C_2)) = \{(C_2)\} \implies |\Delta(S_2(C_2))| = |\Delta(A_2(C_2))| = \{1 \text{ 点}\}$

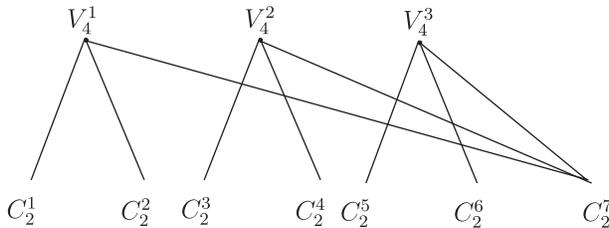
例 2. $G = C_{p^2}$ のとき、 $S_p(C_{p^2}) = \{C_p, C_{p^2}\}$ 、 $A_p(C_{p^2}) = \{C_p\} \implies \Delta(S_p(C_{p^2})) = \{(C_p), (C_p < C_{p^2})\}$ 、 $\Delta(A_p(C_{p^2})) = \{(C_p)\} \implies |\Delta(S_p(C_{p^2}))| = \text{単位区間 I}$ 、 $|\Delta(A_p(C_{p^2}))| = \{1 \text{ 点}\}$

例 3. $G = C_2 \times C_2$ のとき、 $S_2(C_2 \times C_2) = A_2(C_2 \times C_2) = \{C_2^1, C_2^2, C_2^3, C_2 \times C_2\} \implies \Delta(S_2(C_2)) = \Delta(A_2(C_2)) = \{(C_2^1), (C_2^2), (C_2^3), (C_2^1 < C_2 \times C_2), (C_2^2 < C_2 \times C_2), (C_2^3 < C_2 \times C_2)\}$ ここで、 C_2^j ($j = 1, 2, 3$) は位数 2 の巡回群である。

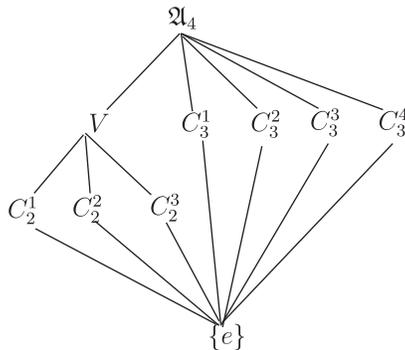
$\implies |\Delta(S_2(C_2))| = |\Delta(A_2(C_2))| = \text{下図のような tree}$



例 4. $G = D_{12}$ のとき、 $S_2(D_{12}) = A_2(D_{12}) = \{C_2^1, C_2^2, C_2^3, C_2^4, C_2^5, C_2^6, C_2^7, V_4^1, V_4^2, V_4^3\}$ 、 $S_3(D_{12}) = A_3(D_{12}) = \{C_3\}$ 、ここで、 C_2^j ($j = 1, 2, \dots, 7$) は位数 2 の巡回群、 V_4^k ($k = 1, 2, 3$) はクライン群とする。ハッセ図は以下の通り。



例 5. $G = \mathfrak{A}_4 (= 4 \text{ 次交代群})$ の部分群のハッセ図は以下の通りである。



例でもわかる通り、有限群 G の位数が小さいものは何とか絵に描けるが、そうでなければ、とてもじゃないが手に負えない。そこでホモトピー概念を用いて、Brown 複体や Quillen 複体の特徴付けたい。この方面の研究者らがバイブルにしていた論文は、Daniel Quillen による次のものである：

Homotopy Properties of the Poset of Nontrivial p -Subgroups of a Group, *Advances in mathematics* **28**, 101-128(1978)

上の Quillen の論文、また多くのこの分野に関する論文でも、ポセットとその順序複体、さらにその幾何学実現を同じ記号で記述しているため、初学者には混乱が生じやすい。したがって、このノートでは敢えてその違いを強調するために、省略せずに正確に記述している。つまり、ポセットは $S_p(G)$ 、複体は $\Delta(S_p(G))$ 、その幾何学的実現は $|\Delta(S_p(G))|$ というように。この論文は題名の通り、部分群複体の幾何学的実現、特に $|\Delta(S_p(G))|$ や $|\Delta(A_p(G))|$ のホモトピー性質を調べ上げている。主定理は「有限可解群 G が非自明な p -正規部分群をもつための必要十分条件は、 $|\Delta(A_p(G))|$ が可縮になることである」であり、可解性を外した一般の有限群の場合を、オープン・プロブレムとして提示している。つまり、現在“Quillen Conjecture”とよばれているものは次である：

「任意の有限群 G は、 $|\Delta(A_p(G))|$ が可縮であるならば、 G は非自明な p -正規部分群をもつ」

注. 逆の証明、すなわち十分条件の証明は容易に示すことができる。

ホモトピー同値性を保つ“より個数が少ないポセットを見出す”ことは極めて自然である。例えば、その1つとして Bouc 複体 $\Delta(B_p(G))$ がある。その定義は

$$B_p(G) = \{P \in S_p(G) \mid O_p(N_G(P)) = P\}$$

ここで、 $O_p(N_G(P))$ は P の正規化群 $N_G(P)$ の極大正規 p 部分群を意味する。定義式からこのポセットは Sylow p 部分群全部を含むことが直ぐわかる。しかも $|\Delta(B_p(G))|$ は $|\Delta(A_p(G))|$ とホモトピー同値、したがって、 $|\Delta(S_p(G))|$ ともそうである。一般に、 $B_p(G)$ が一番元の個数が小さいから、Bouc 複体をターゲットにして Quillen Conjecture にアタックしようとするのは極めて自然なことである。

他に、最近発見された興味あるポセットを紹介しよう。

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_p(G) &=: \{U \in \mathcal{S}(G) \mid U \text{ は } G \text{ の非自明なべき零 } p \text{ 部分群}\}, \\ \mathcal{L}_p(G) &=: \{U \in \mathcal{N}_p(G) \mid U > O_p(Z(N_G(U)))\} \end{aligned}$$

とおくとき、次が成り立つ：

定理 ([3], 2016, Iiyori and Sawabe)

包含写像 $\iota: |\Delta(\mathcal{B}_p(G))| \hookrightarrow |\Delta(\mathcal{L}_p(G))|$ はホモトピー同値である。したがって、

$$|\Delta(S_p(G))| \simeq |\Delta(\mathcal{A}_p(G))| \simeq |\Delta(\mathcal{B}_p(G))| \simeq |\Delta(\mathcal{L}_p(G))|.$$

2 McCord の定理

一方, Stong は 1960~70 年代にかけ「有限位相空間論」, 特にそのホモトピー理論を創り上げた. 我々の部分群複体理論とは何ら関係ないように思われるが, 実は大いに関係がある. Stong の結果を述べると,

「有限 T_0 空間 $S_p(G)$ が可縮になるための必要十分条件は, G が非自明な p -正規部分群をもつことである」

statement からして, Stong は Quillen Conjecture を強く意識していたことが見て取れる. 有限ポセットと有限 T_0 空間は 1 対 1 に対応するから, $S_p(G)$ は有限 T_0 空間であることに注意しておく. では, 有限 T_0 空間 $S_p(G)$ と $|\Delta(A_p(G))|$ のギャップは何なのか? これに解答を与えたのが McCord である. さて, McCord の結果を述べよう.

McCord の定理

有限 T_0 空間 X とそれに対応するコンパクト多面体 $|\Delta(X)|$ は弱ホモトピー同値 (= 各次元のホモトピー群が同型) であって, $\mu_X : |\Delta(X)| \rightarrow X$ を弱ホモトピー同値写像として次の可換図式

$$\begin{array}{ccc} |\Delta(X)| & \xrightarrow{|\Delta(f)|} & |\Delta(Y)| \\ \mu_X \downarrow & & \downarrow \mu_Y \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

が存在する. ここで, f は有限 T_0 空間 X, Y 間の連続写像, $|\Delta(f)|$ は多面体 $|\Delta(X)|, |\Delta(Y)|$ 間の連続写像である.

上の図式より「 f が弱ホモトピー同値写像である」ことと「 $|\Delta(f)|$ がホモトピー同値写像である」ことは同値である. 特に $X = A_p(G), Y = S_p(G), f = \iota$ (= 包含写像) とおくと ι が弱ホモトピー同値写像であることがわかる. 直ちに $|\Delta(\iota) : |\Delta(A_p(G))| \rightarrow |\Delta(S_p(G))|$ はホモトピー同値写像である. Stong, McCord の有限位相空間論の立場から見ると, Quillen は (図式の) 上だけを見ていたことになるだろう. 図式から「 $|\Delta(X)|$ が可縮であることと, X が homotopically trivial であることは同値」 (“homotopically trivial” とは全ての次元のホモトピー群が trivial と定義する) だから, 結局, Quillen Conjecture は

「有限 T_0 複体 $S_p(G)$ が homotopically trivial ならば, $S_p(G)$ は可縮である」

と言い換えることができる. すなわち, $S_p(G)$ では 1 点と弱ホモトピー同値ならば, ホモトピー同値になると主張している. もちろん, こんなことは有限位相空間でも一般には成り立たない. 「ホモトピー同値」と「弱ホモトピー同値」のギャップを問題にしているわけで, トポロジー的には非常に興味をそそられる問題である.

以上のような先行研究の流れを踏まえて, 私の最近の Quillen Conjecture へのオリジナル・アプローチは「有限位相空間論を適用し, $S_p(G)$ よりももっと扱いやすいものに取り換えて, その観点からアタックする」ものであった. ところが, $B_p(G)$ や $A_p(G)$ に取り換えたところで, そのぞれの空間の特殊性から一般論が展開できない. ただし, G が特殊な場合,

例えばベキ零の場合には $B_p(G)$ が 1 点 (= Sylow p -部分群) に定まるので, 常に $|\Delta(B_p(G))|$ は可縮, すなわち $\Delta(B_p(G))$ が可縮になることがわかる.

3 Quillen Conjecture へのアプローチ

背理法でやる. $O_p(G) = 1$ とする. このとき有限 T_0 空間 $S_p(G)$ は可縮でない. $S_p(G) = \emptyset$ であるならば, $\Delta(S_p(G)) = \emptyset$ となってしまう, $|\Delta(S_p(G))|$ が可縮であることに反する. したがって, $S_p(G) \neq \emptyset$ である. $P \in S_p(G)$ をとって,

(i) $|\Delta(S_p(G)_{<P})|$ が可縮のとき, (ii) $|\Delta(S_p(G)_{<P})|$ が非可縮のとき

で場合分けする. (i) のとき, p -部分群 P が基本アーベルならば, $|\Delta(S_p(G)_{<P})|$ が非可縮になってしまうので, $P \in S_p(G) \setminus A_p(G)$ である. ここで,

$$Lk_{\Delta(S_p(G))}(P) = \Delta(S_p(G)_{<P}) * \Delta(S_p(G)_{>P})$$

を考察する. ここで, $Lk_{\Delta(S_p(G))}(P)$ は $\Delta(S_p(G))$ の P におけるリンク複体である. 今 $|\Delta(S_p(G)_{<P})|$ が可縮だから,

$$|Lk_{\Delta(S_p(G))}(P)| \simeq \{1 \text{ 点} \} * |\Delta(S_p(G)_{>P})| \simeq \{1 \text{ 点} \}$$

したがって, $|Lk_{\Delta(S_p(G))}(P)|$ は可縮である. よって, $|\Delta(S_p(G))| \simeq |\Delta(S_p(G)) \setminus \{P\}| \simeq |\Delta(S_p(G) \setminus \{P\})|$. 有限 T_0 空間として $S_p(G)$ と $S_p(G) \setminus \{P\}$ は弱ホモトピー同値であるから, $\chi(S_p(G)) = \chi(S_p(G) \setminus \{P\})$ である. 実は $\chi(S_p(G)) = \chi(|\Delta(S_p(G))|) = \chi(|\Delta(S_p(G) \setminus \{P\})|) = \chi(S_p(G) \setminus \{P\}) = 1$ である. ここで, $\chi(X)$ は X のオイラー標数である.

一方,

$$S_p(G) = (S_p(G) \setminus \{P\}) \cup \{P\} \text{ (disjoint union)}$$

だから,

$$\chi(S_p(G)) = \chi(S_p(G) \setminus \{P\}) + \chi(\{P\})$$

この等式より, $\chi(\{P\}) = 0$ となる. これは矛盾である.

(ii) のとき, p -部分群 P が非基本アーベルならば, $|\Delta(S_p(G)_{<P})|$ が可縮になってしまうので, $P \in A_p(G)$ である. ここで, (i) と同様に

$$|Lk_{\Delta(S_p(G))}(P)| = |\Delta(S_p(G)_{<P})| * |\Delta(S_p(G)_{>P})|$$

を考察しよう. 今 $P \in A_p(G)$ だから, $S_p(G)_{<P} = A_p(G)_{<P}$ である. したがって, $|\Delta(A_p(G)_{<P})|$ が非可縮となる. まず $A_p(G)_{<P} \neq \emptyset$ とする. このときは, P には位数 p^2 以上の元が少なくとも 1 つは存在する. 今 $\Omega_1(Z(P)) = \Omega_1(P) < P$ より, $\Omega_1(P) \in A_p(G)_{<P}$ である. これは $|\Delta(A_p(G)_{<P})|$ が可縮になることを意味するので矛盾である. $A_p(G)_{<P} = \emptyset$ である. $\Delta(S_p(G)_{>P}) = \emptyset$ ならば, $S_p(G) = \{P\}$ となってしまう, $S_p(G)$ は可縮になって矛盾である. 実際,

$$S_p(G) = \{P\} \cup (S_p(G) - \{P\}) \text{ (disjoint union)}$$

であって、 $\langle P, \rangle P$ が空集合かつ $|\Delta(S_p(G))|$ は可縮だから、 P と順序同等なものしかない。よって、 $S_p(G) = \{P\}$ である。以下、 $S_p(G)_{>P} \neq \emptyset$ とする。

Claim $|\Delta(S_p(G)_{>P})|$ は可縮である。

Proof $|\Delta(S_p(G)_{>P})| \simeq |\Delta(N_G(P)_{>P})|$ より、以下 $|\Delta(N_G(P)_{>P})|$ が可縮であることを示す。 $S_p(G)_{>P} \ni Q$ をとる。そのとき、 $P < N_Q(P) < N_G(P)$ である。 $N_Q(P) \leq Q$ に注意すると、

$$P < N_Q(P) = O_p(N_Q(P)) < O_p(N_G(P)).$$

よって、 $|\Delta(N_G(P)_{>P})| \simeq \{1 \text{ 点}\}$ 。

$|\Delta(S_p(G)_{>P})|$ が可縮になれば (i) と全く同様な議論が展開できる。今、 $|\Delta(S_p(G)_{>P})|$ が可縮だから、

$$|Lk_{\Delta(S_p(G))}(P)| = |\Delta(S_p(G)_{<P})| * |\Delta(S_p(G)_{>P})| \simeq |\Delta(S_p(G)_{<P})| * \{1 \text{ 点}\}$$

したがって、 $|Lk_{\Delta(S_p(G))}(P)|$ は可縮である。(i) の議論により $\chi(\{P\}) = 0$ となるが、これは矛盾である。

参考文献

- [1] Barmak, J.A., *Algebraic Topology of Finite Topological Spaces and Applications*, Lecture Notes in Math, 2032, Springer-Verlag, 2011.
- [2] Fujita, R. and Kono, S., *Some aspects of a finite T_0 - G -space*, RIMS Koukyuroku. **1876** (2014), 89–100.
- [3] Iiyori, N. and Sawabe, M., *Partially ordered set of non-trivial nilpotent π -subgroups*, Osaka J. Math. **53**(2016), 731-750.
- [4] McCord, M.C., *Singular homotopy groups and homotopy groups of finite topological spaces*, Duke. Math. J. **33** (1966), 465-474.
- [5] Quillen D., *Homotopy properties of the poset of nontrivial p -subgroups of a group*, Advances in Math. **28**(1978), 101–128.
- [6] Stong, R.E., *Finite topological spaces*, Trans.Amer.Math.Soc. **123** (1966), 325-340.
- [7] Stong, R.E., *Group actions on finite spaces*, Discrete Math. **49** (1984), 95-100.