指定された領域に零点を持つ最近接多項式について
The nearest complex polynomial with a given zero in a given complex domain

若月 雄麻 *
Yuma Wakatsuki
東京理科大学大学院
Graduate School, Tokyo University of Science

関川 浩 †
Hiroshi Sekigawa
東京理科大学
Tokyo University of Science

Abstract

We consider the problem of constructing the polynomial that is nearest to given polynomials in two cases. The first case is that the polynomial has zeros at given points. The second case is that the polynomial has a zero in a given domain.

1 はじめに

複数の多項式に対する最近接多項式とは, ある一つの多項式に対して, 異なる観測データや計算などから得られた, 係数に誤差があるいくつかの多項式から, ある性質を満たすように復元した一つの多項式である. 主に最近接多項式をどのように構成するかについて, 本論文において, 議論する.

次に, 本論文の構成について述べる. まず, 2 節において先行研究を紹介し, その後, 3 節において複数の多項式に対する最近接多項式について議論をする. 最後に 4 節においては, 主に本研究での今後の課題について紹介する.

2 先行研究

$\mathbb{KP}_n = \{f \in \mathbb{K}[x] \mid \deg(f) \leq n\}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$) と定義する. ($\mathbb{KP}_n$ は $n+1$ 次元の $\mathbb{K}$ 線形空間となる.) また, $f = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \in \mathbb{KP}_n$ のノルム $\|f\|$ を係数ベクトル ${}^t(a_0, \ldots, a_n)$ のノルムで定義する. なお, 以下, 多項式の係数ベクトルをその多項式を表す文字のボールド体で表す. また, ここでは, 「^{t}」は転置を表すものとする.

定義 1 (複数の零点を指定した場合の最近接多項式)
相異なる定数 $z_1, \ldots, z_s \in \mathbb{K}$ $(s \leq n)$ と $f \in \mathbb{KP}_n$ が与えられたとき, $f(z_1) = \cdots = f(z_s) = 0$ かつ, $\|\tilde{f} - f\|$ が最小となる $\tilde{f} \in \mathbb{KP}_n$ を $z_1, \ldots, z_s$ と $\| * \|$ に関する最近接多項式という.

注意 1
このように定義した最近接多項式は必ず存在する.

*1413110@alumni.tus.ac.jp
†sekigawa@rs.tus.ac.jp

まず, Stetter の結果 [5] の一部を紹介する.

定理 2 (零点を 1 個指定した場合)
$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ とし, $\tilde{f}\in\mathbb{KP}_n$ が $z\in\mathbb{K}$ と p-ノルム $\|*\|_p$ に関する $f\in\mathbb{KP}_n$ の最近接多項式のとき,

$$\|\tilde{f}-f\|_p=\frac{|f(z)|}{\|\mathbf{z}\|_q}.$$

ここで, $p,\ q\geq 1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ \mathbf{z}={}^t(1,z,\ldots,z^n)$ である. ただし, $p=1$ のとき $q=\infty$ とし, $p=\infty$ とき $q=1$ とする.

零点が複数の場合を記述するためにいくつか準備をする.

定義 3 (一般化逆行列)
$A\in\mathbb{C}^{m\times n}$ に対して, 以下を満たす $A^\dagger\in\mathbb{C}^{n\times m}$ を A の一般化逆行列という.

$$(1)\ AA^\dagger A=A,\quad (2)\ (AA^\dagger)^*=AA^\dagger,\quad (3)\ A^\dagger AA^\dagger=A^\dagger,\quad (4)\ (A^\dagger A)^*=A^\dagger A.$$

ただし, X^* は X の共役転置とする.

定理 4 (過小決定な線形方程式系の最小二乗解)
$A\in\mathbb{C}^{m\times n}$ $(\mathrm{rank}\ (A)=m<n),\ b\in\mathbb{C}^m$, に対して以下の線形方程式系を考える.

$$Ax=b\qquad (x\in\mathbb{C}^n). \tag{1}$$

そのとき, $x=A^\dagger b$ が (1) の 2-ノルムが最小な解となる.

系 5
$A\in\mathbb{C}^{m\times n}$ $(\mathrm{rank}\ (A)=m<n),\ b\in\mathbb{C}^m$ に対して, $x\in\mathbb{C}^n$ が $Ax=b$ を満たすとき, $x=x_1+A^\dagger b$ で表すことができて, そのとき, 以下が成り立つ.

$$x_1\perp A^\dagger b,\qquad x_1\in\mathrm{Ker}(A)=\{y\in\mathbb{C}^n\mid Ay=0\},\qquad A^\dagger b\in\mathrm{Ker}(A)^\perp.$$

上記の系 5 を用いて, 以下の Ruatta [2] の結果が成り立つ.

定理 6 (Ruatta [2])
$c_1,\ \ldots,\ c_s\in\mathbb{C}$ と相異なる $z_1,\ \ldots,\ z_s\in\mathbb{C}$ に対して, $f(z_j)=c_j$ $(j=1,\ \ldots,\ s)$ を満たし, $\|f\|_2$ が最小になる $f\in\mathbb{CP}_n$ の係数ベクトルは以下のように表せる.

$$\boldsymbol{f}=M_z^\dagger\boldsymbol{c}.$$

ただし, $\mathbf{z}_j={}^t(1,\ z_j,\ z_j^2,\ \ldots,\ z_j^n),\ M_z={}^t(\mathbf{z}_1\ \mathbf{z}_2\ \ldots\ \mathbf{z}_s),\ \boldsymbol{c}={}^t(c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_s)$.

系 7 (複素の場合の最近接多項式)
$f\in\mathbb{CP}_n,\ z_1,\ \ldots,\ z_s\in\mathbb{C}$ に対する最近接多項式 $\tilde{f}\in\mathbb{CP}_n$ は以下のように構成できる.

$$\tilde{\boldsymbol{f}}=\boldsymbol{f}-M_z^\dagger\boldsymbol{c}.$$

ただし, $\mathbf{z}_j={}^t(1,\ z_j,\ \ldots,\ z_j^n),\ M_z={}^t(\mathbf{z}_1\ \mathbf{z}_2\ \ldots\ \mathbf{z}_s),\ \boldsymbol{c}={}^t(f(z_1),\ f(z_2),\ \ldots,\ f(z_s)),\ M_z^\dagger=M_z^*(M_zM_z^*)^{-1}$.

定義 8 (複数の零点を指定した場合)
相異なる定数 $z_1, \ldots, z_s \in \mathbb{K}$ と $f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{KP}_n$ と $1 \leq p, q \leq \infty$ である (p, q) が与えられたとき, $\tilde{f}(z_j) = 0$ $(j = 1, \ldots, s)$ かつ, $\delta_j = \|f_j - \tilde{f}\|_p$ として, $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_s)$ の q-ノルムが最小となるような $\tilde{f} \in \mathbb{KP}_n$ を $z_1, \ldots, z_s$ と $f_1, \ldots, f_m$ と (p, q) に関する最近接多項式という.

注意 2
最近接多項式は必ず存在し, $(p, q) = (2, 2)$ のときは一意である.

指定した実数の零点が一つかつ $f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{RP}_n$ と (p, q) がそれぞれ $(2, 2)$, $(2, 1)$, $(2, \infty)$, (∞, ∞) に関する最近接多項式を求めるアルゴリズムは Sekigawa [4] の結果でわかっている.

次に指定された領域に零点を持つ複数の多項式に対する最近接多項式を定義する. ここでは, ノルムのペアについては具体的に指定する.

定義 9 (指定された領域に零点を持つ場合)
$f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{KP}_n$ と境界 ∂D が区分的に有理関数表示可能な単純閉曲線である有界閉領域 $D \subset \mathbb{K}$ が与えられたとき, $\tilde{f} \in Z(D) = \{g \in \mathbb{KP}_n \mid g$ は $D \subset \mathbb{K}$ に零点を持つ $\}$ かつ $\delta_j = \|f_j - \tilde{f}\|_2$ として, $\|\boldsymbol{\delta}\|_2 = \|(\delta_1, \ldots, \delta_s)\|_2$ が最小となるような $\tilde{f} \in \mathbb{KP}_n$ を D と $f_1, \ldots, f_m$ に関する最近接多項式という.

また, 以下では, 領域 D の設定については, 定義 9 と同じとする.

3 主結果

ここでは, 複数の零点を指定した場合での $(p, q) = (2, 2)$ のときについて, 述べる. 以下, この節では複素係数多項式について話を進める.

定理 10 (複数の零点を指定した場合)
$z_1, \ldots, z_s \in \mathbb{C}$ と $f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{CP}_n$ と $(p, q) = (2, 2)$ に関する最近接多項式を $\tilde{f} \in \mathbb{CP}_n$ とするとき,

$$\tilde{\boldsymbol{f}} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \tilde{\boldsymbol{f}}_j.$$

ただし, $\tilde{f}_j$ は $z_1, \ldots, z_s \in \mathbb{C}$ と $\| * \|_2$ に関する f_j の最近接多項式とする.

証明 $g \in \{h \in \mathbb{CP} \mid h(z_j) = 0 \ (j = 1, \ldots, s)\}$ として, $\delta_j = \|\boldsymbol{g} - \boldsymbol{f}_j\|_2$ とする. また, 系 5 と g の条件から以下が成り立つ.

$$\boldsymbol{g}, \ \tilde{\boldsymbol{f}}_j \in \mathrm{Ker}(M_z), \qquad \tilde{\boldsymbol{f}}_j - \boldsymbol{f}_j \in \mathrm{Ker}(M_z)^{\perp}.$$

よって,

$$\begin{aligned}
\delta_j^2 &= \|\boldsymbol{g} - \boldsymbol{f}_j\|_2^2 \\
&= \langle \boldsymbol{g} - \boldsymbol{f}_j, \ \boldsymbol{g} - \boldsymbol{f}_j \rangle \\
&= \langle (\boldsymbol{g} - \boldsymbol{f}_j) + (\tilde{\boldsymbol{f}}_j - \boldsymbol{f}_j), \ (\boldsymbol{g} - \tilde{\boldsymbol{f}}_j) + (\tilde{\boldsymbol{f}}_j - \boldsymbol{f}_j) \rangle \\
&= \langle \boldsymbol{g} - \tilde{\boldsymbol{f}}_j, \ \boldsymbol{g} - \tilde{\boldsymbol{f}}_j \rangle + \langle \tilde{\boldsymbol{f}}_j - \boldsymbol{f}_j, \ \tilde{\boldsymbol{f}}_j - \boldsymbol{f}_j \rangle.
\end{aligned}$$

この結果を用いて, $\|\boldsymbol{\delta}\|_2^2$ を計算すると以下のようになる.

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\delta}\|_2^2 &= \|(\delta_1,\ \ldots,\ \delta_m)\|_2^2 \\ &= \sum_{j=1}^{m}(\langle \boldsymbol{g}-\tilde{\boldsymbol{f}}_j,\ \boldsymbol{g}-\tilde{\boldsymbol{f}}_j\rangle + \langle \tilde{\boldsymbol{f}}_j-\boldsymbol{f}_j,\ \tilde{\boldsymbol{f}}_j-\boldsymbol{f}_j\rangle) \\ &= \sum_{j=1}^{m}(\|\boldsymbol{g}\|_2^2 - \langle \boldsymbol{g},\ \tilde{\boldsymbol{f}}_j\rangle - \langle \tilde{\boldsymbol{f}}_j,\ \boldsymbol{g}\rangle + \|\tilde{\boldsymbol{f}}_j\|_2^2) + C_1 \\ &= m\left\|\boldsymbol{g}-\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\tilde{\boldsymbol{f}}_j\right\|_2^2 + C_2.\end{aligned}$$

ただし, $C_1,\ C_2$ は定数である. 上の式より, $\|\boldsymbol{\delta}\|_2$ が最小となるのは, $\boldsymbol{g}=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\tilde{\boldsymbol{f}}_j$ のときだとわかる. ∎

また, 定理 10 においては $f_1,\ \ldots,\ f_m$ の最近接多項式を計算しなくてはいけないことになるが, $\bar{f}=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}f_j$ の最近接多項式を計算すればよいことが以下からわかる.

定理 11

$z_1,\ \ldots,\ z_s\in\mathbb{C}$ と $f_1,\ \ldots,\ f_m\in\mathbb{CP}_n$ と $(p,\ q)=(2,\ 2)$ に関する最近接多項式は, $z_1,\ \ldots,\ z_s\in\mathbb{C}$ と $\bar{f}=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}f_j$ に関する 2-ノルムの最近接多項式と等しい.

証明 $\tilde{f}_j$ を f_j の最近接多項式とすると, 以下が成り立つ.

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{f}} &= \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(\tilde{\boldsymbol{f}}_j+(\boldsymbol{f}_j-\tilde{\boldsymbol{f}}_j)) \\ &= \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\tilde{\boldsymbol{f}}_j+\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(\boldsymbol{f}_j-\tilde{\boldsymbol{f}}_j).\end{aligned}$$

$\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\tilde{\boldsymbol{f}}_j\perp\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(\boldsymbol{f}_j-\tilde{\boldsymbol{f}}_j)$ と $\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\tilde{\boldsymbol{f}}_j\in\mathrm{Ker}(M_z)$ より, $\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\tilde{\boldsymbol{f}}_j$ は $\bar{f}$ の最近接多項式であり, 定理 10 より $z_1,\ \ldots,\ z_s\in\mathbb{C}$ と $f_1,\ \ldots,\ f_m\in\mathbb{CP}_n$ と $(p,\ q)=(2,\ 2)$ に関する最近接多項式と等しいことがわかる. ∎

以下で, 指定された領域に零点を持つ場合について議論する.

定理 12 (指定された領域に零点を持つ場合)

D と $f_1,\ \ldots,\ f_m$ に関する最近接多項式を求めるアルゴリズムが存在する.

定理 12 は下記の補題らによって成り立つ.

補題 13

$\bar{f}=\frac{1}{m}\sum_{j=1}f_j$ として, $\bar{f}\in Z(D)$ でないとき, D と $f_1,\ \ldots,\ f_m$ に関する最近接多項式の D 内の零点を z^* とする. そのとき, z^* は D と $\bar{f}$ に関する最近接多項式の D 内の零点になる.

証明 $\tilde{f}_z$ を任意の $z\in D$ と $\bar{f}$ に関する 2-ノルムにおける最近接多項式とし, $\bar{\delta}(z)=\|\bar{f}-\tilde{f}_z\|_2$ とする. また, $\tilde{f}_{j,z}$ を z と f_j $(j=1,\ldots,\ s)$ に関する 2-ノルムにおける最近接多項式とする. すると, まず以下の式が成り立つ.

$$\begin{aligned}\bar{\delta}(z)^2 &= \|\bar{f}-\tilde{f}_z\|_2^2 \\ &= \left\|\boldsymbol{g}-\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\tilde{\boldsymbol{f}}_{j,z}\right\|_2^2.\end{aligned}$$

ここで, $\tilde{f}$ を z と $f_1,\ \ldots,\ f_m$ と $(p,\ q)=(2,\ 2)$ に関する最近接多項式として, このもとでの定義 8 の $\boldsymbol{\delta}$ は z に依るので $\boldsymbol{\delta}(z)$ と表す. すると, 以下のようになる.

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\delta}(z)\|_2^2 =& m\left\|\tilde{\boldsymbol{f}}-\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\tilde{\boldsymbol{f}}_{j,z}\right\|_2^2 - m\left\|\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\tilde{\boldsymbol{f}}_{j,z}\right\|_2^2 + \sum_{j=1}^{m}\|\tilde{\boldsymbol{f}}_{j,z}\|_2^2 + \sum_{j=1}^{m}\|\tilde{\boldsymbol{f}}_j-\boldsymbol{f}_j\|_2^2 \\ =& m\left\|\tilde{\boldsymbol{f}}-\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\tilde{\boldsymbol{f}}_{j,z}\right\|_2^2 + m\bar{\delta}^2(z) - m\|\bar{\boldsymbol{f}}\|_2^2 + \sum_{j=1}^{m}\|\boldsymbol{f}_j\|_2^2.\end{aligned}$$

ここでは, $\tilde{\boldsymbol{f}}=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\tilde{\boldsymbol{f}}_j$ となるので, 実質的には以下である.

$$\|\boldsymbol{\delta}(z)\|_2^2 = m\bar{\delta}^2(z) - m\|\bar{\boldsymbol{f}}\|_2^2 + \sum_{j=1}^{m}\|\boldsymbol{f}_j\|_2^2.$$

よって, $\bar{\delta}^2(z)$ が最小のとき, $\|\boldsymbol{\delta}(z)\|_2^2$ が最小となる. ∎

また, 与えられた多項式が一つのときには, Sekigawa [3] の下記の結果がある.

定理 14 (Sekigawa [3])
D と D に零点を持たない $f \in \mathbb{CP}_n$ に関する最近接多項式 $\tilde{f}$ は必ず存在し, $\tilde{f}$ が D 内に持つ零点は ∂D に存在する.

定理 14 は定理 12 が成り立つ鍵となる定理である. なお, 定理 12 のアルゴリズムは以下である.

注意 3 (定理 12 におけるアルゴリズム)
定理 12 において, 最近接多項式を構成する手順は以下である.

1. $\bar{f}=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}f_j$ を計算する.
2. $\bar{f}\in Z(D)$ のとき, $\bar{f}$ が最近接多項式である.
3. $\bar{f}\notin Z(D)$ のとき, D と $\bar{f}$ に関する最近接多項式の ∂D に存在する零点を計算する. (Hitz [1] を参照のこと.)
4. 手順 2 で求めた零点に対応する最近接多項式を計算する.

4　おわりに

本論文において, ノルムのペア (2, 2) での複数零点を指定した場合と領域を指定した場合の複数の多項式に対する最近接多項式の構成法を提案した.

本論文では, 指定した点で零点を持つという性質に着目して, 最近接多項式の構成法を提案した. よって, 別の性質に着目すること, また, 別のノルムのペアを考えることが課題として残っている.

謝辞

本研究は科研費 18K11172 の助成を受けたものである。

参 考 文 献

[1] M. A. Hitz and E. Kaltofen, Efficient algorithms for computing the nearest polynomial with constained roots, in: Proceedings of the 1998 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, (1998) 236–243.

[2] O. Ruatta, M. Sciabica and A. Szanto, Overdetermined Weierstrass iteration and the nearest consistent system, Theoret. Comput. Sci. 562 (2015) 346–364.

[3] H. Sekigawa, The nearest polynomial with a zero in a given domain, Theoret. Comput. Sci. 409 (2008) 282–291.

[4] H. Sekigawa, The nearest polynomial to multiple given polynomials with a given zero in the real case, Theoret. Comput. Sci. 681 (2017) 167–175.

[5] H. J. Stetter, The nearest polynomial with a given zero, and similar problems, ACM SIGSAM Bull. 33(4) (1999) 2–4.